

浮遊砂を含む流れの二相流的取扱いに基づく流速分布と濃度分布

Velocity and concentration profiles of the flow with suspended sediment
which is dealt with as two phase flow

東京工業大学工学部 正員○福嶋祐介

東京工業大学工学部 正員 福岡捷二

1. はじめに

浮遊砂を含む流れの問題は与えられた水理条件、および幾何学的条件に対して流速分布、濃度分布をどのように予測するかにある。土砂流の研究は流れをどのように扱うかによって2つの立場に大別される。すなわち、浮遊砂流を単相流として取扱うか、二相流として取扱うかである。前者では、固体粒子浮遊による密度分布、乱流構造の変化を考慮し、後者では、固体粒子で構成される固相と液相との相互作用を考慮することが多い。浮遊砂に関する従来の研究では、流速分布、或は濃度分布の一方が既知であるとし他方を求めるものが多く、流速分布と濃度分布を同時に求めようとするものは少ない。しかし、浮遊砂を含む流れでは、流速分布と濃度分布は密接に関係しており、両者を統一して説明する必要がある。

本研究は、浮遊砂を含む流れを固液二相流として取扱い、流速分布、濃度分布式を導き、得られた理論式を流速分布、濃度分布の実測値と比較し、式の妥当性について検討する。

2. 固液二相流の基礎方程式

浮遊粒子は十分小さく固相の流れは連続体として記述できるものとする。すなわち、図-1のように固相の流速 v_s は固体粒子に比べれば十分大きい体積 δV に含まれる固体粒子の速度の平均値として定義する。同様に、液相の流速 v_w は δV 内での液体の流速の平均値として定義する。流れを混相とみなしたときの流速 v_m は次のように定義される。

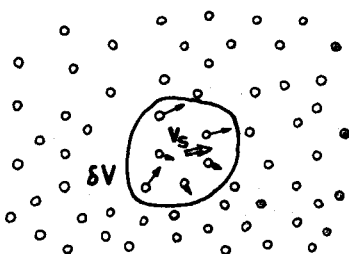


図-1 固相の流速

$$v_m = \frac{\rho_s c v_s + \rho_w (1-c) v_w}{\rho_s c + \rho_w (1-c)} \quad (1)$$

ここで、 ρ_s 、 ρ_w はそれぞれ、固体粒子と液体の密度、 c は固体粒子の体積濃度である。(1)式の分母は混相の密度 ρ_m である。

以上のように、各相の流速を定義すると、固相、液相について、質量保存則と運動量保存則は次のようにあらわされる。¹⁾²⁾

質量保存則；

$$\text{(固相)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_s c + \text{grad} (\rho_s c v_s) = 0 \quad (2)$$

$$\text{(液相)} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_w (1-c) + \text{grad} \rho_w (1-c) v_w = 0 \quad (3)$$

運動量保存則；

$$\text{(固相)} \quad \rho_s c \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \cdot \text{grad} v_s \right) = (\rho_s - \rho_w) c g + R + c \text{div} \sigma_s \quad (4)$$

$$\text{(液相)} \quad \rho_w (1-c) \left(\frac{\partial v_w}{\partial t} + v_w \cdot \text{grad} v_w \right) = \rho_w (1-c) g - R - \text{grad} P + (1-c) \text{div} \sigma_w \quad (5)$$

ここで、 g は重力加速度ベクトル、 σ_s は固相の粘性応力、 σ_w は液相の粘性応力、 P は液相の圧力である。また、(4)式、(5)式に含まれる R は、固体粒子に働く付加質量、粘性抗力等に帰因する固相と液相との相互作用による力を示す。(4)式において圧力項が含まれていないのは固体粒子相互の衝突による影響を無視したためである。

図-2のような二次元開水路流れを考える。座標系 (x, y) に対する固相と液相の流速成分を $(u_s, v_s), (u_w, v_w)$ であらわす。流れは十分乱流であり、定常 $(\partial/\partial t=0)$ 、等流 $(\partial/\partial x=0)$ とする。このとき、水面での境界条件を考慮すると質量保存則(2)式、(3)式から次の連続の関係が導かれる。

