

Dunesの波高およびそれに及ぼす混合砂礫の影響について

On the dune height and the influence of sand mixture on its characteristics

鳥取大学工学部 正 員 ○鈴木 幸一

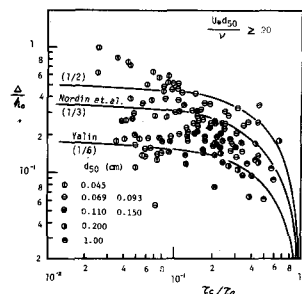
鳥取大学工学部 正 員 道上 正規

1. まえがき

移動床水路の流水抵抗に関して河床波の形状、とくに波高の影響は支配的であり、抵抗則を明らかにするための基礎的知見を得るという目的で、河床波が十分発達し定常状態になったときの河床波の平均波高特性をまず明らかにすることは重要であり、また混合砂よりなる実河川を想定するときその特性が砂礫の混合によりどのように変化するかを検討しておくことは必要である。従来、定常状態における河床波の平均波高に関する研究は、おもに均一砂河床についてなされてきた。Shinohara-Tsubaki¹⁾はdunesの平均波高 Δ と平均水深 h_0 の比 Δ/h_0 はおもに無次元掃流力 τ_{*c} の関数であるという結果を得、Yalin²⁾は実験資料に基づいて Δ/h_0 が次式(1)で示されるように、限界掃流力 τ_c と掃流力 τ_o との比の関数であると報告している。

$$\frac{\Delta}{h_0} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\tau_c}{\tau_o} \right) \quad (1)$$

しかし、Nordinら³⁾は式(1)の右辺の係数 $1/6$ は $1/3$ とした方がより多くの実測値に適合することを指摘し、また「水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会」⁴⁾の報告によると、実測値はこの係数が $1/6 \sim 1/2$ の範囲に分布している(図-1)。すなわち、この係数は一定値ではなく、何らかの水理量によって変化していると考えられる。この点に関して、田中⁵⁾は河床波の形状を一つの定まった正弦関数で与え、その上の流れをポテンシャル流解析することによって掃流力を推定し、Brown型の平衡状態での流砂量式を用いることによって河床波の波高が次式で与えられることを示した。

図-1 Δ/h_0 と τ_c/τ_o の関係⁴⁾

$$\frac{\Delta}{h_0} = \frac{2}{2m+1-\tau_c/\tau_o} (1-F_r^2) \left(1 - \frac{\tau_c}{\tau_o} \right) \left(1 + \frac{9}{2k^2} \right) \quad (2)$$

ここに、 $m = 2.1$ (dunes に対して)、 F_r :フルード数、 $k = (2\pi h_0/i_0 L) (1-F_r^2)$ 、 i_0 :河床勾配、 L :平均河床波長である。すなわち、式(2)は掃流力が限界掃流力よりずっと大きいときには式(1)の係数 $1/6$ がフルード数によって変化するという興味深い結果が得られている。

河床波はその形状や大きさが必ずしも規則的ではないという観点から、波長、波高に関して統計的考察を加えた研究もあり、dunesの波高は近似的に Rayleigh 分布をしているというような結果も示されているが、本研究では、抵抗則を巨視的に捉えるための基礎的知見を得るということを念頭におき、Lower regime におけるdunesが十分発達した状態でのそれらの平均波高のみについて検討を加える。すなわち、dunesの平均波高を求める式を導き、混合砂河床では均一砂河床の場合と比較してどのように変化するかをモデル解析によって示し実験によって検証する。

2. モデルによる解析

田中⁵⁾も述べているように、dunesの挙動を実験的に観察してみると微視的には個々のdunesの生成・発達・消滅あるいは他のdunesとの結合を繰返しているが、平衡状態に達した後では少なくとも巨視的には安定で変形せずに伝播するdunesが存在する。これらのdunesはその下流側面は砂の水中安息角に規定される勾配にはほぼ等しい傾きをもつ斜面を形成し、上流側は比較的ゆるやかな傾斜面となっており、上流側斜面で洗掘転動してきた砂粒子がdunesの峰のところで下流側斜面を滑落堆積することによってdunesは

