

凸型拡幅部を有する水路の流れ

Flow through convectly expanded region

東洋大学 工学部 正員 福井 吉孝

不規則な断面形状をもつ水路、例えば図1の様な凸型の拡巾域を有する水路に於いて、凸部に入りこんだ流れ物質が如何なる挙動をするかを解明する事は、表層の汚濁物の除去に対しては勿論の事、底層の流砂等処理の上に有効な示唆を与えてくれるものと思われる。

この種の研究は現在までに既に多くの研究者によって手掛けられているが、筆者は本報告に於いて、型を簡単化して等角写像法によって解析を試みた。複雑な現象を簡単化する事には多少無理がある様だが、現在迄に把握できた事項について、並行して行ってきた模型実験の結果とともに以下に述べる。

I. 理論

I・1 原式の数式化

Schwarz-Christoffell の方法によって表わすと、

$$Z = A \int \frac{1}{z^2 - m^2} \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{z^2 - a^2}} dz + c \quad \text{--- (1)}$$

次にz面に於いて、吸出し、吸込みを夫々、-m, +mにおくと複素ポテンシャルは

$$W = M \log (z + m / z - m) \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2)を使って流況を表現出来るのであろうが解析が困難である。拡幅域近傍を問題としているので、ここで次の様に型を簡単化させる。(図2)

I・2. 簡単化した型での解析

$$E(z) = A \int \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{z^2 - a^2}} dz + c \quad \text{--- (3)}$$

(3)に於いて $a = 1, b = 1/k$ とおくと

$$E(z) = \frac{A}{k} \int \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}} dz \quad \text{--- (4)}$$

となり、第2種楕円積分の型となる。常数AはE面とZ面との対応より

$$a = \frac{A}{k} E, \quad b = \frac{A}{k} (K' - E')$$

である。但し、Eは母数kの第2種完全楕円積分、K', E'はk'を母数とする第1, 2種完全楕円積分である。

結局、E面が、Z面の上半分に写像されたわけである。

1. E面とw面との対応

(4)式を解く為に、池田¹に従いw面を間に入れて考える。以下池田による方法を記す。

$Z = sn \ w$ とおけば

$$E(z, k) = \int_0^w dn^2 w \, dw = \frac{E}{K} w + Z(w), \quad Z \text{ は ツェータ 関数} \quad \text{--- (5)}$$

$w = u + iv$ であり、 $E(z) = R(E) + iI(E)$

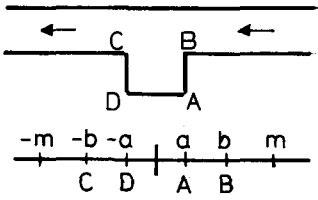


図1 (1) 式に対応

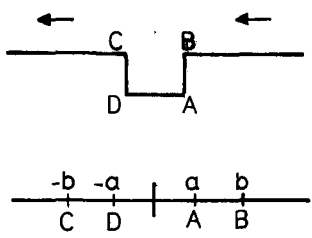


図2 (3) 式に対応

$$R(E) = \frac{a}{E} \left\{ \frac{E}{k} u + Z(u) + \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \right\} \quad (6)$$

$$I(E) = \frac{a}{E} \left\{ v - E(v') + \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn}^2 v}{\operatorname{cn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} \right\} \quad (7)$$

2. w面とz面との対応

次にw面とz面との関係を定めれば、Eとzの関係が表わせられる。

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k^2 z^2}} \quad , \quad \operatorname{sn}(wk) = z \quad (8)$$

しかるに、

$$\operatorname{sn}(u+iv, k) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v' + i \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v' \operatorname{cn} v'}{\operatorname{cn}^2 v' + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v'} \quad (9)$$