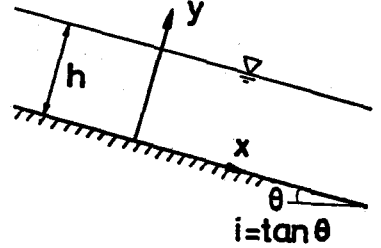


図-2 座標系及び記号

$$(\text{固相}) \quad \overline{c v_s} + \overline{c' v_s'} = 0 \quad (6)$$

$$(\text{液相}) \quad (1-\overline{c}) v_w + \overline{c' v_w'} = 0 \quad (7)$$

ここで、記号“'”は変動量を，“-”は平均操作することを示す。(4)式、(5)式において、粘性項、及び乱れによる高次項を無視すると、水路床勾配 i が十分小さい場合の固相、液相に対する運動方程式として次式が導かれる。

$$(\text{固相}) \quad -\frac{d}{dy} (\rho_s \overline{c u_s' v_s'}) = -(\rho_s - \rho_w) \overline{c} g i - \overline{R_x} \quad (x \text{ 方向}) \quad (8)$$

$$(\rho_s - \rho_w) \overline{c} g - \overline{R_y} = 0 \quad (y \text{ 方向}) \quad (9)$$

$$(\text{液相}) \quad -\frac{d}{dy} \rho_w (1-\overline{c}) \overline{u_w' v_w'} = -\rho_w g i + \overline{R_x} \quad (x \text{ 方向}) \quad (10)$$

$$\rho_w g + \frac{d\overline{P}}{dy} + \overline{R_y} = 0 \quad (y \text{ 方向}) \quad (11)$$

ここで、 $\overline{R_x}$ 、 $\overline{R_y}$ は固相と液相の相互作用による力の x 成分、 y 成分である。 y 方向の運動方程式(9)式、(11)式から $\overline{R_y}$ を消去し、 y について積分すると固体粒子浮遊による密度増加を考慮した圧力分布が得られる。すなわち、

$$\overline{P} = - \int_y^h \rho_w (1+r_s \overline{c}) g dy \quad (12)$$

ここで、 r_s は固体粒子の水中比重 $(=(\rho_s - \rho_w)/\rho_w)$ である。

3. 固液二相流の流速分布、濃度分布

2. で導かれた定常、等流に対する固液二相流の基礎方程式から、混相の流速 $\overline{u_m}$ 、浮遊砂の濃度 $\overline{c}$ を求める。まず、液相の Reynolds 応力は粒子浮遊によっては変化せず、直線分布、

$$-\rho_w \overline{u_w' v_w'} = \rho_w u_*^2 (1-\eta) \quad \text{ここで、} \eta = y/h, \quad u_* = \sqrt{g i h} \quad (13)$$

をなすと仮定する。次に、固相と液相の x 方向の運動方程式(8)式、(10)式、及び(13)式から $\overline{R_x}$ 、 $\overline{u_w' v_w'}$ を消去し、積分することにより、水面 $\eta = 1$ での境界条件、 $-\rho_s \overline{u_s' v_s'} = 0$ を満たす固相の Reynolds 応力の

分布を求めると,

$$-\rho_s \overline{u'_s v'_s} = \rho_w u_*^2 (1-\eta) + (\rho_s - \rho_w) u_*^2 \frac{1}{c} \int_{\eta}^1 \bar{c} d\eta \quad (14)$$

を得る。さらに、固相に対して渦動粘性係数 k_m を導入し、混合距離 l の分布を次のように仮定する。

$$-\rho_s \overline{u'_s v'_s} = \rho_w k_m \frac{d\bar{u}_s}{dy} \quad (15)$$

$$k_m = l^2 \frac{d\bar{u}_s}{dy}, \quad l = \kappa_s y \sqrt{1-\eta} \quad (16)$$

混合距離に含まれる係数 κ_s の値は、浮遊砂濃度 $\bar{c}$ 、粒子の沈降速度 w_0 、摩擦速度 u_* 等によって変化すると考えられる。この点に関しては、後に考察を加える。(14)式、(15)式、(16)式を考慮すると固相の渦動粘性係数 k_m は、

$$k_m = \kappa_s u_* y \sqrt{1-\eta} \left\{ 1-\eta + \frac{r_s}{c} \int_{\eta}^1 \bar{c} d\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