同じ形状を保ちながら下流側へ進行していく。いま、平均的に dunes の形状を図-2 に示すように高さ Δ の三角形で示し、これが速度 v_D で変形せずに下流側に移動していくものと仮定する。三角形の上流側斜面を流送された砂は必ず波の峰からすぐそれに続く谷へ滑落し、谷を飛び越えて流下していく砂がないというような水理条件下での dunes を対象とすると、単位幅当りの流砂量 q_s は、 λ を砂の空隙率とすると、連続の関係より明らかに、

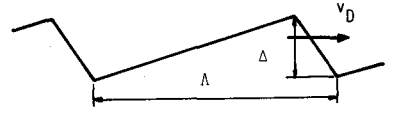


図-2 dunes のモデル

$$q_s = \frac{1}{2} \Delta v_D (1 - \lambda) \quad (3)$$

で表わされる。式(3)の関係を用いて dunes の高さ Δ を求めるためには v_D および q_s を何らかの形で与える必要がある。まず、dunes の進行速度 v_D であるが、これは河床に加えられた擾乱が下流に伝播する速度であると考えられる。de Vries⁷⁾ は河床に加えられた擾乱の伝播速度 C_s を、水面に加えられた擾乱の伝播速度に比してずっと大きいすなわち流れは定常に保たれていると仮定して、特性曲線の考えに基づいて求めている。すなわち、流れの一次元定常状態の運動方程式に連続式を代入したもの、砂の連続式および

$$du = (\partial u / \partial t) dt + (\partial u / \partial x) dx, \quad dz = (\partial z / \partial t) dt + (\partial z / \partial x) dx$$

の関係をマトリックス表示すると次式(4)のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & g \\ 0 & \alpha(\partial q_s / \partial x) & 1 & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial u / \partial t \\ \partial u / \partial x \\ \partial z / \partial t \\ \partial z / \partial x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ du \\ dz \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $\alpha = 1/(1 - \lambda)$, $\beta = u(1 - F_r^2)$, $w = \tau_b / \rho h_0$, u : 平均流速, g : 重力加速度, τ_b : 河床せん断力, ρ : 水の密度, z : 河床高 である。式(4)の係数のディターミナントを 0 とすることによって、

$$\frac{dx}{dt} = c_s = -\frac{\alpha}{\beta} g \cdot \frac{\partial q_s}{\partial u} = \frac{1}{1 - \lambda} \cdot \frac{1}{1 - F_r^2} \cdot \frac{1}{h_0} \cdot \frac{\partial q_s}{\partial u} \cdot u \quad (5)$$

が得られる。この式で表わされる河床に加えられた擾乱の伝播速度 C_s が dunes の移動速度に相当するということから、式(3)および式(5)を用いて、

$$\frac{\Delta}{h_0} = 2(1 - F_r^2) \frac{q_s}{(\partial q_s / \partial u) \cdot u} \quad (6)$$

が得られる。式(6)によって dunes の波高 Δ を計算するにあたって流砂量 q_s は従来提案されている流砂量式を用いることにするが、河床が混合砂礫よりなる場合には混合砂に対する流砂量式を用いなければならない。平野⁸⁾ や道上⁹⁾ によると河床における重量組成率が p_i である粒径 d_i の砂の流量 q_{si} は、

$$q_{si} = p_i \cdot f_i \quad (7)$$

で与えられる。ただし、 f_i は従来の一様砂に対する流砂量式中の限界掃流力を混合砂中における各粒径砂の限界掃流力で置き換えたものである。ここでは簡単のために f_i として、

$$f_i = C_1 \sqrt{sgd_i^3 (\tau_{*ci} - \tau_{*c})^n} \quad (8)$$

で表わされる Meyer-Peter & Müller 型の流砂量式を用い、混合砂中の粒径 d_i の砂の無次元限界掃流力としては、次式(9)で示される Egiazaroff の式¹⁰⁾を用いることにする。