よって

$$x = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v'}{\operatorname{cn}^2 v' + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v'} \quad , \quad y = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v' \operatorname{cn} v'}{\operatorname{cn}^2 v' + k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v'} \quad (10)$$

w面を介在させる事によってE面とz面とが連結されたわけである。

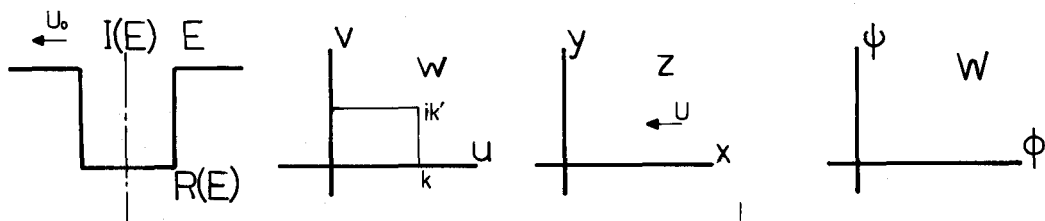


図 3. 使用した面

3. 流線の作図

流線は $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ を与えれば、 $R(E), I(E)$ が求まる

3.1 $W = UZ$ の時

kを変化させた場合(即ちb/aの値を変える)の数値計算の結果が図4である。尚、ここでUとU₀との間には、

$$\frac{dW}{dE} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{dE} \quad \text{より} \quad U = \frac{U_0}{A} \quad \text{の関係がある。}$$

3.2 循環を考慮した時

図4を見ても判る様に凸域内の流れを表わすのに不都合である。そこで、凸域内に循環を考えると、

$$W = Uz + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{z + i\beta - \alpha}{z - i\beta - \alpha} \quad (11)$$

$$\phi = Uy + \frac{\Gamma}{4\pi} \log \left\{ \frac{(x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2}{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} \right\} \quad (12)$$

$$\phi = Ux - \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\beta x}{(x-\alpha)^2 + y^2 - \beta^2} \quad (13)$$

但し、 α, β は循環の中心のz面上の座標とした。

Γ の値はd' (即ちz面の $x = 1/k$) に stagnation point をおくと次の式より決定される。

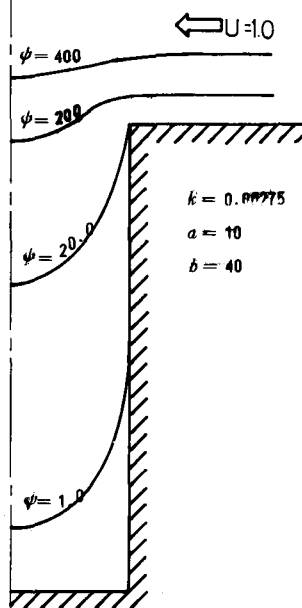


図 4-3 3-1による流線

$$\frac{dW}{dz} = -U + \frac{\Gamma\beta}{\pi} \cdot \frac{1}{(z-\beta)^2 + \beta^2}$$

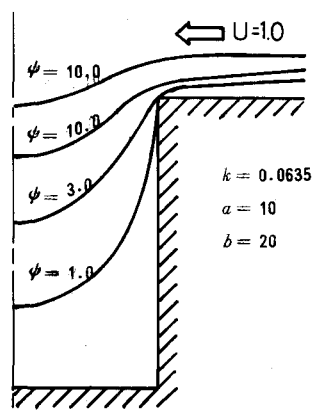
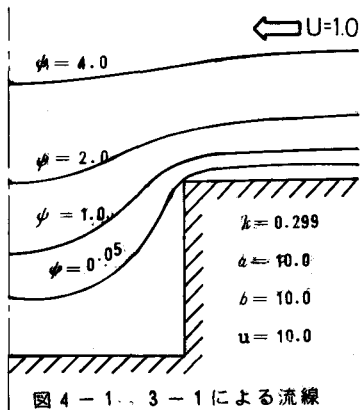
$$= 0$$