となる。(14)式、(15)式、(17)式を整理すると固相の流速分布をあらわす式として次式を得る。

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{u_s}{u_*} \right) = \frac{1}{\kappa_s \eta \sqrt{1-\eta}} \left\{ 1-\eta + \frac{r_s}{c} \int_{\eta}^1 \bar{c} d\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

上式は、右辺に浮遊砂濃度 $\bar{c}$ を含み、固相の流速 $\bar{u}_s$ と濃度 $\bar{c}$ とは同時に求める必要があることを示す。(18)式は、浮遊砂の影響の小さい場合、すなわち、 $\frac{1}{c} \int_{\eta}^1 \bar{c} d\eta \rightarrow 0$ の極限では容易に積分され、対数則を与える。

次に、浮遊砂の濃度分布を固相に対する連続式(6)から導く。まず、固相の y 方向の平均流速 $\bar{u}_s$ を静水中での固体粒子の沈降速度 w_0 と等しくしておく。このとき、固相における連続式(6)は、

$$\overline{c' v'_s} = \bar{c} w_0 \quad (19)$$

となる。上式に含まれる濃度速度相関 $\overline{c' v'_s}$ は渦拡散係数 k_s を用いて次のようにあらわす。

$$\overline{c' v'_s} = -k_s \frac{d\bar{c}}{dy} \quad (20)$$

渦拡散係数 k_s は渦動粘性係数 k_m に比例すると考え、 $k_s = \beta k_m$ とすれば、(17)式、(19)式、(20)式から浮遊砂の濃度分布に関する式を導くことができる。

$$\frac{1}{\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{d\eta} = -\frac{w_0}{\beta \kappa_s u_*} \left/ \left\{ \eta \sqrt{1-\eta} \left(1-\eta + \frac{r_s}{c} \int_{\eta}^1 \bar{c} d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right. \quad (21)$$

(21)式は、パラメーターとして無次元沈降速度 w_0/u_* 、 $\beta \kappa_s (= \kappa'_s)$ 、 r_s を含み、これらの値によって、濃度分布形が変化する。(21)式を解くためには、濃度の基準高さ $\eta = \eta_a$ での境界条件 $\bar{c}/c_a = 1$ 、と水面での境界条件を満たす必要がある。但し、 c_a は $\eta = \eta_a$ での基準濃度である。このため、基準高さにおける $\int_{\eta}^1 \bar{c}/c_a d\eta$ の値を適当に仮定し、逐次近似によって濃度分布を求める。

このようにして、(21)により濃度分布が求められると、この濃度分布を(18)式に用いることにより、同時

に固相の流速分布が求められる。

図-3は、 $\kappa'_s = 0.4$ 、 $\eta_a = 0.05$ として計算した濃度分布を示す。図中の破線は、Rouseの式、

$$\frac{\bar{c}}{c_a} = \left(\frac{h-y}{y} \frac{y_a}{h-y_a} \right)^Z \quad Z = \frac{w_0}{\kappa u_*} \quad (22)$$

において、Kármán 定数 κ を同じく 0.4 としたものである。Rouse の式によって濃度分布をあらわす場合には、実測の流速分布による κ から Z を求めるのが普通である。従って、ここで、同一の κ 及び κ'_s によって濃度分布形を比較するのは適当ではないが定性的な検討は可能であろう。実際の濃度分布によって Rouse の式 (22) の指数 Z_1 を求め、流速分布による Z と比較すると、 w_0/u_* が大きくなるほど、 Z_1 は Z より小さい値となることが知られている³⁾。これは、Rouse の式は w_0/u_* の小さい範囲では実測値と良く一致するが、 w_0/u_* が大きくなるほど実測より小さな濃度を与えることを示す。(21)式による濃度分布は w_0/u_* の小さい範囲では Rouse 分布と同程度であるが、 w_0/u_* が大きくなると Rouse 分布より大きい濃度を与えることが示され、実測値の示す傾向と一致する。

