

浸透性の壁面を有する流れの基礎的研究

Foundamental Study on the Flow with Porous Wall

東京工業大学 正会員○山田 正

東京工業大学 正会員 吉川秀夫

日本下水道事業団 中沢 均

東京工業大学 川端規之

1. 序 論 多くの自然河川の河床は、砂、礫等で構成されており、その層はいわゆる浸透層となっている。このことは洪水期の伏流水などによって確かめられる。また水文学で取り扱う表面流は、明瞭なる底面をもたない流れであり、流路床には浸透層が存在するものと考えられる。この様に底面が rigid でない壁面上の流れは、近年水理学以外の他の分野でも注目を集めている。例えば森林や植物群落上の流れ、市街地上空の流れ等がある。上記の浸透層上の流れは多くの要因によって支配されているが、本研究は、(i)層流、乱流による流れの特性の相違 (ii)浸透流が主流に与える効果 (iii)浸透流および粗度の主流に与える効果等に注目し、浸透層上の流れの抵抗の増大あるいは、減少等の物理機構を明らかにし、特に降雨流出のいわゆる表面流、中間流の各流出機構の解明を目的として行ったものである。

2. 層流の場合 図-1 に示す横断面をもった2次元管路を考える。この場合には壁面上の粗度の効果が取り去られ、純粹に浸透流の効果を考えることが出来る。このとき基礎式は、

$$A層: \quad 0 = \nu \nabla^2 u - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad \dots\dots (1)$$

$$B層: \quad 0 = \nu \frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad \dots\dots (2)$$

ここに(1)式の u は溝の中の流速であり、B層の u は y 方向に平均された流速である。A層に関し、流速 u を $u = 3/2 \bar{U}(z)(1+2y/B)(1-2y/B)$ の相似分布に仮定し、これを(1)式に代入して(3)式を得る。

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\eta^2} - 12\tilde{u} = I (= \frac{B^2}{\mu U_0} \frac{dP}{dx}) \quad \dots\dots (3)$$

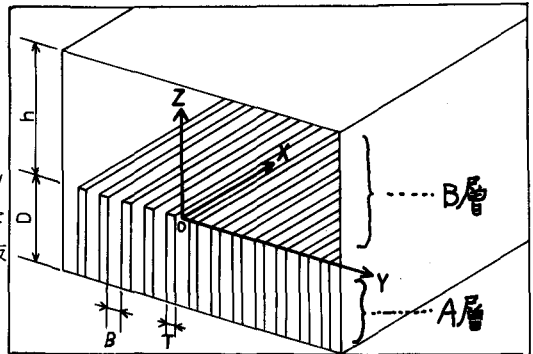


図-1 浸透層をもつ2次元管路流れ

ここに $\tilde{u}(\eta) = \bar{U}(z)/U_0$ 、 U_0 は $z=0$ 上での流速 (=スリップ速度)、 $\eta = z/B$ である。これを解いて、

$$\tilde{u}(\eta) = -\frac{I}{12} + \left(1 + \frac{I}{12}\right) \exp(\sqrt{12} \eta) \quad \dots\dots (4)$$

を得る。A層の y 方向に平均された流速 (みかけの流速) は空隙率 $\lambda (= B/(T+B))$ を(4)式にかけると得られるが、次元をもった形では(5)式となる。

$$\bar{U}(z) = ki + (\lambda U_0 - ki) \exp(\sqrt{12} z/B) \quad \dots\dots (5)$$

ここに $k = 1/12 \cdot \lambda B^2 g/\nu$ (=透水係数)、 $i = -1/\rho g \cdot dP/dx$ (=動水勾配) である。またB層の流速分布は $z = \lambda$ で $u = 0$ 、 $z = 0$ で $u = \lambda U_0$ の境界条件のもとに解くと、

$$\tilde{u}(\eta) = \frac{1}{2} \alpha \eta^2 - \frac{1}{2} (2 + \lambda) \eta + \lambda \quad \dots\dots (6)$$