故に、

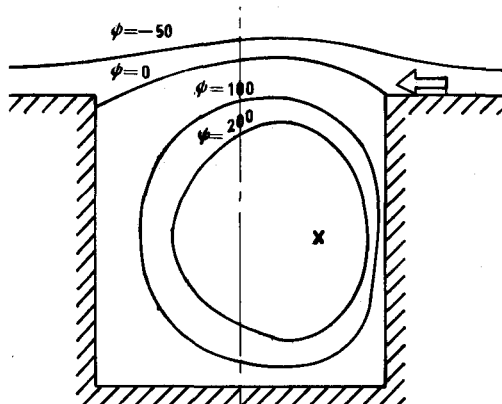
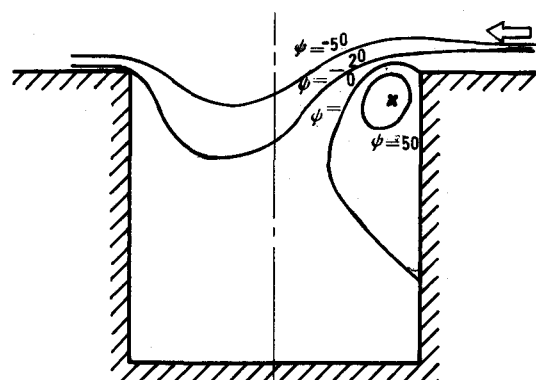
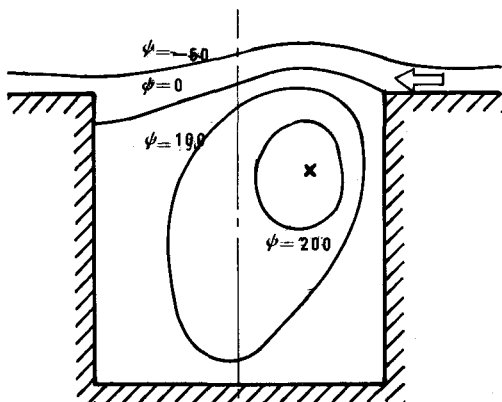
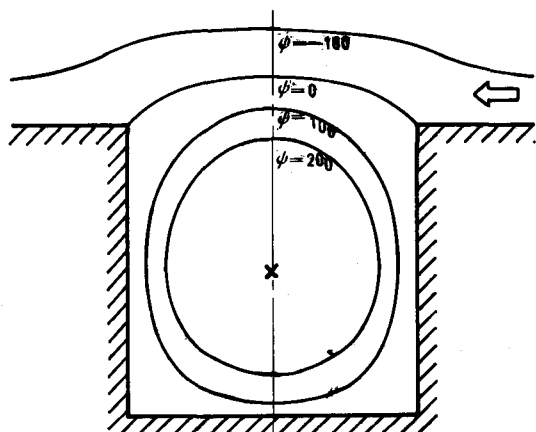
$$\Gamma = \frac{U\pi}{\beta} \cdot \frac{(1-\alpha k)^2 + k^2 \beta^2}{k^2} \quad (14)$$

