

掃流砂量に関する基礎的研究 THEORETICAL STUDY ON THE BED-LOAD TRANSPORT

中央大学理工学部 正員 林 泰造
埼玉大学 工学部
(財)電力中央研究所 正員 尾崎 幸男

1. はじめに

林・高羽¹⁶⁾(1977)は Einstein⁵⁾の掃流砂量公式を再検討し、同公式の理論的改良を行って、新たに一樣粒径に対する掃流砂量式を導いたが、式の誘導の過程において粒子の沈降速度に Stokes の式をのみ使用していたためその理論の適用範囲は限られていたと思われる。

本報告は、林・高羽の考え方に基き、粒子の saltation 機構について種々の細かな検討を行ってその基本的諸量の特性を明らかにするとともに、適用範囲の広い一樣粒径に対する掃流砂量式を導いたものである。

さらに、理論式と実験値との比較を行って、本理論結果の妥当性を確認した。

2. 粒子の沈降速度と抗力係数

本研究では抗力係数を次式のように表わす。

$$C_D = \frac{24}{Re} + C_{D\infty} \quad (1)$$

ここに、 $Re = |w|d/\nu$ 。

(1)式において、 $C_{D\infty} = 2$ とおけば Rubey(1933)²⁾の沈降速度が得られるので本研究においては

$$C_{D\infty} = 2.0 \quad (1.a)$$

とする。(1)式の関係を図-1に示す。

静水中における砂粒の沈降速度は次式から求められる。

$$R = W \quad (2)$$

ここに、 R ：砂粒に作用する流体抵抗、 W ：砂粒の水中重量で、

$$\left. \begin{aligned} R &= (1/2) C_D \rho w_f^2 \pi d^2 / 4 \\ W &= (\pi/6) (s-1) \rho g d^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.a)$$

(1)式、(2.a)式を(2)式に代入することにより次の沈降速度 w_f が得られる。

$$w_f = \sqrt{(s-1) g d^3 F_f} \quad (3)$$

ここに、

$$F_f = \sqrt{\frac{4}{3 C_{D\infty}} + \left(\frac{12}{C_{D\infty}}\right)^2 \frac{\nu^2}{(s-1) g d^3}} - \sqrt{\left(\frac{12}{C_{D\infty}}\right)^2 \frac{\nu^2}{(s-1) g d^3}} \quad (3.a)$$

ここで、(3)式において

$$\frac{4}{3 C_{D\infty}} \gg \left(\frac{12}{C_{D\infty}}\right)^2 \frac{\nu^2}{(s-1) g d^3} \text{ のときは、}$$

$$w_f \cong \sqrt{\frac{4(s-1) g d}{3 C_{D\infty}}} \quad (3.b)$$

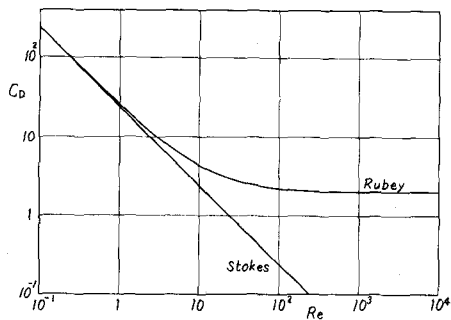


図-1 砂粒子の抗力係数

$$\frac{4}{3 C_{D\infty}} \leq \left(\frac{12}{C_{D\infty}} \right)^2 \frac{\nu^2}{(s-1) g d^3} \text{ のときは,}$$

$$w_f \cong \frac{(s-1) g d^2}{18 \nu} \quad (\text{Stokes の式}) \quad \dots\dots\dots (3.c)$$

となることがわかる。

ところで、(3)式を書き直すと、

$$\frac{(s-1) g d^3}{\nu^2} = \frac{3}{4} C_{D\infty} Re_f^2 + 18 Re_f \quad \dots\dots\dots (4)$$

を得る。ここに、 $Re_f = w_f d / \nu$ 。

(4)式は、以後の理論展開で用いる重要な関係式である。

3. 限界掃流力の表示方法と Einstein の定数 B_* の物理的意味

(a) 限界掃流力について

限界掃流力 τ_{*c} に関する公式はこれまでに数多く提案されているが、本研究では Shields の式を修正してつくられている岩垣 (1956)⁶⁾ による次式を採用する。但し、左辺は無次元限界掃流力 τ_{*c} の形に書き直した。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{*c} &= 0.05 & 671 &\leq \sqrt{(s-1) g d^3 / \nu} \\ &= (0.01505)^{25/22} [(s-1) g d^3 / \nu^2]^{3/22} & 162.7 &\leq \sqrt{(s-1) g d^3 / \nu} \leq 671 \\ &= 0.034 & 54.2 &\leq \sqrt{(s-1) g d^3 / \nu} \leq 162.7 \\ &= (0.1235)^{25/22} [(s-1) g d^3 / \nu^2]^{-7/22} & 2.14 &\leq \sqrt{(s-1) g d^3 / \nu} \leq 54.2 \\ &= 0.14 & \sqrt{(s-1) g d^3 / \nu} &\leq 2.14 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ところで、Shields 曲線は

$$\tau_{*c} = \frac{u_{*c}^2}{(s-1) g d} = \text{func.} \left(\frac{u_{*c} d}{\nu} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