ここに $\alpha = h^2 I/B^2$ 、 $\tilde{u} = u/U_0$ 、 $\eta = z/h$ である。次に(5)式、(6)式に共通の未知数 U_0 を求めるために $d\tilde{u}/d\eta|_{0+} = d\tilde{u}/d\eta|_{0-}$ の条件を加えると、(7)式のように求まる。

$$U_0 = \frac{iBhg}{\nu} \left[\frac{B}{h} \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2} \right] \left/ \left[\frac{B}{h} + 12 \right] \right. \quad \dots\dots\dots (7)$$

図-2 は (4), (6), (7) 式に基いて計算した流速分布の一例である。この図より同じ動水勾配に対して、スリップ速度のため、rigid な壁面の場合より、より多くの流量が流れているのがわかり、主流に対しては、壁面抵抗の減少を示している。このことをより詳細に調べるために $\rho g i = f \rho \bar{U}^2 / 2h$ で定義される主流の抵抗係数 f を求めると、

$$f = \frac{24}{Re} [1 + g(\lambda)]^{-1} = \frac{24}{Re} [1 - g(\lambda)] \quad (8)$$

$$g(\lambda) = 6\lambda \frac{B}{h} \left(\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{h}{2B} \right) / \left(1 + \sqrt{12} \frac{h}{B} \right)$$

ここに $Re = \bar{U}h/\nu$, $\bar{U}$ は B 層の平均流速である。

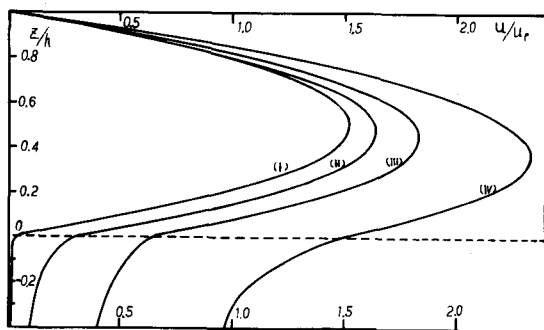
(8) 式より、浸透性壁面を有する流れの抵抗係数はスリップ速度の存在によって減少していることがわかる。ところで U_p を 2 次元 Poiseuille 流の平均流速とすると $g(\lambda) = (\bar{U} - U_p)/U_p$ となっている。

図-3 は片面に浸透層をもつ 2 次元 channel flow の実験²⁾ と上記の $g(\lambda)$ の理論結果とを比較したものであるが結果は良く一致しており、本研究の理論解析の妥当性を示している。同様の解析を開水路に適用すると、

$$f' = \frac{6}{Re} \left(1 - \frac{\sqrt{3B}}{2h} - \frac{\lambda}{4} \frac{B^2}{h^2} \right) \quad (9)$$

となり、この場合も抵抗係数は減少している。

開水路の薄層流の場合の抵抗係数が実験により得られているが³⁾、この場合も f' は減少している。結局層流の場合には、境界で流速が 0 でないことが、抵抗の減少効果を生み出していると言える。



(i) $h=10\text{ cm}, B=1\text{ cm}, \lambda=0.3$ (ii) $h=2\text{ cm}, B=1\text{ cm}, \lambda=0.3$
(iii) $h=1\text{ cm}, B=1\text{ cm}, \lambda=0.3$ (iv) $h=1\text{ cm}, B=1\text{ cm}, \lambda=0.7$
 I は全て $1/10^4$ である。

図-2 浸透層をもつ流れの流速分布 (層流解)

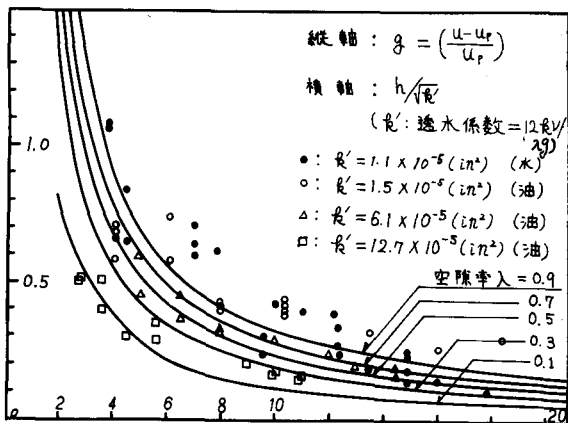


図-3 ポアズユ流れからの平均流速の増大量

3. 乱流の場合 図-2 において、A 層、B 層ともに乱流の場合を考える。はじめに A 層の流速分布から考察する。このとき、平均流速、レイノルズ応力に関して次の様に仮定する。

$$U = U_1 + U_2, \quad \overline{u'v'} = (\overline{u'v'})_1 + (\overline{u'v'})_2, \quad \overline{u'w'} = (\overline{u'w'})_1 + (\overline{u'w'})_2 \quad (10)$$