$$\tau_{*ci} = \frac{C_2}{(\log_{10} 19d/d_m)^2} \quad (9)$$

ただし、 C_1 、 C_2 および n ：定数、 $s = \sigma/\rho - 1$ 、 σ ：砂の密度、 d_m ：平均砂粒径、 τ_{*ei} ：無次元有効掃流力である。この τ_{*ei} は、 μ を $\mu = (C_1/C_2)^{3/2}$ (Meyer-Peter & Müller¹¹⁾)で示されるripple factor、 i_b を河床勾配、 h を水深とすると、 $\mu h i_b / s d_i$ で表わされる。ここに、 $C_b = u \sqrt{h i_b}$ 、 $C_g = u \sqrt{h i_g} = \log(12h / (k_s + 0.3\delta))$ 、 $k_s = d_{90}$ 、 $\delta = 11.6\nu / u_*$ 、 ν ：動粘性係数、また u_* は摩擦速度で $\sqrt{gh i_g}$ であるから i_g は試行錯誤によって求めることができる。式(8)および(9)を式(7)に代入して得られる関係が図-3に示されており、 τ_{*ei} が τ_{*ci} に比較してずっと大きい場合には混合砂の特性は顕著ではないが、 τ_{*ei} が τ_{*ci} に近づくにつれて混合効果が大きくなることが認められる。式(6)に現われる $\partial q_s / \partial u$ を計算するために平均流速に対するChezyの式を用いて τ_{*ei} を変形すると、

$$\tau_{*ei} = \frac{\tau_e}{(\sigma - \rho) g d_i} = \frac{\mu h i_b}{s d_i} = \mu \frac{1}{C_b^2} \cdot \frac{u^2}{s d_i} \quad (10)$$

となる。また、全流砂量 q_s と各粒径砂量 q_{si} の関係、

$$q_s = \sum q_{si} = \sum p_i f_i \quad (11)$$

を考慮して、式(7)、(8)、(9)および式(10)を用いて式(6)を計算すると、

$$\frac{\Delta}{h_0} = \frac{1}{n} (1 - F^n) \frac{\sum p_i \sqrt{s g d_i^3 \tau_{*ei}^n (1 - \tau_{*ci} / \tau_{*ei})^n}}{\sum p_i \sqrt{s g d_i^3 \tau_{*ei}^n (1 - \tau_{*ci} / \tau_{*ei})^{n-1}}} \quad (12)$$

が得られ、この式によって混合砂河床におけるdunesの波高を求めることができる。図-3に示される混合砂の流砂量式の形が式(12)にも直接現われているため、dunesの波高に及ぼす河床砂の混合効果はやはり、 τ_{*ei} が τ_{*ci} に近くなるにつれて顕著であって、 τ_{*ei} が τ_{*ci} に比してずっと大きい場合には平均粒径で代表される均一砂の場合と同じであると考えられる。また、均一砂の場合には式(12)は簡単になり、

$$\frac{\Delta}{h_0} = \frac{1}{n} (1 - F^n) (1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_{*e}}) \quad (13)$$

である。これは均一砂に対して田中が求めた式(2)とほぼ一致しており、式(1)で示されるYalinの式の右辺の係数 $1/6$ がフルード数の関数であることが示されている。 C_1 、 C_2 、 n および τ_{*c} の値として、Einsteinの流砂量式とほぼ一致するといわれているMeyer-Peter & Müllerの流砂量式を用いると、 $C_1 = 8$ 、 $n = 3/2$ および $\tau_{*c} = 0.047$ であるから $C_2 = 0.078$ となる。これらの値を用いて、フルード数をパラメーターとする Δ/h_0 と τ_{*c} / τ_{*e} の関係を示せば図-4のようになる。

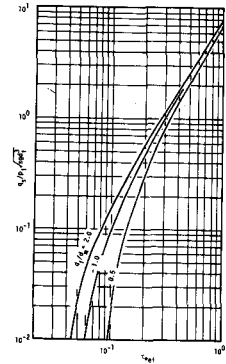


図-3 混合砂の流砂量

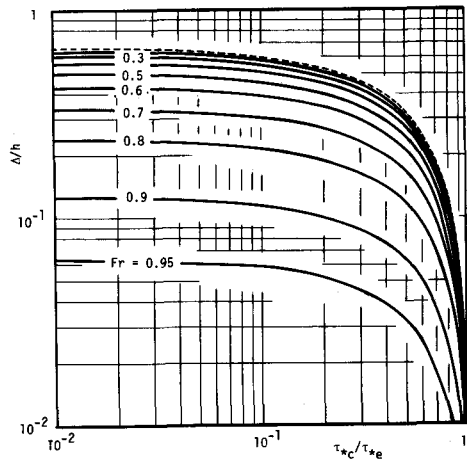


図-4 dunesの波高と掃流力との関係

3. 実験的考察

実験装置と方法 式(12)および(13)を検証することと、均一砂河床と混合砂河床とでのdunesの波高および抵抗特性の相違を明らかにするために実験を行なった。用いた実験水路は図-5に示すように上流端に引き上げ式給砂装置を有する全長13m、幅30cm、高さ20cmおよび全長20m、幅50cm、高さ50cmの長方形断面の二本