の関係を示したものであり、両辺には u_{*c} が二重に使われている。そこで、本研究では、右辺の $u_{*c} d / \nu$ に代えて、前節の抗力係数の表示で用いたパラメーターと同様の $Re_f = w_f d / \nu$ を使って限界掃流力 τ_{*c} を表示すると岩垣の(5)式は以下のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{*c} &= 0.05 & Re_{fc1} &\leq Re_f \\ &= (0.01505)^{25/22} [(3 C_{D\infty} / 4) Re_f^2 + 18 Re_f]^{3/22} & Re_{fc2} &\leq Re_f \leq Re_{fc1} \\ &= 0.034 & Re_{fc3} &\leq Re_f \leq Re_{fc2} \\ &= (0.1235)^{25/22} [(3 C_{D\infty} / 4) Re_f^2 + 18 Re_f]^{-7/22} & Re_{fc4} &\leq Re_f \leq Re_{fc3} \\ &= 0.14 & Re_f &\leq Re_{fc4} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $Re_f = w_f d / \nu$

$$\left. \begin{aligned} Re_{fc1} &= (20/3 C_{D\infty}) [(3.24 + 1.35 \times 10^4 C_{D\infty})^{\frac{1}{2}} - 1.8] \\ Re_{fc2} &= (20/3 C_{D\infty}) [(3.24 + 7.94 \times 10^2 C_{D\infty})^{\frac{1}{2}} - 1.8] \\ Re_{fc3} &= (20/3 C_{D\infty}) [(3.24 + 88.1 \times C_{D\infty})^{\frac{1}{2}} - 1.8] \\ Re_{fc4} &= (20/3 C_{D\infty}) [(3.24 + 0.137 C_{D\infty})^{\frac{1}{2}} - 1.8] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7.a)$$

図-2に、 $C_{D\infty} = 2$ (Rubey) のときの限界掃流力 τ_{*c} と Re_f との関係(7)式を示した。

(b) Einstein の実験定数 B_* について

Einstein⁵⁾ は図-3に示すように、揚力 L は平均値 L_0 の周りに確率正規分布的に変動していると考えた。そこで、いま、その変動値が標準偏差 η_0 の2倍となったときの揚力 $L (= L_0 + 2\eta_0)$ が粒子重量に打ち勝

つようになったときの L_0 の値に対する掃流力をもって限界掃流力と定義すると、図-4 から明らかなように

$$\eta_1 = 2\eta_0 = B\psi_{cr} - 1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

なる関係が成立しなければならない。従って、 B_* ($\equiv B/\eta_0$) の値は、

$$B_* = [2 + (1/\eta_0)] \tau_{*c} \quad \dots\dots\dots (8.a)$$

となり、 B_* は限界掃流力 τ_{*c} と同等の物理的意味をもつものであることが判る。Einstein は実験値との比較から η_0 および B_* の値を

$$1/\eta_0 = 2.0, \quad B_* = 1/7 = 0.143 \quad \dots\dots\dots (9)$$

と定めている。

本研究では Einstein の定数の値(9)式はそのままとするが、 $B_* = 0.143$ なる値は Re_f の大きな値に対して求められたものであると考えられるので、(8.a) 式から次のように考える。すなわち、

$$B_* = 4\beta_* \tau_{*c} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\beta_* < 1.0$: 補正係数。

(10) 式の意味するところは、(8) 式で定義された限界掃流力は実験値から逆算される限界掃流力(研究者によって定義はまちまちである)よりも少し小さい値を取るということである。図-2 から、 $Re_f > 540$ のときの $\tau_{*c} = 0.05$ を用い、このとき $B_* = 0.143$ とすれば(10)式から

$$\beta_* \cong 0.714 \quad \dots\dots\dots (10.a)$$

と定められる。

4. 粒子の鉛直方向初速度の確率平均値

Einstein の理論によれば、河床上にある砂粒に働く揚力 L が砂粒の水中重量を上まわったとき砂粒は跳び出すのであるが、林・高羽はそのときの跳び出しの鉛直方向初速度 w_0 を力積方程式から求めた。さらに、揚力変動については Einstein と同様に考えて、初速度 w_0 の確率平均値 $\bar{w}_0$ を求めている。

ここで、この林・高羽の式に、粒子の加速度運動による付加質量を考慮して確率平均初速度 $\bar{w}_0$ を求めると次式のようにになる。

$$\bar{w}_0 = \frac{s-1}{s+(1/2)} g t_L \frac{1}{B_*} \tau_{*c}' I \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 t_L : 水中重量を上まわる揚力の作用時間

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} e^{-\eta_{*1}^2} + \frac{1}{2} e^{-\eta_{*2}^2} - \eta_{*1} \int_{\eta_{*1}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \eta_{*2} \int_{-\infty}^{\eta_{*2}} e^{-t^2} dt \right\} \quad \dots\dots\dots (11.a)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{*1} &= 4\beta_* \tau_{*c}' / \tau_{*c}' - 1/\eta_0 \\ \eta_{*2} &= -4\beta_* \tau_{*c}' / \tau_{*c}' - 1/\eta_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11.b)$$