ここにサフィックス 1 のついた項は圧力勾配によるもの、サフィックス 2 のついた項はスリップ速度による乱流 Couette 流れからの寄与を表わす。このとき A 層の溝の中の流れの基礎式は (11) 式となる。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \nabla^2 U_1 - \frac{\partial (\overline{u'v'})_1}{\partial y} + \nu \nabla^2 U_2 - \frac{\partial (\overline{u'v'})_2}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u'w'})_2}{\partial y} \quad (11)$$

(11) 式の U_1 は通常の 2 平板間の平均流速を求めることにより得られ、 $U_1 = \sqrt{2gBi/f_p}$ となる。ここに f_p

は2平板間の抵抗係数である。一方 U_2 は(11)式中の $U_2 = 0$ とおいた方程式を解くことにより得られる。ここでも(2)の層流の場合と同様に相似解を考える。(以後サフィックス2は省く)

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= \bar{U}(z) F(y) \\ \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} F(y) dy &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12)式を(11)式の $U_2 = 0$ の式に代入し、溝の幅で平均すると、第1項は、

$$\begin{aligned} \nu \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} \nabla^2 U_2 dy &= \nu \frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} F(y) dy}_1 + \underbrace{\frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} \nu \frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} dy}_{\tau_0 / \rho} \\ &= \nu \frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} - \frac{\tau_0}{\rho B} = \nu \frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} - \frac{f}{2} \frac{\bar{U}^2}{B} \end{aligned} \quad (13)$$

ここに τ_0 は溝の側壁に働く剪断応力であり、抵抗係数 f を用いて $\tau_0 = f \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2$ と書き改められる。このときA層の溝の中の平均流速 $\bar{U}$ に関する方程式が得られる。

$$\nu \frac{d^2 \bar{U}}{dz^2} - \frac{f}{2B} \bar{U}^2 - \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

ここに $\overline{u'w'}$ はアンサンブル平均と溝の間の y 方向平均を意味する。(14)式中の第3項には乱流輸送理論を用い、 $-\overline{\rho u'w'} = 1/2 \cdot \rho l^2 (d\bar{U}/dz)^2$ と置く。また混合長 l はA層内で一定と考え $l = KB$ とおく。各変数を溝の幅 B 、スリップ速度 U_0 を用い $\eta = z/B$ 、 $u_A = \bar{U}/U_0$ 、 $R_e = U_0 B / \nu$ の様に無次元化すると、

$$K^2 \frac{du_A}{d\eta} \cdot \frac{d^2 u_A}{d\eta^2} + \frac{1}{Re} \frac{d^2 u_A}{d\eta^2} - \frac{f}{2} u_A^3 = 0 \quad (15)$$

となる。(15)式の解で $Re \rightarrow \infty$ のときは、井上栄一博士の提案⁴⁾するexponential型の流速分布が得られる。しかし(15)式は u_A に関して非線型の方程式であるために解の唯一性が保証されない。よってここでは f, K, Re に適当な値を入れて(15)式を数値計算した。用いた手法は準線型化法、リヒトマイヤーのアルゴリズムであり、図-4はその結果である。ここで得られたことは、① u_A は実用上の R_e 数の範囲(200~2000)ではほとんど変化しない、② u_A はほぼexponential型の流速分布をもつ、③exponential型の解は特解ではなく、境界条件を満たす唯一の解と考えられる、以上の3点である。これからA層の流速分布は圧力勾配による寄与を加えて、

$$u = \lambda \left(\sqrt{\frac{2gBi}{f_p}} + U_0 \exp \left[\sqrt{\frac{f}{K^2}} \cdot \frac{z}{B} \right] \right) \quad (16)$$