である。

図5が各kに対する数値計算の結果である。図中×点が循環の中心を示し、各ケースとも適当に中心を動かしてみた。



3-1 による流線



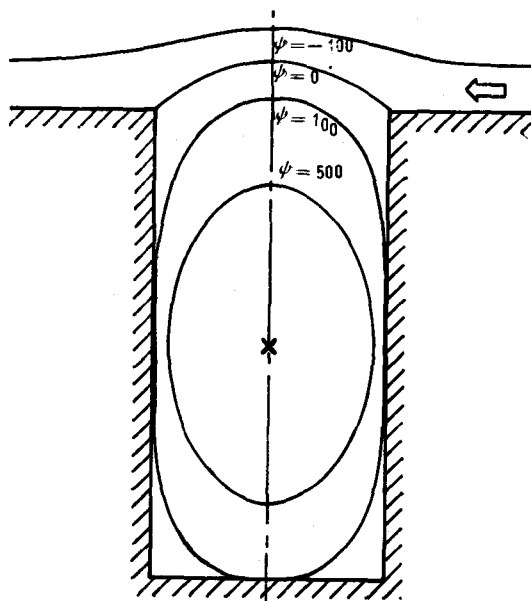


图 5-C-1 $U = 0.40$

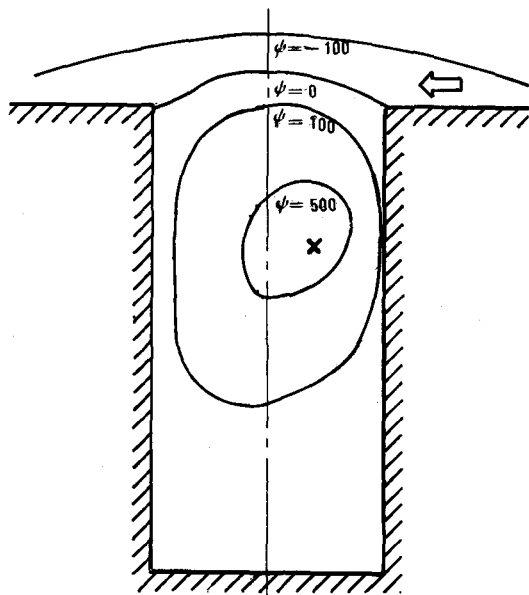


图 5-C-2 $U = 0.40$

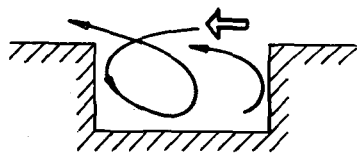
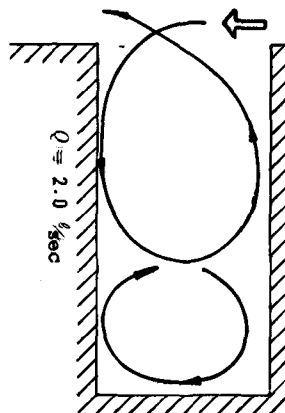