ここに、 τ_{*c}' : 無次元有効掃流力。

(11) 式は $\bar{w}_0$ の計算式であるが、この中には揚力 $L (> W)$ の作用時間 t_L が入っている。現段階では t_L

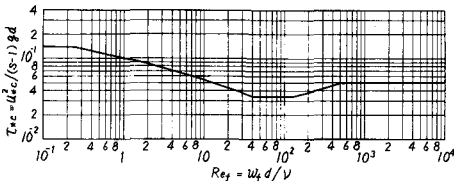


図-2 限界掃流力

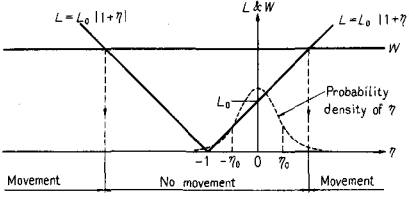


図-3 砂粒に作用する揚力と重量

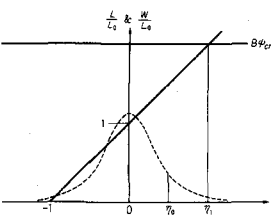


図-4 限界掃流力に対応する η の変動値 η_1

を決定するデータは何も存在しない。しかし、砂粒が河床から離れると間もなく砂粒に働いていた揚力が消失してしまうと考えると、 t_L は次のような大きさと推定される。

$$t_L < d/\bar{w}_0$$

そこで、

$$t_L = \alpha_L d/\bar{w}_0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

と仮定する。ここに、 α_L は1より小さい係数。(12式)を(11式)に代入し、若干の計算の後、両辺を w_f で除すると

$$\frac{\bar{w}_0}{w_f} = \left\{ \frac{2\alpha_L}{(2s+1)B_*} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{F_f} \tau_*^{\frac{1}{2}} I^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

を得る。そこで、 $\alpha_L=0.5$ と仮定し、 Re_f をパラメータとして(13式)を図示すると図-5のようになる。

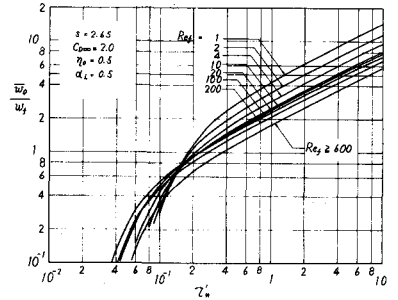


図-5 粒子の跳び出し時の確率
平均初速度

5. 粒子の跳び上り高さ

1つの砂粒が河床から跳び出してから運動(図-6)について考える。跳び出した瞬間を $t=0$ にとる。 $t=-0$ までは砂粒は河床上に静止していたものとする。この砂粒についての鉛直方向の運動方程式は次式で表わされる。

$$(m+m') dw/dt = -W - R \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} m &= (\pi/6) \rho s d^3, \quad m' = (1/2) (\pi/6) \rho d^3, \\ W &= (\pi/6) (s-1) \rho g d^3, \\ R &= C_D (1/2) \rho |w| w \pi d^2/4. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14.a)$$

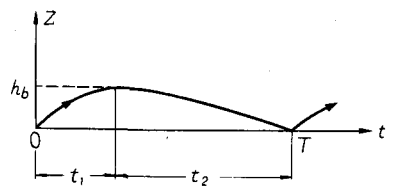


図-6 粒子の移動

砂粒に作用している揚力 L は、砂粒が河床を離れると消失すると考えられるので(14式)の右辺には入らない。(14.a)式を(14式)に代入し整理すると次式をうる。

$$dw/dt = -a - bw - cw|w| \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$a = \frac{2(s-1)g}{2s+1}, \quad b = \frac{36\nu}{(2s+1)d^2}, \quad C = \frac{3C_{D\infty}/2}{(2s+1)d}.$$

従って、図-6において、 $0 \leq t \leq t_1$ のときの砂粒の運動は(16式)で表わされる。

$$dw/dt = -a - bw - cw^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

上式の解は次の q の符号によってその積分形が異なる。

$$\begin{aligned} q &= 4ac - b^2 \\ &= 12C_{D\infty} \frac{(s-1)g}{(2s+1)^2 d} \left\{ 1 - \frac{108}{C_{D\infty}} \frac{\nu^2}{(s-1)gd^3} \right\} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ところで、2節の(4)式から $(s-1)gd^3/\nu^2$ は Re_f の関数であるので(4式)を用いると、

$$\left. \begin{aligned} q > 0 & \text{ は } Re_f > Re_{fc} \text{ のとき} \\ q < 0 & \text{ は } Re_f < Re_{fc} \text{ のとき} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17.a)$$

に相当する。ここに、

$$Re_{fc} = 12(\sqrt{2}-1)/C_{D\infty} \quad \dots\dots\dots (17.b)$$

で、 $C_{D\infty}=2.0$ とすれば $Re_{fc}=2.48$ となる。

(a) $Re_f > Re_{fc}$ の場合

$t = 0$ で $w = \bar{w}_0$ の初期条件のもとに(18)式を積分すると若干の計算の後に次式をうる。

$$w(t) = \frac{\bar{w}_0 - A_1 \tan(t/t_*)}{1 + A_2 \tan(t/t_*)} \quad (18)$$

ここに, $A_1 = (b/\sqrt{q}) \bar{w}_0 + 2a/\sqrt{q}$, $A_2 = (2c/\sqrt{q}) \bar{w}_0 + b/\sqrt{q}$, $t_* = 2/\sqrt{q}$.