の水路であり、河床高の縦断形状は水路上を一定速度で自走する台車に載った電気抵抗型測深器によって計測記録される。幅 30 cm の水路での実験には表 1 に示すような砂を用いたが、均一砂に対する実験は平均粒径が 0.6 mm のほぼ均一砂(A)を用いて表 2 の Run 1 ~ Run 8 に示すような条件で行ない、混合砂の効果に関する実験では表 2 の Run 9 ~ Run 16 に示すように砂(A)に少量の砂(B),(C),(D)および砂(E)を加えたものを用いた。実験方法は、水路全体に 5 cm 厚の砂層を水平に作り、給砂量一定(給砂リフトの上昇速度一定)、流量一定の条件で通水し 1 時間毎に河床勾配、水面勾配および流出砂量を測定する。河床勾配と水面勾配、給砂量と流出砂量のどちらもが等しくなった状態を定常状態とみなし、この状態が得られた後に水路中央および左右両岸からそれぞれ 5 cm ずつの場所の計 3 測線に沿って河床高の縦断形状を測定した。幅 50 cm の水路での実験も同様であるが用いた砂の特性は表 1 に示している。

河床波高 実験結果と実験条件は表 2 に示されている。河床波の波高と波長は図 6 の河床波形状の一例にみられるように水路中央部と岸近くとではかなり異なっており水路中央部での波高は岸近くと比べてかなり小さくなっていることから水路幅の影響で交互砂州の特性が少なからず入っていることが認められる。このように必ずしも二次元の河床波が発達しているというわけではないが、巨視的に平均値を求めるという意味で 3 測線全てについて zero-up cross 法によって求めた波高および波長を平均して平均波高 Δ および平均波長 λ とした。また、水路幅に比して水深が比較的大きいので、摩擦速度 u_{*} を求める際の側壁の影響は Einstein の方法によって除去した。全ての Run について、 $u_{*}d_{50}/\nu$ が 20 以上であり、しかもフルード数が 0.3 ~ 0.6 の範囲にあるのでこれらの河床波は dunes である。いま、これらの dunes の平均波高 Δ と平均水深 h_0 との比の実測値と式(12)による計算値とを比較したものが、図 7 に示されている。

Shinohara-Tsubaki¹⁾ および田中¹²⁾の実験データの中で dunes に対するもののみを集めて同時にプロットしているが、これらのデータは側壁の影響の補正とか平均波高をどのように定義したのかが不明ではある。田中のデータは測定値が計算値に比して全般に大きめになっているが、Shinohara-Tsubaki および著者のデータ

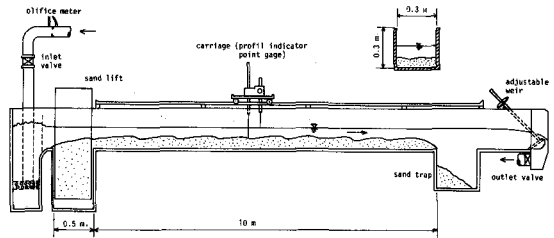


図 5 実験水路

表 1 実験砂の粒径特性

sand	unit: mm		
	maximum	minimum	mean
A	0.80	0.42	0.61
B	1.19	1.00	1.10
C	2.00	1.68	1.84
D	3.36	2.83	3.10
E	0.82	0.40	0.61
F	1.19	0.59	0.96