となる。これらのことを確かめるために、図-1と同様の装置を18cm×20cm×400cmの風洞中に設置し、 $h=12$ cm、 $D=5$ cm、 $B=0.5$ cm、 $T=0.3$ cmとして実験したものであり、外径1mmのビート管によって主流と浸透流の流速分布を測定した(図-5)。ここでA層の流速は溝中の各高さにおける最大流速である。B層では浸透層の境界面から1~2mm以上の高さの流速は横断方向に一樣であった。図-5より主流と浸透層の境界面ではスリップ速度が存在し、またこの面をはさんで流速分布はかなり滑らかに接続していることがわかる。

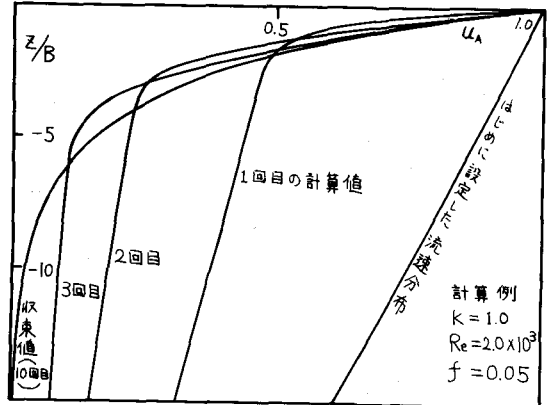


図-4 A層の流速分布(乱流の理論解)

図-6 はA層の測定された流速から(16)式の $\sqrt{2gBi}/f_p$ に相当する流速を引いた残りのいわゆる乱流クエット流れの流速分布であり(16)式で予想した様に exponential 型の流速分布になっていることがわかる。

次に主流の流速分布をより詳しく調べるために対数則の形で整理すると図-7になる。横軸は滑面の場合との比較のために u_*z/ν にしている図-7より測定された流速は全般に滑面での理論値より小さい値を示しており、抵抗の増大を示している。また図-7の横軸を $u_*(z+\Delta h)/\nu$ にし、特に境界面近傍の流速を log 分布に合うように原点の補正をすると、このときはカルマン定数 κ が減少する。一般にカルマン定数の減少は抵抗の減少を意味するが、 $du/dz = u_*/\kappa/(z+\Delta h)$ より平均流速の勾配は必ずしも増さず、抵抗の増減は原点の補正量 Δh にも依存する。流速分布に次の(17)式を用いると、

$$\frac{u(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{(z+\Delta h) u_*}{\nu} + B \quad (17)$$

主流の抵抗係数(水深 h の開水路の場合) f' は、

$$\sqrt{\frac{2}{f'}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(Re \left(1 + \frac{\Delta h}{h} \right) \sqrt{\frac{f'}{2}} \right) + B \\ - \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{\Delta h}{h} \ln \frac{\Delta h}{h} \right) \quad (18)$$

となる。ここで $\Delta h = 0$ 、 $B = 5.0$ としたときが通常の滑面開水路の場合であるが、この式によっても、 Δh の存在が流れの抵抗を増大させていることがわかる。よって浸透層上の流れの抵抗係数の定量的な評価を行うためには、 Δh および(17)式中の B の決定法が考えられねばならない。ところで Δh に関してはA層の流速分布が非常に大きな関係を持っていることが予想されるが、図-5に示すように、主流のレイノルズ数の増大につれてスリップ速度は増大する。(16)式より、スリップ速度の増大は主流の影響がより深くA層内に浸透することを意味している。このことは Δh の増大を引き起こすことが考えられ、図-1に示す様な粗度の効果をもたない浸透層上の流れの抵抗係数は乱流の場合、主流のレイノルズ数の増加につれて増大するものと考えられる。(この場合、浸透層の厚さ D は乱流クエット流れが及ばない程度に十分大きいものとして扱っている。 D が比較的小さい場合には抵抗係数の増大はあるレイノルズ数で頭打ちになり、以後は粗面の場合と同様に一定値を保つものと考えられる。)上に述べた事柄を確認するために抵抗係数 f' (開水路の場合に引き直している)を求めた(図-15)。図中にに他の著者らの測定値(流路床は必ずしも図-2の様ではないが、比較的小さい粗度をもつ浸透層上の流れである。)も併記してあるが、これらはすべて乱流域で滑面より大きな値を取り、レイノルズ数とともに増