図-4は、 $\kappa_s = 0.2$ 、0.4として得られた固相の流速分布を示す。いずれの κ_s においても w_0/u_* が小さいほど速度勾配が大きく、 $w_0/u_* > 1$ では流速分布にほとんど差がなくなり、対数則 ($w_0/u_* \rightarrow \infty$) と一致するようになる。

混相の流速 $\bar{u}_m$ は、固相の流速 $\bar{u}_s$ と液相の流速 $\bar{u}_w$ を知るにより (1) 式から求められる。Silin⁴⁾ は、管水路実験によって固相、液相の流速分布を測定している。その結果、固相と液相の相対速度 $\bar{u}_w - \bar{u}_s$ は、断面内でいくらか変化するが、平均では静水中での粒子の沈降速度 w_0 にほぼ等しいことを示した。従って、ここでは、液相の流速 $\bar{u}_w$ は固相の流速 $\bar{u}_s$ と沈降速度 w_0 の和に等しいと仮定し、(1) 式により混相の流速 $\bar{u}_m$ を求める。すなわち、

$$\bar{u}_w = \bar{u}_s + w_0 \quad (23)$$

$$\bar{u}_m = \frac{\rho_s \bar{c} \bar{u}_s + \rho_w (1-\bar{c}) \bar{u}_w}{\rho_s \bar{c} + \rho_w (1-\bar{c})} \quad (24)$$

である。

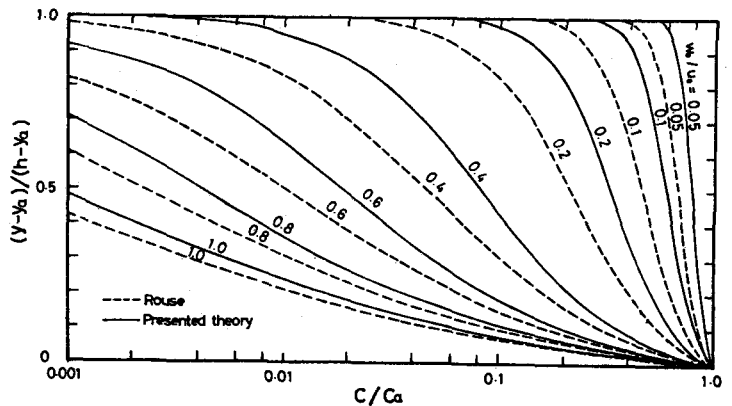


図-3 (21)式による濃度分布 ($\kappa'_s = 0.4$)

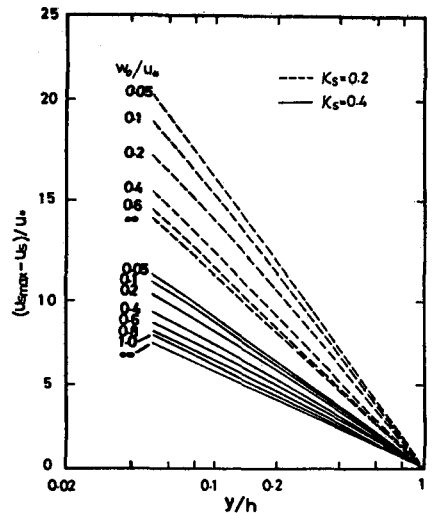


図-4 固相の流速分布

Run No.	w_0/u_*	Ca(%)	κ_s	κ'_s
S-1	1.30	1.81	0.36	0.54
S-6	1.05	0.83	0.33	0.38
S-8	1.08	2.64	0.28	0.4
S-10	0.984	8.68	0.25	0.37
S-16	0.334	20.8	0.22	0.3

表-1 計算条件

4. 実測値との比較及び考察

本理論の妥当性を検討するため、濃度分布 (21) 式、流速分布 (18) 式と実測値との比較を行なう。比較に用いたのは Einstein & Chien⁵⁾ の実験値である。表-1 は計算条件を示す。(18) 式、(21) 式には、未定係数 κ_s 及び β が含まれている。混合距離の係数 κ_s は浮遊砂濃度、粒子の無次元沈降速度等によって変化するが、渦拡散係数と渦粘性係数の比 β は、乱流構造の変化に依らず、一定と考えられる。従って、 β の値が w_0/u_* 、 c_a 、 κ_s 等の値によって変化せず、ほぼ一定ならば、(18) 式、(21) 式は、浮遊砂を含む流れの流速分布と濃度分布を矛盾なく説明できることになる。