上方に上り切る時間 t_1 :

t_1 は $w = 0$ となるときの時間であるから, (18)式より次のように求まる。

$$t_1 = t_* \tan^{-1} \left(\frac{\bar{w}_0}{A_1} \right) = t_* \tan^{-1} \left\{ \frac{\xi_1 (\bar{w}_0/w_f)}{2 + \xi_2 (\bar{w}_0/w_f)} \right\} \quad (19)$$

ここに,

$$\xi_1 = \sqrt{3 C_{D\infty}} F_f \left[1 - \frac{108/C_{D\infty}}{(3 C_{D\infty}/4) Re_f^2 + 18 Re_f} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \xi_2 = 1 - \frac{3 C_{D\infty}}{4} F_f^2.$$

(19)式において, $Re_f \rightarrow \text{large}$ のときは,

$$t_* \cong (2s+1) \left[d / \{ 3 C_{D\infty} (s-1) g \} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\xi_1 \cong \sqrt{3 C_{D\infty}} \sqrt{4/3 C_{D\infty}} = 2,$$

$$\xi_2 \cong 1 - (3 C_{D\infty}/4) (4/3 C_{D\infty}) = 0.$$

となり,

$$t_1 \cong \left[\frac{(2s+1)^2 d}{3 C_{D\infty} (s-1) g} \right]^{\frac{1}{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\bar{w}_0}{w_f} \right) \quad (19.a)$$

を得る。(19.a) 式は $C_D = C_{D\infty}$ のときの厳密解でもある。

跳び上り高さ h_B :

h_B は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} h_B &= \int_0^{t_1} w(t) dt \\ &= \frac{1}{2c} \ln \left(1 + \frac{b}{a} \bar{w}_0 + \frac{c}{a} \bar{w}_0^2 \right) - \frac{b}{c\sqrt{q}} \tan \left(\frac{\bar{w}_0}{A_1} \right) \\ &= \frac{(2s+1)d}{3 C_{D\infty}} \left[\ln \left\{ 1 + \xi_2 \frac{\bar{w}_0}{w_f} + \xi_3 \left(\frac{\bar{w}_0}{w_f} \right)^2 \right\} - \xi_4 \tan^{-1} \left\{ \frac{\xi_1 (\bar{w}_0/w_f)}{2 + \xi_2 (\bar{w}_0/w_f)} \right\} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

ここに, $\xi_3 = (3 C_{D\infty}/4) F_f^2$,

$$\xi_4 = \frac{24}{C_{D\infty}} \sqrt{Re_f^2 + \frac{24}{C_{D\infty}} Re_f - \left(\frac{12}{C_{D\infty}} \right)^2}.$$

ここで, また $Re_f \rightarrow \text{large}$ とすれば,

$$\xi_1 \cong 2, \quad \xi_2 \cong 0, \quad \xi_3 \cong 1, \quad \xi_4 \cong 0$$

から,

$$h_B \cong \frac{(2s+1)d}{3 C_{D\infty}} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{w}_0}{w_f} \right)^2 \right\} \quad (20.a)$$

となり, 上式もやはり $C_D = C_{D\infty}$ のときの厳密解である。

(b) $Re_f < Re_{fc}$ の場合

この場合 $w(t)$ は次式で表わされる。

$$w(t) = \frac{\sqrt{-q}}{2c} \frac{1 + B e^{-t/t_*}}{1 - B e^{-t/t_*}} - \frac{b}{2c} \quad (21)$$

ここに,

$$B = \frac{2c\bar{w}_0 + b - \sqrt{-q}}{2c\bar{w}_0 + b + \sqrt{-q}}, \quad t_* = 1/\sqrt{-q}.$$

上方に上り切る時間 t_1 :

$$t_1 = t_* \ln \left\{ \frac{B(b + \sqrt{-q})}{b - \sqrt{-q}} \right\} = t_* \ln \left\{ \frac{1 + \zeta_1(\bar{w}_0/w_f)}{1 + \zeta_2(\bar{w}_0/w_f)} \right\} \quad (22)$$

ここに,

$$\zeta_1 = \frac{(C_{D\infty}/12)[18\text{Re}_f + (3C_{D\infty}/4)\text{Re}_f^2]^{1/2} F_f}{1 - [1 - (C_{D\infty}/6)\text{Re}_f - (C_{D\infty}/12)^2 \text{Re}_f^2]^{1/2}},$$

$$\zeta_2 = \frac{(C_{D\infty}/12)[18\text{Re}_f + (3C_{D\infty}/4)\text{Re}_f^2]^{1/2} F_f}{1 + [1 - (C_{D\infty}/6)\text{Re}_f - (C_{D\infty}/12)^2 \text{Re}_f^2]^{1/2}}.$$

②式において, $\text{Re}_{fc} \gg \text{Re}_f \rightarrow \text{small}$ のときは,

$$t_* \cong \frac{(2s+1)d^2}{36\nu}, \quad \zeta_1 \cong 1, \quad \zeta_2 \cong \frac{C_{D\infty}}{24} \text{Re}_f$$

となり,

$$t_1 \cong \frac{(2s+1)d^2}{36\nu} \ln \left\{ 1 + \frac{\bar{w}_0}{w_f} \right\} \quad (22.a)$$

を得る。(22.a) 式は $C_D = 24/\text{Re}$ としたときの厳密解である。

跳び上り高さ h_B :

$$h_B = \frac{1}{c} \ln \left\{ \frac{2\sqrt{-q}}{(1-B)(b + \sqrt{-q})} \right\} - \frac{b - \sqrt{-q}}{2c} t_1$$

$$= \frac{1}{c} \left[\ln \left(1 + \zeta_2 \frac{\bar{w}_0}{w_f} \right) - \zeta_3 \ln \left\{ \frac{1 + \zeta_1(\bar{w}_0/w_f)}{1 + \zeta_2(\bar{w}_0/w_f)} \right\} \right] \quad (23)$$

