

管水路による砂れき輸送に関する理論的研究

Theoretical Research on the Hydraulic Transport of Solids by Pipeline

高知工業高等専門学校 正会員 那 須 浩 平

1. ま え が き

管水路内の流砂現象に関する研究は、従来実験的研究に主眼が置かれており、今までに多くの研究者により諸種の実験式が提案されて来たが、これらの実験式を統一的に説明する理論は未だに確立されていない様に思われる。

従来提案された実験式の中で現在最も広く使用されており、多数の実験的研究の結果から支持を受けている信頼性の高いものとして、Durand⁽¹⁾の式があり、我が国に於ても、この式は現段階における最も実用的な価値の高いものであるとの評価が定着している。

併し、円管内の砂の流動機構が、何故このDurandの式によって表わし得るのかという説明はまだなされていない。

この式のもつ流体力学的根拠を明らかにする事が、この複雑な現象の解明に通じる事であると考えられるので、本研究はその様な立場に立って解析を試みる。

2. Durand の実験式について

Durand は円管内の流砂の実験に際し、広範囲な流送条件のもとに測定を行った。

すなわち、管径 $D = 40 \sim 580 \text{ mm}$ 、粒径 $d = 0.2 \sim 2.5 \text{ mm}$ 、流送濃度 $C = 2 \sim 22.5\%$ という流送範囲から 310 種の実験値を得て、それから次の様な結論が出されている。

$$i = i_w (1 + C\phi) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 i : 砂水混合体を流送している時の動水勾配、 i_w : 混合体の平均流速と同一の流速で、清水のみを流した場合の動水勾配、 C : 流送された混合体の中で砂の占める体積混合率、 ϕ : (2)式で表わされる無次元水理量であり、

$$\phi = \frac{i - i_w}{C i_w} = 81 \left[\frac{v^2 \sqrt{C_D}}{g D (\rho_s / \rho - 1)} \right]^{-1.5} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 D : 輸送管の直径、 v : 混合体の平均流速、 g : 重力加速度、 C_D : 砂粒の抗力係数、 ρ_s : 砂の密度、 ρ : 水の密度。

なお、この式は管底に静止堆積層が生じない範囲を対象としている。

これは図-1に表わされる様なものであり、この式は、多くの研究者によって、その妥当性が実験的に確認されている。

その主なものを挙げると表-1の様になる。

ここに、 D : 輸送管径、 d : 粒子の径、 w_o : 沈降速度、 S : 粒子の比重である。

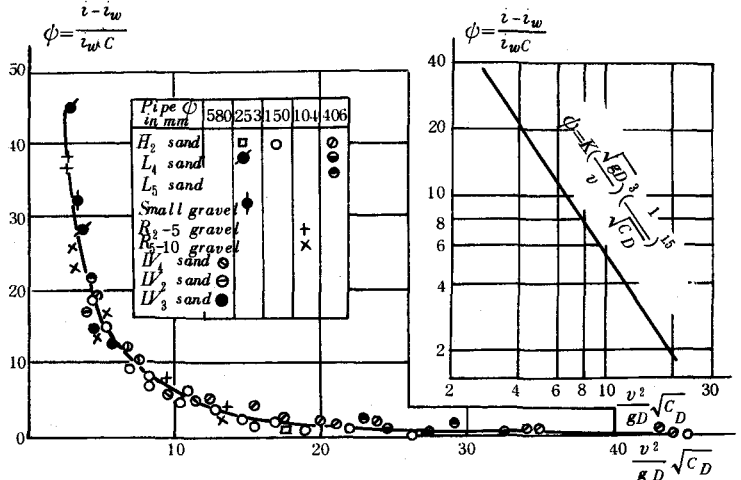


図-1 Durand による実験結果の表示

研究者	流 送 条 件	文 献
Worster	砂利、石炭の粗粒塊	(3)
Bonnington	砂、 $D = 1 \frac{1}{2} \text{ in}$	(4)
Smith	砂、 $w_o = 2.7 \sim 1.2 \text{ cm/sec}$ 、 $D = 2 \text{ in}$ 、 3 in	(5)
Wiedenroth	砂、 $w_o = 1.94 \sim 3.4 \text{ cm/sec}$ 、 $C_{max} = 30\%$ 、 $D = 100 \text{ mm}$	(6)
八 木 他	砂、 $d = 8.0 \sim 4.5 \text{ mm}$ 、 $D = 80.7 \text{ mm}$ 、 100.3 mm 、 155.2 mm	(8)
都 田 他	球形ガラス、 $S = 2.5$ 、 $d = 0.98 \sim 2.78 \text{ mm}$ 、 $D = 42.5 \text{ mm}$	(9)