以上のような観点から、ここでは、実測値から β を求め、その値について考察を行なう。このため、流速分布と濃度分布、それぞれについて理論値と実測値とが最も良く一致するように (18) 式の κ_s 、(21) 式の $\kappa'_s (= \beta \kappa_s)$ を定めた。図-5、図-6 は、得られた濃度分布と流速分布の理論値を実測値とともに示す。但し、(18) 式では、濃度の基準高さ以下での流速分布を計算することができないため、 $y/h = 0.05$ までの分布を示している。このようにして求められた κ_s 、 κ'_s は、それぞれ、広い範囲にわたっている。しかし、 κ_s と κ'_s から求めた β は、基準濃度 c_a 、無次元沈降速度 w_0/u_* によってはそれほど変化せず、1.2 ~ 1.5 の範囲にある。従って、 β の値としてこの範囲の値を選べば、(18) 式と (21) 式は、実測の流速分布と濃度分布とを同時に良く説明する。一般に、物質の拡散と運動量の拡散の比は 1.2 程度であり、本理論の β の値は、これとほぼ等しく妥当な値と考えられる。

しかし、この段階では、 κ_s または κ'_s がどのような値をとるかについては言及していない。従って、 β がほぼ一定値をとることが明らかになっても、 κ_s または κ'_s の算定法が確立しなければ、本手法の有効性の検討としては不十分である。

以下に κ_s の推定法について述べる。上述の固液二相流解析は、それぞれの相をオイラー的に取扱ったものである。しかし、 κ_s は粒子の混合のスケールを示す指標であるため、ラグランジュ的に考えることが必要である。著者らの 1 人⁶⁾ は、個々の