表 2 実験条件および結果

Run	q (cm ² /s)	q_s (cm ² /s)	u (cm/s)	h_s (cm)	h_0 (cm)	i ($\times 10^{-3}$)	Fr	u_{*d}/ν	τ_{*m}	Δ (cm)	sand
1	285	0.0413	37.6	7.59	6.83	2.44	0.436	24	0.0832	1.71	A
2		0.0330	36.9	7.75	6.92	2.17	0.424	23	0.0768	1.52	
3		0.0248	37.0	7.71	6.63	1.67	0.426	20	0.0656	1.63	
4		0.0165	36.9	7.75	6.45	1.38	0.423	18	0.0593	1.20	
5	204	0.0413	37.6	5.40	4.94	3.00	0.520	23	0.0639	1.22	
6	240	0.0330	38.0	6.15	5.50	2.49	0.502	22	0.0790	1.15	
7		0.0248	38.3	6.25	5.52	2.17	0.490	21	0.0725	1.21	
8	285	0.0165	36.5	6.56	5.71	1.78	0.456	19	0.0634	0.87	
9		0.0413	42.0	6.78	5.82	2.09	0.516	23	0.1115	1.04	A(95%) C(5%)
10		0.0330	36.6	7.78	6.80	1.49	0.420	20	0.0928	1.12	
11		0.0248	35.2	8.10	6.82	1.33	0.395	20	0.0608	1.19	
12		0.0413	40.1	7.10	5.99	1.23	0.481	23	0.0701	0.86	A(90%) C(10%)
13		0.0330	39.3	7.25	6.19	1.77	0.466	26	0.0639	0.84	A(85%) C(15%)
14		0.0248	42.5	6.70	5.54	1.75	0.525	19	0.0787	1.02	A(55%) B(5%)
15		0.0413	46.3	6.15	4.94	1.63	0.599	22	0.0757	0.72	A(55%) D(5%)
16	900	0.0250	49.0	18.50	15.06	1.06	0.360	24	0.0946	5.00	E
17			49.0	18.50	15.18	1.10	0.360	39	0.0637	3.00	F
18			47.0	19.00	15.85	1.10	0.340	36	0.0670	4.00	E(20%) F(80%)
19			45.0	20.00	18.87	1.00	0.320	30	0.0661	5.50	E(70%) F(30%)

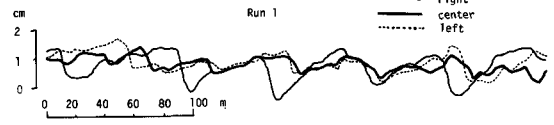


図 6 dunes 河床の測定例

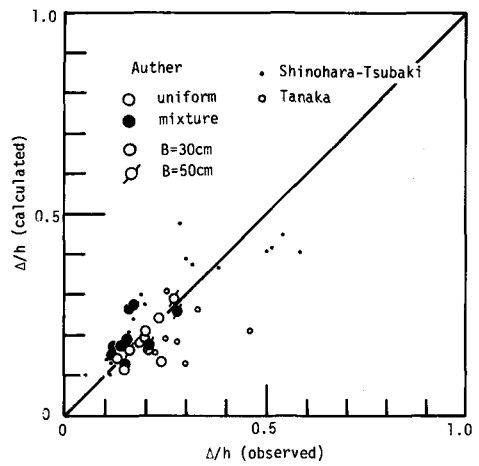


図 7 dunes 波高の実測値と計算値との比較

については実測値と計算値とは比較的良好に一致している。著者のデータで●印が混合砂についてのものであるが、混合砂についても式(12)で平均河床波高がほぼ推定できると考えられる。しかし、式(12)を導く過程において用いた式(8)の精度を考えると図-7でのデータのある程度のバラツキは致し方ない。

混合砂の効果 式(12)は均一砂であっても混合砂河床であっても実測した(すなわち与えられた)河床勾配 i_0 、平均水深 h_0 を用いて計算できるのではあるが、われわれが河床波高に及ぼす混合砂の効果というときには実は水理条件と平均砂粒径がほぼ等しいが粒径分布が異なるとき河床波高がどうなるかということの意味しているはずであり、式(12)はそのような意味での混合砂の効果は何ら示していない。いま、均一砂の定常状態の河床の供給砂に粒径の大きな砂を、流量および給砂量を一定にしたまま、わずかに投入すると、図-8にみられるように河床波高が減少すなわち抵抗が減少しエネルギー勾配が減少する。水深もわずかながら減少していることが認められる。ただし、図の横軸 p は粒径の

大きい砂の河床に占める割合であって、縦軸の添字 U は大きな砂の投入前のもの添字 M は投入後のものを表す。この例では粗い砂をわずか5%程度投入しただけで40%もの波高の減衰があり混合砂の河床波高に及ぼす影響は著しいことがわかる。この混合砂の効果を評価するために、いま、粗砂投入前に図-9の点 P_1 の場所がちょうど限界掃流力を受けていたとし、粗砂投入後は粗砂の限界掃流力が点 P_2 のところで生じているとする。