图 6-B-1

表面流線

$Q = 2.0 \text{ l/sec}$



6-C-1 表面流線

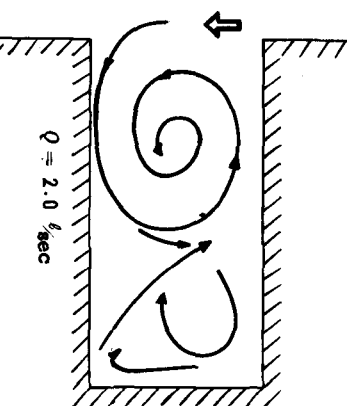


图 6-C-2 底流線



图 6-B-2

底流線

$Q = 2.0 \text{ l/sec}$

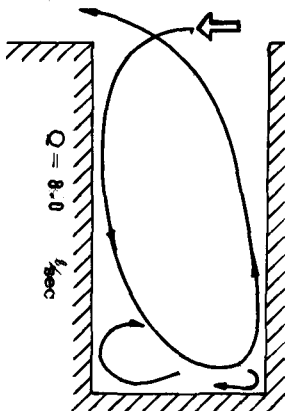


图 6-C-3 表面流線

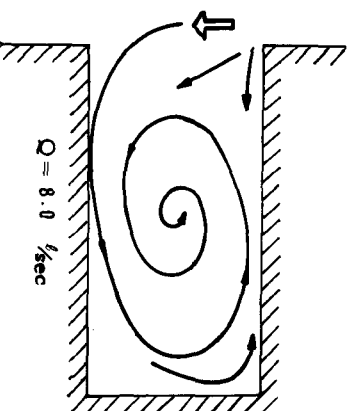


图 6-C-4 底流線

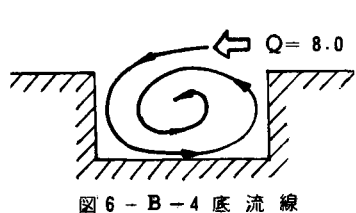


図 6-B-4 底 流 線

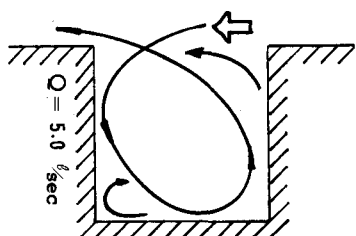


図 6-A-1. 表面 流 線

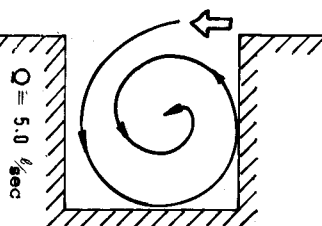


図 6-A-2. 底 流 線

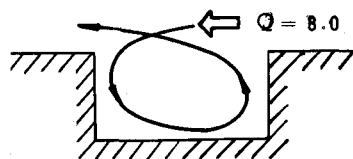


図 6-B-3 表面 流 線

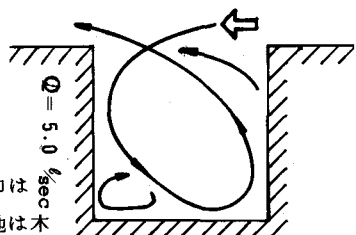


図 6-A-3. 表面 流 線

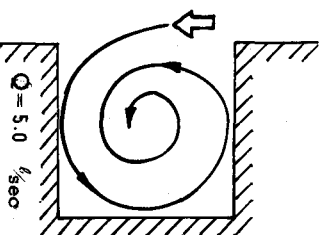


図 6-A-4 底 流 線

II 実 験

中程に $2a \times b$ の拡巾部を有し巾は 20cm で、凸部はアクリル製、その他は木製の水路を使用して実験を行っている。図 6-A-3. 表面 流 線

尚、勾配は $1/1000$ である。

実験は

- ① 水位、流速の測定
- ② 糸による表底層流線の測定、併せて、表面はアルミ粉末、底層はカマンガン酸カリによって状況を観測。
- ③ パンチくずによる、凸域への入りこみ易さ、難さ、及び入ってから挙動の観測。
- ④ 砂、アンスラサイト、石炭粉を上流より 10Kg 投下、凸域内での推積状況の観測。

の手順で行っている。

b/a は 1.0 、 2.0 、 4.0 の三種、即ち $10\text{cm}/10\text{cm}$ 、 $20/10$ 、 $40/10$ であり、流量は 2.0l/s (石炭粉投入)、 5.0l/s (アンスラサイト)、 8.0l/s (砂) である。

1. 実験結果

。 流 線

表層と底層はかなり違っており、 b/a の値によってもかわることは図 6 からよみとれる。

- ① $2/1$ では凸部の中央に中心をもつ環流。
- ② $4/1$ では流量増加につれて楕円軌道の原点は凸部奥へと移る。
- ③ $1/1$ では流量増加につれて流下方向の軸が長くなっていく。

といった特徴をもつ事が見出された。図 7 は表底の流線の比較図であるが違いが判る。図 8 に示した様ならせん状に底からまき上る流れがある様だ。

。 表層物質の動き

図 6 で代表的な流れの様子を示したが、実際はより複雑である。パンチくずを流した結果でも、

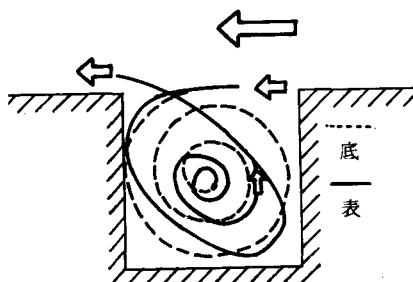


図 7 表底層流線の比較

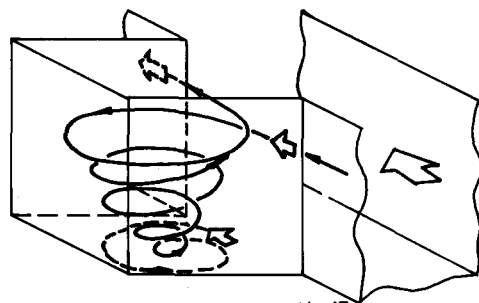


図 8. 凸 域 内 の 流 況



図 9 - 2

砂の推積状況 (×印は峰を示す。)