ここに,

$$\zeta_3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{[1 - (C_{D\infty}/6)\text{Re}_f - (C_{D\infty}/12)^2 \text{Re}_f^2]^{1/2}} - 1 \right\}.$$

また, $\text{Re}_{fc} \gg \text{Re}_f \rightarrow \text{small}$ とすれば,

$$\zeta_3 \cong \frac{C_{D\infty}}{24} \text{Re}_f, \quad \ln \left(1 + \zeta_2 \frac{\bar{w}_0}{w_f} \right) \cong \frac{C_{D\infty}}{24} \text{Re}_f \frac{\bar{w}_0}{w_f}$$

から,

$$h_B \cong \frac{(2s+1)d^2}{36\nu} w_f \left\{ \frac{\bar{w}_0}{w_f} - \ln \left(1 + \frac{\bar{w}_0}{w_f} \right) \right\} \quad (23.a)$$

を得る。上式も $C_D = 24/\text{Re}$ のときの厳密解である。

以上の得られた結果②式と③式を用いると, Re_f の全範囲にわたって砂粒の跳び上り高さ h_B を計算できる。それらを図示したものが図-7である。Einsteinは,

$$h_B/d = 2 = \text{const.}$$

と考えたが, 図-7から h_B/d の値は

$$h_B/d = \text{func.}(\tau_*', \text{Re}_f)$$

であることがわかる。

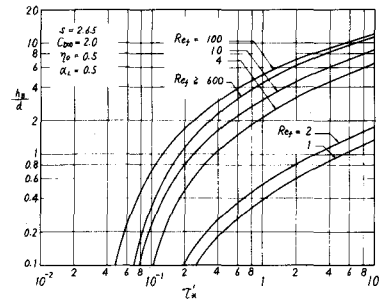


図-7 粒子の跳び上り高さ

6. 粒子の One step の移動距離

砂粒の移動距離 l を求めるためには、図-6 の時間 t_2 を知る必要がある。砂粒の下降時 ($t_1 \leq t \leq t_1 + t_2$) の運動方程式は次式で示される。

$$dw/dt = -a - bw + cw^2 \quad (24)$$

ここで、 $r = b^2 + 4ac$

$$= 12 C_{D\infty} \frac{(s-1)g}{(2s+1)^2 d} \left\{ 1 + \frac{108}{C_{D\infty}} \frac{\nu^2}{(s-1)g d^3} \right\} \quad (25)$$

とおくと、常に $r > 0$ であるから、(24)式の解は Re_f の全範囲にわたって(26)式で表わされる。初期条件は $t = t_1$ で $w=0$ である。

$$w(t) = -\frac{\sqrt{r}}{2c} \frac{1 + K \exp\{-(t-t_1)/t_*\}}{1 - K \exp\{-(t-t_1)/t_*\}} + \frac{b}{2c} \quad (26)$$

ここに、 $t_* = 1/\sqrt{r}$ 、 $K = (b - \sqrt{r})/(b + \sqrt{r})$

(26)式を用いると h_B の高さを砂粒が落下に要する時間 t_2 が求められ以下のようにになる。

$$-h_B = \int_{t_1}^{t_1+t_2} w(t) dt = -\frac{1}{c} \ln \frac{1 - K e^{-t_2/t_*}}{1 - K} - w_f t_2 \quad (27)$$

上式を書き直すと次式をうる。

$$\ln \{ (1 - K e^{-t_2/t_*}) / (1 - K) \} + c w_f t_2 - c h_B = 0 \quad (28)$$

(28)式を解けば t_2 の厳密解が得られるが、そのためには数値解法を用いねばならない。ここでは、解析的に解を求めたいため次の近似解法を行う。まず、

$$\frac{1 - K e^{-t_2/t_*}}{1 - K} = 1 + \frac{K}{1 - K} (1 - e^{-t_2/t_*}) \quad (29)$$

と書き直す。 t_2 は砂粒が h_B を下降するのに要する時間であるから

$$1 - e^{-t_2/t_*} < 1 \quad (29.a)$$

と考えられる。また、

$$\frac{K}{1 - K} = \frac{b - \sqrt{r}}{2\sqrt{r}} = -\frac{(C_{D\infty}/24) Re_f}{1 + (C_{D\infty}/12) Re_f} \quad (29.b)$$

と変形でき、 $Re_f \rightarrow \text{large}$ ならば

$$K/(1-K) \cong -1/2 \sim O(10^{-1})$$

$Re_f \rightarrow \text{small}$ ならば

$$K/(1-K) \cong -(C_{D\infty}/24) Re_f$$

で、 $C_{D\infty} \sim O(10^0)$ 、 $Re_f \leq O(10^0)$ から

$$K/(1-K) \lesssim O(10^{-1})$$

となる。したがって Re_f の全範囲にわたって

$$K/(1-K) \lesssim O(10^{-1}) \quad (29.c)$$

と考えることができる。このことから、(28)式の左辺第一項は次のように近似できる。

$$\ln \frac{1 - K e^{-t_2/t_*}}{1 - K} \cong \frac{K}{1 - K} (1 - e^{-t_2/t_*}) - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{1 - K} \right)^2 (1 - e^{-t_2/t_*})^2 \quad (29.d)$$