P_1 あるいは P_2 より高いところの河床は限界掃流力より大きい掃流力を受けておりしかも峰の付近では掃流力が大きく混合効果がほとんど現われないから峰のところでの水深は便宜的に不変であると仮定する。 P_1 あるいは P_2 の位置は、河床波の峰から剥離した流れがreattachする点よりわずかに下流であると考えられるが、reattachmentの位置は、峰の位置から河床波高の k ($=5 \sim 7$)倍のところであるとされている。¹³⁾ 図-9にみられるように、均一砂河床に対して添字を1、粗砂投入後の混合砂河床に対して添字を2とし、平均水深を h 、限界掃流力を受けている河床点 P での水深を h_p 、波高を Δ 、波長を Λ 、とすると幾何学的関係より、

$$h_{p1} = (h_1 + \frac{\Delta_1}{2}) - (\frac{\Delta_1}{\Lambda_1}) k \Delta_1, \quad h_{p2} = (h_2 + \frac{\Delta_2}{2}) - (\frac{\Delta_2}{\Lambda_2}) k \Delta_2, \quad h_2 = h_1 - \frac{(\Delta_1 - \Delta_2)}{2} \quad (14)$$

であり、この式と連続式 $h_{p1} u_1 = h_{p2} u_2$ を用いると流速係数 φ を介して、粗砂の限界摩擦速度 u_{*c2} と均一砂のそれ u_{*c1} との比 $u_{*c2}/u_{*c1} \equiv m$ は次式のように表わされる。

$$\frac{u_{*c2}}{u_{*c1}} (\equiv m) = \left(\frac{\varphi_1 u_2}{\varphi_2 u_1} \right) = \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) \frac{h_1 + (\Delta_1/2) - (\Delta_1/\Lambda_1) k \Delta_1}{h_1 - (\Delta_1/2) + \Delta_2 - (\Delta_2/\Lambda_2) k \Delta_2} \quad (15)$$

いま、現象を巨視的に把えて、 $\varphi_1 \approx \varphi_2$ 、 $h_1/\Lambda_1 \approx h_1/\Lambda_2 \approx 1/5$ ¹⁴⁾ とし、 k については上に述べたように $k \approx 5$ とすると、式(15)より粗砂投入後と前の河床波高の比 Δ_2/Δ_1 は次式で表わされる。

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{1 - \sqrt{5 - (4/m)(1 + \Delta_1/h_1 - (\Delta_1/h_1)^2)}}{2(\Delta_1/h_1)} \quad (16)$$

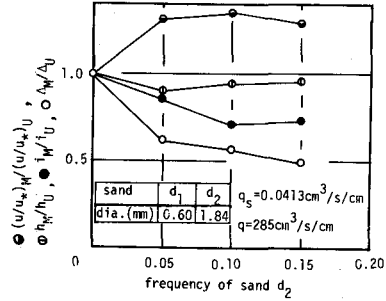


図-8 水理諸量に及ぼす混合砂の効果

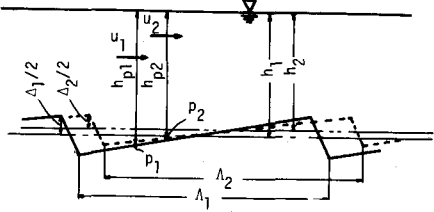


図-9 記号図

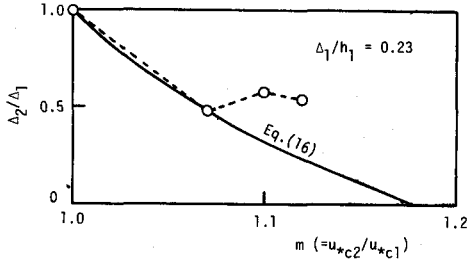


図-10 均一砂の場合に対する混合砂でのdunes波高の変化

図-10の実線は表-2のRun 1を均一砂河床での実験として得られた $d_1/h_b = 0.23$ に対する式(8)の計算曲線であり、○印はRun 1と同一水理条件で粗砂を加えた場合の実測値である。 $m(=u_{*c2}/u_{*c1})$ の計算で u_{*c2} は混合砂河床における粗砂の限界掃流力であるから式(9)で示されるEgiazaroffの式を用いて計算したが、上記のモデルでの仮定より m の値は峰の位置でも投入粗砂が移動しないという条件で上限が押えられる。図-10より、 m が比較的大きく、 d_2/d_1 が極端に小さくなるような場合には、すでに d_1 が形成される流れの条件と d_2 の形成される流れの条件が大きく異なっており上記のような解析では現象を十分には説明しえないが、 m が比較的小さい場合は d_2 の減少することをおおむね説明できるものと考えられる。