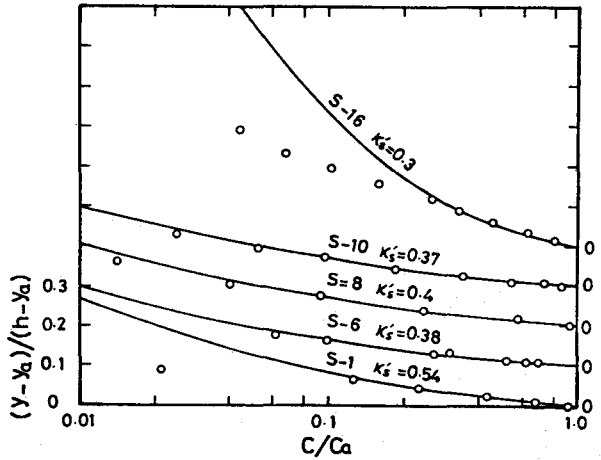


図-5 濃度分布 (21) 式

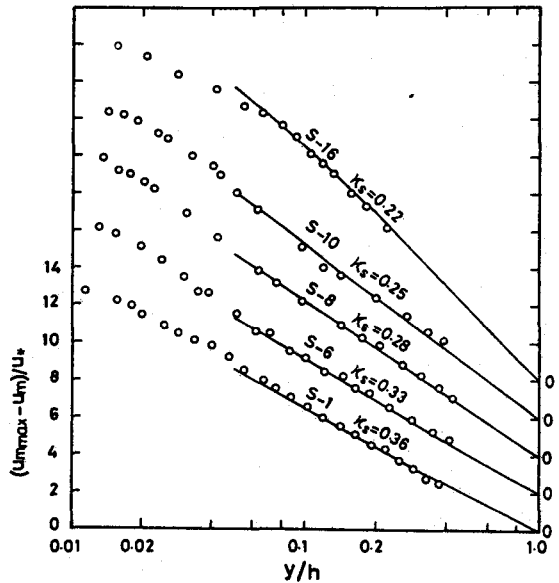


図-6 流速分布 (18) 式

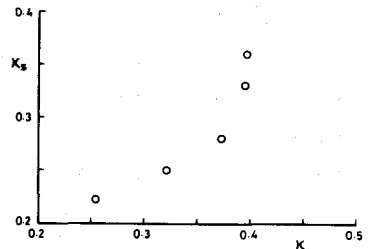


図-7 κ_s と Karman 定数⁶⁾

粒子の運動をラグランジュ的に解析し、混相流としてのKármán 定数 κ の予測式を提案している。すなわち乱流場を振動流、浮遊砂分布を格子モデルで表現し、固体粒子の運動を運動方程式で記述して、固体粒子と流体の相対運動を解析的に求めた。そして、土砂浮遊流の乱れエネルギー逸散が固体粒子と流体との相対速度差に起因する抵抗によって増加するという考え方に基づいて、土砂浮遊流の乱れエネルギー平衡式を定式化し、Kármán 定数 κ の予測式を示した。すなわち、

$$\frac{\kappa_0}{\kappa} = 1 + \frac{\kappa_0 \bar{D}}{\rho_w u_*^3 (\log \frac{\bar{D}}{a} - 1)} \quad (25)$$

である。ここで、 κ 、 κ_0 は、それぞれ、混相流と清水流のKármán 定数、 a は粘性底層厚である。 $\bar{D}$ は、流体と砂粒子の相対速度差により、単位体積、単位時間あたりに失なわれるエネルギーの断面平均値であり次式であらわされる。

$$\bar{D} = 3\pi\mu d \left(1 + \frac{1}{N}\right) \bar{Y}^2 \bar{C} \frac{\pi}{6} d^3 \quad (26)$$

ここで、 $N = \sqrt{\frac{8\nu}{d^2\omega}}$ 、 $Y = \frac{dR}{dt} - u_w$ 、 d = 砂粒子の直径、 ω は流れの角振動数、 R は粒子の位置、

$\bar{C}$ は断面平均濃度である。(25)式は、Kármán 定数 κ が固体粒子と流体、すなわち、固相と液相との相互作用によるエネルギー逸散によって清水流の κ_0 から変化することを表現したものである。液相と固相の流速の差は、たかだか固体粒子の沈降速度程度であるところから、混相の流速分布は、固相の流速分布に強く依存しており、固相の混合距離の係数 κ_s は、上記の方法で求めた κ で近似できると考えられる。図-7 は、このようにして決定したKármán 定数 κ と図-6 より求めた κ_s の比較を示す。これによると κ_s は、 κ に比べ若干小さい値をとるが、 κ とほぼ1対1に対応しており、(25)式によって κ_s の値を推定できる。

5. まとめ

浮遊砂を含む流れを固液二相流として取扱い、流速分布と濃度分布の理論式を導いた。得られた理論は、流速分布形、濃度分布形のいずれも仮定せずに、両者を同時に決定するものである。実測値との比較によって、理論式は浮遊砂流の流速分布と濃度分布を同時に矛盾なく説明できることが明らかにされ、土砂浮遊流を統一的に説明する一つの考え方を示した。

最後に、本研究は一部文部省科学研究費(総合研究(A)、代表 中央大学林泰三教授)の援助を受けた。ここに記して深甚の謝意を表する。

参考文献

- 1) Murray, J.D., "On the mathematics of fluidization Part 1. Fundamental equations and wave propagation", J. Fluid Mech., vol. 21, part 3, 1965
- 2) Vasiliev, O.F., "Problems of Two-Phase Flow Theory", 13th Congress of IAHR, 1969
- 3) Raudkivi, A.J., "LOOSE BOUNDARY HYDRAULICS", 2nd Edition, Pergamon Press, 1976
- 4) Silin, N.A., K. Vitoshkin, V.M. Karasik, V.F. Ocherenko, "Research of the solid liquid flows with high consistence", 13th Congress of IAHR, vol. 5-1, 1969
- 5) Einstein, H.A. and Chien, N., "Effects of Heavy Sediment Concentration near the Bed on Velocity and Sediment Distribution", Univ. of Calif., Inst. of Eng. Research, No. 8, 1955
- 6) 吉川秀夫, 福岡捷二, 石田貴, "土砂浮遊流における流体と砂粒子の相対運動のモデル化", 第20回水理講演会論文集, 1975
- 7) 福岡祐介, 福岡捷二, "固液二相流方程式による流速分布, 濃度分布", 第33回年講, 第2部, 1978