ここで、さらに

$$1 - e^{-t_2/t_*} \cong t_2/t_* - (1/2) (t_2/t_*)^2 \quad (29.e)$$

と近似し、それぞれを(28)式に代入し、 $O(t_2^2)$ の項まで考慮すると、 t_2 は(30)式のように求まる。

$$t_2 \cong \frac{(2s+1)d^2}{36\nu} \left[\frac{2ch_B}{(C_{D\infty}/24) Re_f [1 + (C_{D\infty}/24) Re_f]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

(30)式において, $Re_f \rightarrow \text{large}$ のときは

$$t_2 \cong \frac{2(2s+1)}{3C_{D\infty}} \frac{d}{w_f} \left\{ \ln \left\{ 1 + (\bar{w}_0/w_f)^2 \right\} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (30.a)$$

となる。 $C_D = C_{D\infty}$ のときの厳密解は

$$t_2 = \frac{2(2s+1)}{3C_{D\infty}} \frac{d}{w_f} \sinh^{-1} (\bar{w}_0/w_f) \quad \dots\dots\dots (30.b)$$

であるから, 両者は $\bar{w}_0/w_f < 1$ であればほぼ一致する。

また, $Re_f \rightarrow \text{small}$ のとき(30)式は,

$$t_2 \cong \frac{(2s+1)d^2}{36\nu} 2 \left\{ \frac{\bar{w}_0}{w_f} - \ln \left(1 + \frac{\bar{w}_0}{w_f} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (30.c)$$

となる。 $C_D = 24/Re$ のとき厳密解は解析的には求まらないが, このときの近似解は(30.c)式と一致する。

砂粒の浮上水中滞留時間 $T = t_1 + t_2$ が求まったことにより, 砂粒の one step の移動距離 ℓ が次式で計算される。

$$\ell = u_B \cdot T = u_B \cdot (t_1 + t_2) \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに, u_B は砂粒の流下方向の速度である。いま, Einstein の示した流速分布式

$$\begin{aligned} u/u_* &= 5.75 \log_{10} (30.2 y/\Delta) \\ &= 5.75 \log_{10} (30.2 yx/k_s) \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

を用い, u_B として $y = (k_s/30.2x) + 0.8 h_B$ の高さの流速を近似的に用いることにすれば,

$$u_B/u_* = 5.75 \log_{10} (1 + 24.2 h_B x/k_s) \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここに, x : 滑面と粗面を接続するパラメーター, k_s : 河床の砂粒相当粗度, $\Delta = k_s/x$ 。

(33) 式を書き直して,

$$\left. \begin{aligned} u_B &= \alpha_B u_* \\ \alpha_B &= 5.75 \log_{10} (1 + 24.2 h_B x/k_s) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

(19) 式または (22) 式および (30) 式と (34) 式を (31) に代入すると, 砂粒の one step の移動距離 ℓ は次式のように表わされる。

$$\ell/d = \alpha_B T_* \tau_*^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここに,

$$T_* = \frac{t_1 + t_2}{d/w_f} \frac{1}{F_f} = t_{*1} + t_{*2} ,$$

$$\begin{aligned} t_{*1} &= \begin{cases} \frac{2s+1}{\sqrt{3C_{D\infty}}} \left[\frac{(3C_{D\infty}/4) Re_f^2 + 18 Re_f}{(3C_{D\infty}/4) Re_f^2 + 18 Re_f - 108/C_{D\infty}} \right]^{\frac{1}{2}} \tan^{-1} \left\{ \frac{\xi_1 (\bar{w}_0/w_f)}{2 + \xi_2 (\bar{w}_0/w_f)} \right\} & \dots\dots\dots \text{for } Re_f < Re_{fc} \\ \frac{2s+1}{36} \frac{Re_f/F_f}{[1 - (C_{D\infty}/6) Re_f - (C_{D\infty}/12)^2 Re_f^2]^{\frac{1}{2}}} \ln \left\{ \frac{1 + \zeta_1 (\bar{w}_0/w_f)}{1 + \zeta_2 (\bar{w}_0/w_f)} \right\} & \dots\dots\dots \text{for } Re_f > Re_{fc} \end{cases} \\ t_{*2} &= \left\{ \frac{2s+1}{18} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{F_f} \left\{ \frac{Re_f}{1 + (C_{D\infty}/24) Re_f} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{h_B}{d} \right\}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

(35) 式を図-8に示した。この図から $\tau_*' > \tau_{*c}$ のときは $\ell/d \propto \tau_*'$

となることがわかる。ここで, Krishnappan の実験図-9 (Yalin¹²⁾) と本理論結果を比較すると, 両者はほぼ同様の傾向を示している。

Einstein は $\ell/d = 100 = \text{const.}$ と置いたが, 図-8および図-9からもわかるように,

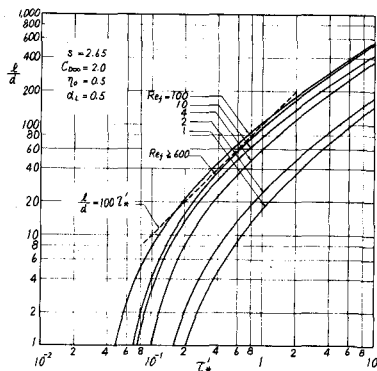


図-8 粒子の1ステップの移動距離

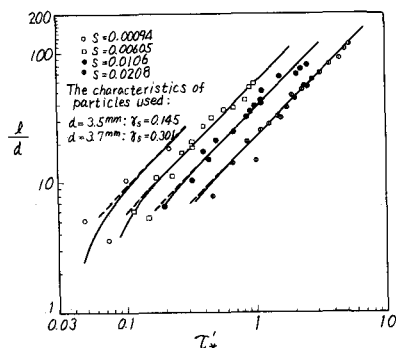


図-9 ステップ長の実験値 (Yalin の書¹²⁾より)

$$l/d = \text{func.}(\tau_*', Re_f) \cong 100 \tau_*' \quad (Re_f \geq 100, \tau_*' \gg \tau_{*c}) \quad \dots\dots\dots (35, a)$$