図-11は抵抗特性に対する混合砂の効果を見たものであり、横軸に無次元有効掃流力、縦軸に平均流速と摩擦速度の比 u/u_* ($=\sqrt{8/f}$, f : 抵抗係数)をとり、混合砂の場合には図中に最大粒径と平均粒径の比も示している。 u/u_* と τ_{*e} との関係は、本実験の範囲では均一砂に対しては比較的近い値を示しているが、混合砂に対してはパラツキが大きく粗砂を投入した本実験の場合は全て抵抗が小さくなっていることが明らかに認められる。このことは、上に述べた河床波高への粗砂が及ぼす減少効果から予想されることであるが、混合砂の場合抵抗特性は砂の特性に関する量として必ずしも平均粒径のみを用いて表わされるものではないことを示しており、広範囲の粒度分布を持つ実河川に対しては、混合効果特に有効な最大粒径砂の効果について注意を払う必要がある。

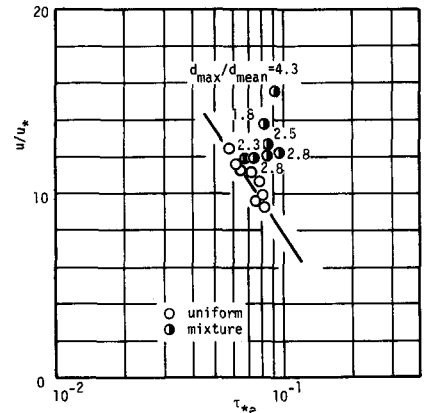


図-11 u/u_* と τ_{*e} との関係

4. あとがき

dunesが発達した河床の抵抗特性を明らかにするための基礎資料を得るという目的でdunesの波高と水理量との関係について混合砂河床および均一砂河床の両方に適用できる関係式を導びき実験的に検証を行ないdunesの波高に及ぼす混合砂の効果についてもある程度明らかにすることができたがまだ不十分であり、今後混合砂の効果も含めた抵抗と波高、水理量との関係をさらに明らかにする必要があると考える。

参考文献

- 1) Shinohara, K., Tsubaki, T.: On the characteristics of sand waves formed upon the beds of the open channels and rivers, Report of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ., Vol. VII, No. 25, 1959.
- 2) Yalin, M. S.: Geometrical properties of sand waves. Proc. ASCE, Vol. 90, No. HY 5, 1964.
- 3) Nordin, C. F., Algert, J. A.: Geometrical properties of sand waves (Yalin, M. S.), A discussion, Proc. ASCE Vol. 91, No. HY 5, 1965.
- 4) 水理委員会 (移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会): 移動床流れにおける河床形態と粗度, 土木学会論文報告集 第210号, 1973.
- 5) 田中祐一郎: Sand wavesに関する研究—Sand wavesの波高に関する一考察—, 京都大学防災研究所年報, 12号B, 1969.
- 6) 芦田和男, 田中祐一郎: 砂漣に関する実験的研究(3), 京都大学防災研究所年報, 10号B, 1967.
- 7) de Vries, M.: Consideration about non-steady bed-load transport in open channels, Proc. IAHR, 1965.
- 8) 平野宗夫: Armouringをともなう河床低下について, 土木学会論文報告集, 第195号, 1971.
- 9) 道上正規: 流砂と河床変動に関する基礎的研究, 京都大学博士論文, 1972.
- 10) Egiazaroff, I. V.: Calculation of nonuniform sediment concentration, Proc. ASCE, HY 4, 1965.
- 11) Meyer-Peter, E., Müller, R.: Formulas for bed-load transport, Proc. IAHR, 1947.
- 12) 田中祐一郎: 移動床開水路の河床形態と抵抗則に関する研究, 京都大学博士論文, 1972.
- 13) Raudkiv, A. J.: Study of sediment ripple formation, Proc. ASCE, Vol. 89, HY 6, Part 1, 1963.
- 14) Yalin, M. S.: Mechanics of Sediment Transport, 2nd Edition, Pergamon Press, 1977.