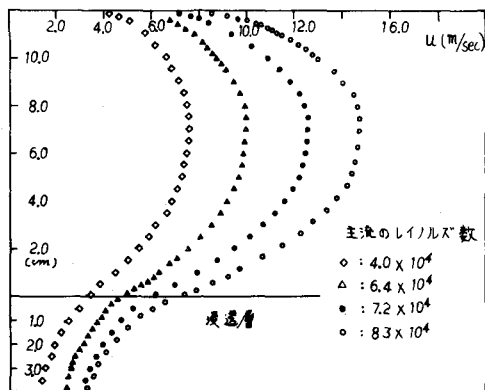


図-5 流速分布(実測)

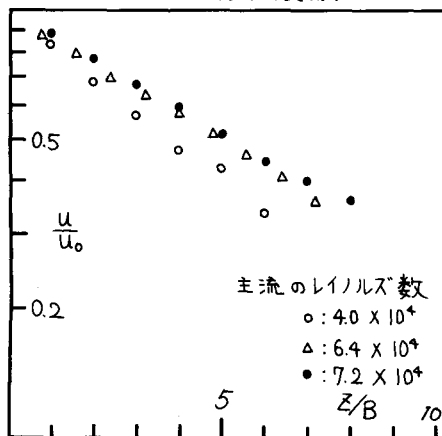


図-6 A層の流速分布(実測)

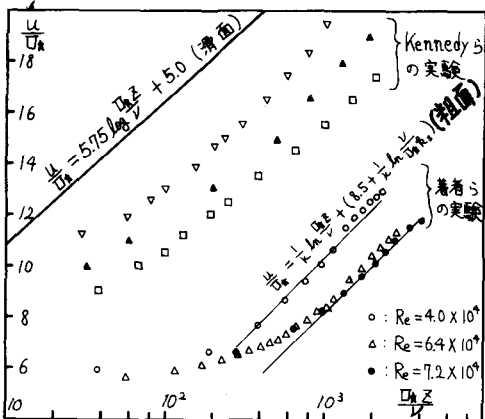


図-7 主流の流速分布-log分布

大はあるレイノルズ数で頭打ちになり、以後は粗面の場合と同様に一定値を保つものと考えられる。)上に述べた事柄を確認するために抵抗係数 f' (開水路の場合に引き直している)を求めた(図-15)。図中にに他の著者らの測定値(流路床は必ずしも図-2の様ではないが、比較的小さい粗度をもつ浸透層上の流れである。)も併記してあるが、これらはすべて乱流域で滑面より大きな値を取り、レイノルズ数とともに増

大の傾向を示しており、上述の考察の妥当性を示すものと言えよう。ところで流速分布に関して、図-8の模式図に示す様な流れが考えられる。即ち同じ水深、同じ水路床勾配での滑面の場合と浸透流をもつ流れとの流速分布の違いを示している。前章でスリップ速度が存在するときは流速が増すことを知ったが(層流の場合)、図-8でも確かに境界面近傍では速度は浸透層上の流れの方が大きい(図-7は真の流速であるためにその様に見えないが、溝の左右の速度の大小を平均すると、図-8のようになる)が、 z の大きいところでは、あたかもブレーキがかけられている様に流速分布の勾配は小さく、流速も滑面の場合より小さくなっている。このことから z の大きいところでは、境界面近くの平均流速の小さい流体塊が、滑面の場合よりも効率よく上方へ輸送されていることが考えられる。

図-9は板の上と溝の上で横断方向に測定された流速分布の一例であるが、この図より一見大きな流速が得られる様に思われる溝の上で小さい流速を取り、境界面によって流速が抑えられるように思われる板上で大きな流速を取っている。この事に関し、かつてElder⁷⁾は有限幅の板の端近くの流速を綿密に測定し、図-10に示す等流速線を描いており、また、板の端近くの底面セン断応力が、板の中央部より増大することを示している。さらにこれらの測定結果の説明に自由端近くに発生する縦渦を持ち、その流線を描いている。著者の一人は以前に底面セン断応力の非一様性が縦渦の発生原因になることを理論的に証明¹⁰⁾しているが、本研究の場合がその様な場合に相当するものと考えられる。上述のElderの結果と底面の非一様性を考慮するとき、本研究の場合には図-11の模式図に示す様な縦渦の存在が考えられる。つまり板上の境界面で抑えられていた相対的に小さい値をもつ流れ方向の平均流速が、図-11に示す様に溝方向に流れ、やがて上昇流となる縦渦成分に乗り、上方へ運び込まれる。このときに発生する付加的な応力が主流の平均流速をひずませ、図-8の様な平均流速分布を作り出し、ひいては抵抗の増大(滑面に比較して)をもたらしものとする。