表 - 1

確かに Durand の実験式(2)は管路内の砂の流動の系全体を包括的に、そして適正に表わし得ているという推定は極めて自然な様に思われる。

しかし、何故にこの複雑な現象が(2)式に集約し得るのかと言う物理的な解明は未だになされていない。そこで筆者は次節以下、この(2)式について特にその指数と係数が、どのような力学的根拠から出て来るのかという事を中心に考察を行った。

3. 理論の展開

管路内の流砂現象は、開水路の場合と異り、三次元の固体壁が境界を形成し、その壁面からの粒子や流体のはね返りが生じる。この事が濃度分布に、ひいては流速分布にどのような影響をどの程度に与えているかについても、その実態が明らかでない。また、浮遊砂と掃流砂の判別も開水路の場合以上ににつけにくい。

掃流と浮遊という全く異質の力学的機構に基づく二つの運動が、管路内という限定された空間に同時に存在し、相互に強い、そして微妙な相互干渉下にある事が予想されるので、この現象を従来の流砂理論で処理しようとする事には無理があり、このためにこの種の研究はどうしても実験的研究に偏る傾向が強くなり、その結果得られているものゝ大部分は (Durand をはじめとする一部の例外はあるにしても) 各々の実験条件に応じた、限られた範囲の流送状態を説明するに留まっていたと思われる。

本研究においては、これ等の点を改良するために以下の考え方により解析を行う。

(1) 基本的方針

管路内の流砂量を算定する方法も、基本的には開水路の場合と異なるものではない。

すなわち、図-2 に於て定常的な状態と考える事が出来れば

$$Q_o = \int_0^D \int_{-\sqrt{DZ-Z^2}}^{\sqrt{DZ-Z^2}} C(x, z) \cdot v(x, z) dx dz \dots\dots\dots (3)$$

と書ける。ここに、 Q_o : 全流砂量、 $v(x, z)$: 流速、 $C(x, z)$: 流砂濃度である。

小川⁽⁷⁾は(3)式の算定で、流速分布として対数法則を適用し、濃度分布として Rouse の式を使用した。この場合、拡散係数 ϵ としては、Lane and Kalinske が開水路の浮遊流理論で用いたと同じ手法で、断面平均値を求めて使用した。即ち、Ismail⁽²⁾が閉管路に対して提案した図-3 の様な拡散係数 ϵ の分布を平均した値

$$\epsilon_m = \frac{1}{r_o} \int_0^{r_o} \epsilon(z) dz \dots\dots\dots (4)$$

を用いて流砂量式を導いている。ここに r_o は管の半径である。

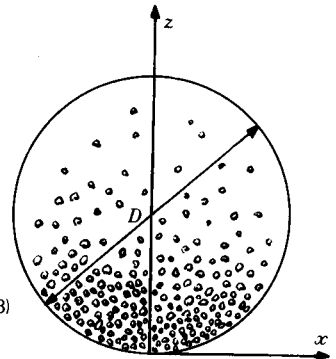


図-2 送砂管断面図

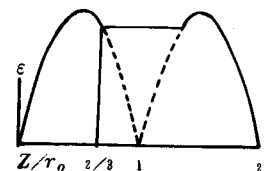


図-3 閉管路内の拡散係数の分布 (Ismailによる)

併し、この方法は砂が全て浮遊して流れる場合を対象としたものであり、無視し得ない量の掃流砂が存在する場合にはこの方法を適用する事は出来ない。

筆者が考察の対象にしているのは、管底に静止堆積層が形成される直前の状態であり、このような場合には相当な量の砂が管底にそって押し流されると考えるべきである。

この状態はDurand式の適用範囲のぎりぎりの限界に当るものであり、この状態を一般に限界堆積状態と言っている。

Durandが、限界堆積流速 (Limit deposit velocity) と名づけた流速に対応するものと考えてよい。

この限界堆積状態を取り扱う場合、管底の堆積層や掃流砂層、周辺の固体壁の存在 (粒子や流体のはね返り)、粒子の混入に伴う乱流構造の変化 (Karman 定数の減少) 等の各因子の有機的関連において濃度分布や流速分布を検討する事が必要であるが、何としても現状では基礎資料が不十分である。また、上記の各因子を総合的に考慮した流速分布や濃度分布を求める事は極めて難しい様に思われる。