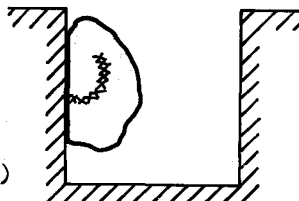


図 9 - 1

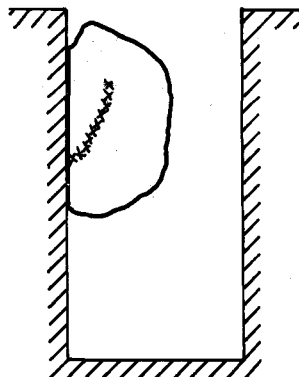


図 9 - 3

① 凸部への流入は上流側壁に沿って流れてきた極く一部のもの

だけである。1/1 に於いてが入り易く出易い。又、流速は遅い方が入りやすい傾向がうかがえた。

② パンチくずの凸域内での挙動は

a) 循環して (例えば 2 ~ 3 週) して出て行く。

b) 循環から隅のうずへ移り、その後循環流へもどり出て行く。

c) 循環しながら中央へきて停溜してその後再び循環流へもどり出て行く。

の三種に大別でき、必ず出て行くが、小は 2 ~ 3 秒から、大は 15 ~ 20 分位まで千差万別である。

・ 底層物質

図 9 は各形状に対する代表例であるが傾向は同じで、表層と違い、たまったものは出にくい。使用材料が違うが、現在までの所一番多く推積したのは 4/1 の時の $Q = 8.0 \ell/s$ 、 $h = 11.54 \text{ cm}$ の時で 570 g、一番少なかったのは 1/1 の場合の $Q = 5.0 \ell/s$ 、 $h = 6.77 \text{ cm}$ の時の 58 g である。

ま と め

以上、二次元的なポテンシャル流としての取り扱いでは実現象を表わし難く、渦を考慮して三次元的に取り扱う必要がある様だ。今後、凸部内でのパンチくずの挙動にみられる様な不規則な流れの解析と併せ、検討をしていきたい。

指導・助言を戴いた東洋大学、本間 仁名誉教授、荻原 国宏教授に謝意を表します。併せて、共に研究を進めてきた卒論生、高木純一、吉岡俊明君御苦労さまでした。

参 考 文 献

1) 等角写像とその方法 (生産技術センター) 池田 芳 郎

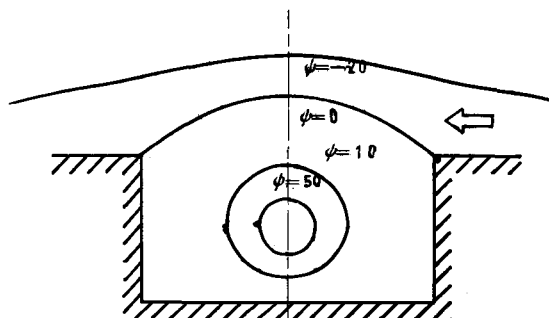


図 5 - B - 1

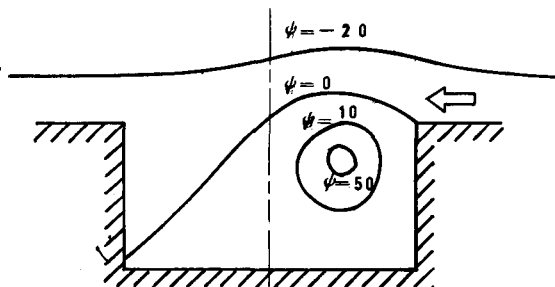


図 5 - B - 2 $U = 10.0$