である。前節の h_B/d と同様に $l/d = \text{const.}$ と考えたことは Einstein 理論の問題点である。

ところで、河床安定理論で重要となる掃流砂量の掃流力に対する遅れ距離はほぼ粒子の1ステップの移動距離 l に等しいことが明らかにされている。¹⁹⁾

7. 一様粒径の掃流砂量式

林・高羽¹⁶⁾は一様粒径の掃流砂量として次式を求めている。

$$q_B = n_b V Pa (T/t_{ex}) u_B \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 n_b : 河床単位面積中に存在する砂粒数 (個/area)、 V : 砂粒1個当たりの平均体積 ($Vol/\text{個}$)、 $Pa : t_{ex}$ 時間中に砂粒が動き出す確率、 $T = t_1 + t_2$: 砂粒の水流中滞留時間、 t_{ex} : 1つの砂粒を同様な砂粒で置き換えるのに要する時間 (exchange time)。

$$\text{そこで、} n_b \cong 1/\frac{\pi}{4} d^2, V \cong \frac{\pi}{6} d^3, l = u_B T \quad \dots\dots\dots (36.a)$$

を (36) 式に代入し、両辺に $1/\sqrt{(s-1)gd^3}$ をかけると、

$$\phi = \frac{2}{3} \frac{l Pa}{\sqrt{(s-1)gd} t_{ex}} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\text{ここに、} \phi = q_B / \sqrt{(s-1)gd^3}.$$

(37) 式の ϕ の基本的骨組を調べるために、まず $Re_f \rightarrow \text{large}$ の場合を考えてみる。このとき、

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_0/w_f &< 1.0 \\ h_B/d &\cong (\alpha_L/2B_*) \tau_*' I, \\ l/d &\cong \alpha_B [2\alpha_L(2s+1)/B_*]^{1/2} \tau_*' I^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

なる近似を行い、また、 t_{ex} を Einstein の表示 $t_{ex} \propto d/w_f$ に代えて、

$$t_{ex} = \alpha_e t_L = \alpha_e \alpha_L d/\bar{w}_0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

と仮定する (ただし α_e は定数) と、若干の計算の後次式を得る。

$$\phi = C Pa I \tau_*'^{3/2} \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 $C = 4 \alpha_B / [3 \alpha_e B_*]$ 。

上式で与えられる C が定数ならば (40) 式は林・高羽の式に一致するが、本研究においても $C = \text{const.}$ と仮定する。 C の値が決まれば未だ不明であった α_e が次式のように定められる。

$$\alpha_e = t_{ex}/t_L = 4 \alpha_B / [3 C B_*] \quad \dots\dots\dots (41)$$

(41)式を使うことによって、 Re_f の全範囲における掃流砂量式は次式から計算される。

$$\phi = \frac{2}{3} \frac{F_f}{\alpha_e \alpha_L} \frac{\bar{w}_0}{w_f} \frac{l}{d} \text{ Pa} \quad (42)$$

そこで、 $C = 6.0$ として(42)式を計算すると図-10のようになる。図-10から、 $Re_f \geq 4$ の範囲では、 Re_f の値の違いは限界掃流力 τ_{*c} の値の違いとしてのみ現われると考えてよいものと思われる。ここで、

$$\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{sec}, \quad g = 980 \text{ cm}/\text{sec}^2, \quad s = 2.65,$$

$$C_{D\infty} = 2.0, \quad Re_f = 4$$

とすれば、(4)式から

$$Re_f \geq 4 \text{ のとき } d \geq 0.0181 \text{ cm}$$

となる。この粒径範囲を対象にすると、このときの掃流砂量式は近似的に次式で表わされる。

$$\phi = 6.0 \text{ Pa } I \tau_*'^{\frac{3}{2}} \quad (43)$$

ここで、 $\phi = q_B / \sqrt{(s-1)gd^3}$,

$$\text{Pa} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta_{*2}}^{\eta_{*1}} e^{-t^2} dt,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} e^{-\eta_{*1}^2} + \frac{1}{2} e^{-\eta_{*2}^2} - \eta_{*1} \int_{\eta_{*1}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \eta_{*2} \int_{-\infty}^{\eta_{*2}} e^{-t^2} dt \right\},$$

$$\eta_{*1} = 4 \beta_* \tau_{*c} / \tau_*' - 1 / \eta_0,$$

$$\eta_{*2} = -4 \beta_* \tau_{*c} / \tau_*' - 1 / \eta_0,$$

$$\beta_* = 0.714, \quad \eta_0 = 1/2.$$

(43)式をもって、本研究の一樣粒径についての掃流砂量式とする。(43)式とGilbertの実験値を τ_*' についてプロットしたものととの比較をしたのが図-11であり、両者は全体的にかなりの一致をみせている。但し、(43)式の計算においては $\tau_{*c} = 0.05$ とした。特に、 $\tau_*' > 0.3$ で $q_B \propto \tau_*'^{\frac{3}{2}}$ の係数にあり、Meyer-Peter & Müllerの式⁴⁾、佐藤・吉川・芦田の式⁷⁾、芦田・道上の式¹⁴⁾と同様の傾向を示す。Gilbertの実験値のうちには、 τ_* をEinsteinの方法で計算すると τ_* より大きくなるものがあるが、これはその測定値の精度が悪いものであることを意味している。そのような点には短斜線を付して表示した。このような点は実験値から除外して考えるのがよいと思われる。