次に図-1の流れと通常の粗面乱流の場合を比較してみる。図-7からわかるように適当な相当粗度 k_s を選ぶなら境界面近くを除いては $u/u_* = 1/\kappa \cdot \ln z/k_s + 8.5$ の通常の粗面の場合の平均流速分布式が良くあてはまっている。ここでこの式を積分して得られる抵

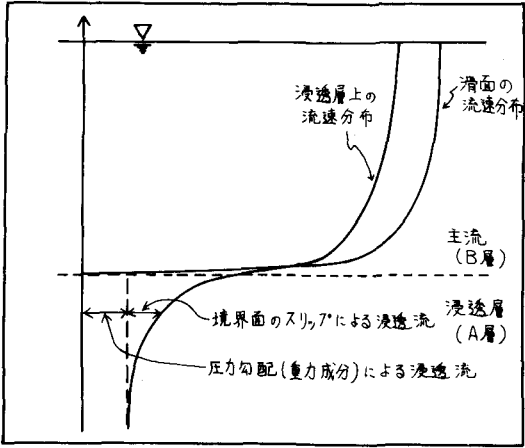


図-8 流れの模式図(滑面との比較)

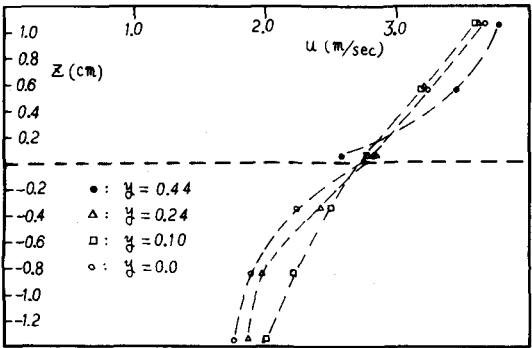


図-9 境界面近傍の流速分布

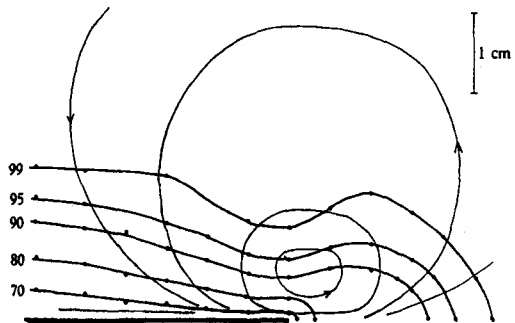


図-10 有限幅の板の端近くの等流速線および流線(Elder(1960)の論文より掲載)

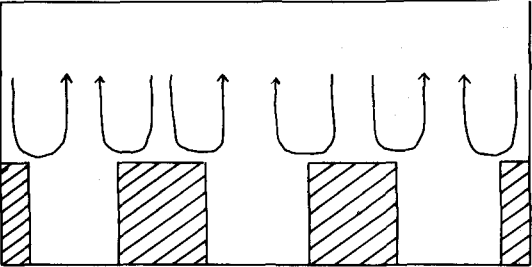


図-11 底面近くの流れの模式図

抗係数の理論式に k_s/h を代入して f' を求めると、この場合は実験値の方が小さい値を示している。つまり相当粗度 k_s を同じにする通常の粗面乱流と比較すると抵抗は減少している。この原因は図-12に示すように、図中の斜線の部分の流量だけスリップ速度の存在によってより多く流れているからである。