なお、筆者らは混合粒径に対する粒経別掃流砂量式、また、非平衡状態での局所掃流砂量式も導いているが、これらは別の機会に発表するつもりである。

付 記

本研究の遂行に当っては中央大学大学院前期博士課程矢内栄二君より熱心な協力を得た。記して謝意を表する。

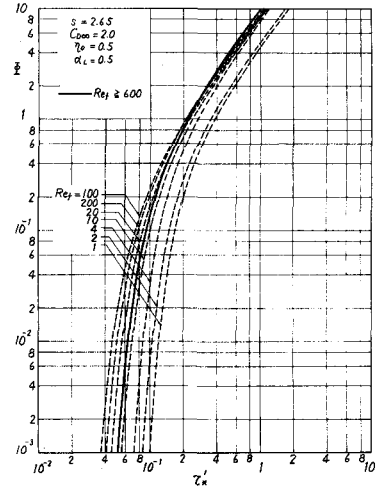


図-10 無次元掃流砂量

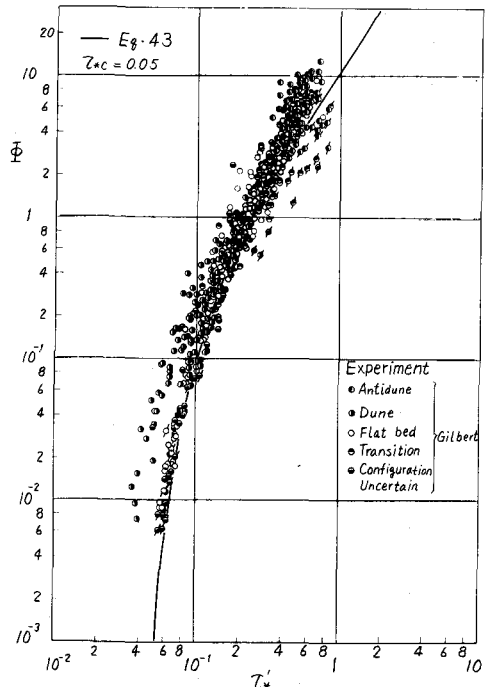


図-11 無次元掃流砂量の実験値と理論値(43)式

参 考 文 献

- 1) Gilbert, G.K. : The transportation of debris by running water, U. S. Geological Survey Professional Paper 86, 1914.
- 2) Rubey, W.W. : Settling velocities of gravel, sand, and silt, American J. of Science, Vol.25, №148, April 1933.
- 3) Einstein, H. A. : Formulas for the transportation of bed load, Trans. ASCE, Vol.107, 1942.
- 4) Meyer-Peter, E. and Müller, R. : Formulas for bed-load transport, Proc. of the 2nd Congress of the IAHR, Stockholm, 1948.
- 5) Einstein, H. A. : The bed-load function for sediment transportation in open channel flows, Technical Bulletin №1026, U. S. Depf. of Agric., Washington, D. C., 1950.
- 6) 岩垣雄一 : 限界掃流力に関する基礎的研究 (I) 限界掃流力の流体力学的研究, 土木学会論文集, 第41号, 1956年12月, pp. 1-21.
- 7) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男 : 河床砂礫の掃流運搬に関する研究, 建設省土木研究所報告, 第98号, 1958.
- 8) Egiazaroff, I. V. : Calculation of nonuniform sediment concentrations, Proc. ASCE, HY4, 1965.
- 9) 岸 力・福岡捷二 : 河床粒子の Saltation の構造と掃流砂量, 第10回水理講演会講演集, 1966年2月, pp. 59-64.
- 10) 浅田 宏・石川晴雄 : 混合砂礫の掃流限界と掃流砂量式, 電研報告, №68045, 1968年11月.
- 11) 平野宗夫 : Armoring を伴う河床低下について, 土木学会論文報告集, 第195号, 1971年11月.
- 12) Yalin, M. S. : Mechanics of Sediment Transport, Pergamon Press, 1972.
- 13) 浅田 宏・石川晴雄 : 水流による河床砂礫の分級機構に関する研究 (III), 電研報告 №71015, 1972年3月.
- 14) 芦田和男・道上正規 : 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第206号, 1972年10月.
- 15) 中川博次・辻本哲郎 : 水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第244号, 1975年12月.
- 16) 林 泰造・高羽秀紀 : 掃流砂量の理論的研究, 第21回水理講演会論文集, 1977年2月, pp. 117-126.
- 17) 林 泰造・尾崎幸男 : 混合砂礫の流砂量計算式, 第5回関東支部年次研究発表会講演概要集, 1978年1月, pp. 81-82.
- 18) 吉川秀夫・石川忠晴 : 流砂運動のモデル化とそれに基づく流砂量の算定法について, 土木学会論文報告集, 第269号, 1978年1月.
- 19) Hayashi, T. and Ozaki, S. : Formation of alternating bars and braids, Proc. of U. S. - Japan Binational Seminar on Erosion and Sedimentation, Hawaii, March 1978.