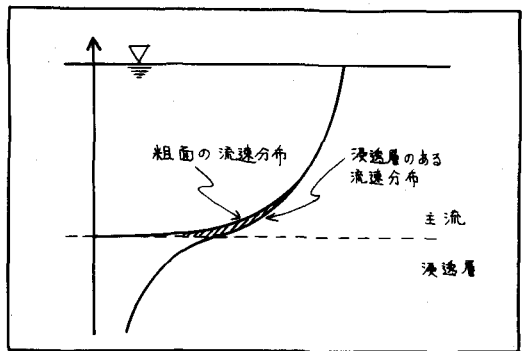


図-12 流れの模式図(粗面との比較)

4. 浸透流と粗度の効果 前章までは、A層として流れ方向に一樣なものを考えることにより粗度としての効果を考慮に入れた解析をする必要はなかった。ここでは一般の自然河川の水路床でみられる比較的大きな粗度をもった浸透層上の流れを模擬した開水路実験を行った。A層として、直径が2.94cmと1.64cmのビー玉をそれぞれ5層と9層積み上げ、浸透層を構成した。ビト管によって測定された主流の流速分布から $\tau_0 = \rho l^2 (du/dz)^2$ によって混合長を算出すると、前章と同様に $l = \kappa(z + \Delta h)$ の形に書くことが出来る(図-14)。このときもカルマン定数は変化していた。図-15にこのときの抵抗係数を示しているが、この場合は前章と異なり、レイノルズ数とともに減少している。同じ図中に芝生上での流れの抵抗係数⁹⁾も示しているが同じ傾向を示している。抵抗係数が何故この様な変化を示すのか、今のところ不明であるが、今後は前章の場合同様に、乱れの測定を含め、実験及び理論解析を行っていく予定である。

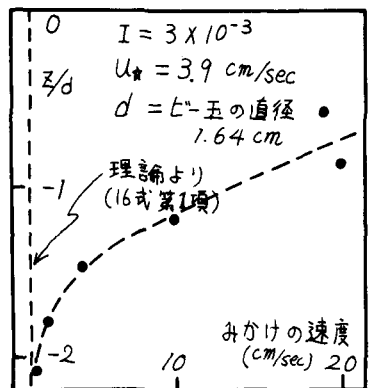


図-13 A層内流速分布

5. おわりに 本研究の実験の遂行及び理論解析に精力的に協力された田田宏君(東工大4年)に甚大の謝意を表します。

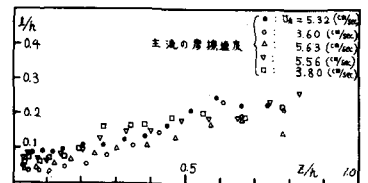


図-14 混合長の分布

参考文献 (1) 中川・禰津:土木学会論文報告集, 第244号, 1975年12月

- (2) Beavers, G. S. and Joseph, D. D.: J. Fluid Mech., Vol. 30, part 1, 1967
- (3) 神田・喜久里ら:第33回土木学会年次学術講演会 概要集第2部, 1978
- (4) Inoue, E.: J. met. Soc. Japan 41, 1963
- (5) Ruff, J. F. and Gelhar, L. W.: ASCE. Vol. 98, No. EM4, 1972
- (6) Kennedy, J. F., Hsu, S. T., et al: ASCE, Vol. 99, No. HY 4, 1973
- (7) Elder, J. W.: J. Fluid Mech., 9, 1960
- (8) 古屋・中村ら:第10回乱流シンポジウム, 1978
- (9) Chen, C. L.: ASCE. Vol. 102, No. HY3, 1976
- (10) 林・山田:第21回水理講演会論文集, 1976

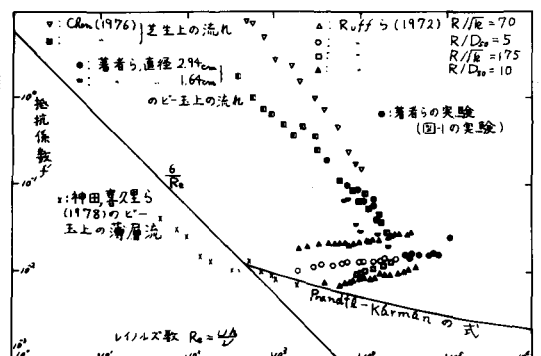


図-15 浸透層上の流れの抵抗係数