そこで筆者は、次のような仮定を設けて現象をモデル化し、それに基づいて解析を行った。

砂水混合体の平均流速と動水勾配との関係を図示すると、一般に図-4のようになる事が実験的に確かめられている。

図-4の動水勾配が最小になる点をA点とすると、この点の左側では堆積砂が管底に存在し、右側では存在しない。また、A点附近では、極く僅かな*i*の変動により*v*が大きく変動する。そのため、この近傍では管底の砂層が断続的に滑動したり停止したりする状態が起りやすい。

A点での流況は、管底の凹形固体壁面に沿って、ある厚さの砂層が摺動したり静止したりして居ると推定されるが、どちらの場合にもその表層面には同じ値のせん断応力が作用しているものとする。

また、最小勾配流速*v_c*と堆積開始限界流速*v_L*とは一般に異なる事が実験的に認められているが、それ等に対応する*i*の値は殆んど等しいものとする。最小動水勾配を*i_c*とし、堆積開始限界勾配を*i_L*とすると

$$i_c \approx i_L \dots\dots\dots (5)$$

とする。これはRobinson and Graf¹⁰⁾がまとめた結果 (図-5) を見ても妥当であると考ええる。上の*i_c*や*i_L*の流動状況は、前述の通り管底の砂層が停止寸前の状態で動き続けたり始動直前の状態で静止を続けたりするが、この状態の体積濃度は両者とも静止時の砂層の体積濃度にはほぼ等しいものとする。(両者が断続的に起る場合も同様、また、表層付近も含む。)

この仮定は、都田⁹⁾等によって測定された流速分布図 (図-8) から、それ程不都合な仮定ではないと思われる。

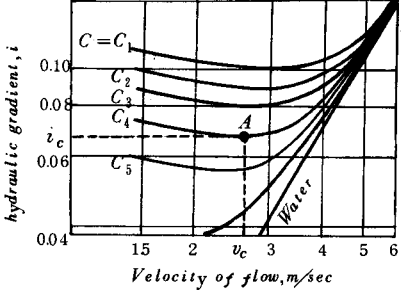


図-4 砂水混合体の平均流速と動水勾配の関係 (Condolios and Chapus による)

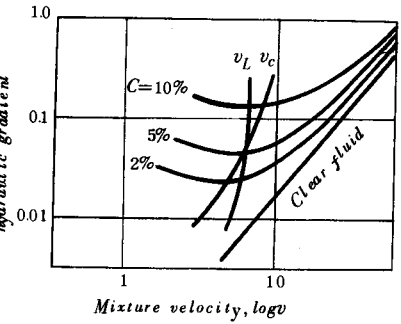


図-5 限界堆積流速*v_L*と最小損失水頭流速*v_c*との対比

(2) 現象のモデル化

管底に堆積層が形成される直前の状態では(3)式によって流砂量を求める事が出来ない。

この様な場合には、流砂量を算定するために、現象をある程度単純化した、実状を損わない程度のモデルを考えなければならない。

そこで筆者は図-6に示されるように現象をモデル化した。

すなわち、管断面を浮遊砂部分と掃流砂部分に分ける事は従来の方と変らない。但し、本解析においては掃流部分を更に二つに分けて考える方法を用いた。

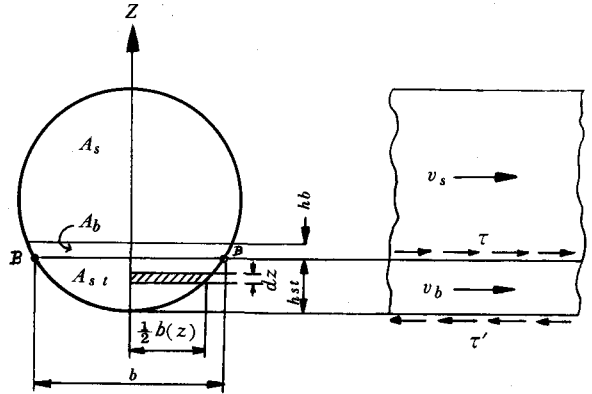


図-6 管内流砂の解析に用いたモデル

その一つは管底の凹形壁面 (invert) に接しながら移動し、停止と滑動を断続的に繰り返す可能性の強い部分である。停止しない場合には、静止寸前の状態で揺動し続ける。また逆に、始動開始直前の状態を保持したまま静止を続ける事も起り得る部分で、図-6の A_{st} で表わされる部分である。

この部分の表層には、常に一定のせん断応力が作用しているものとする。

他の一つは、上記の A_{st} の表層に接しながら移動を続けている部分で、こゝでは停止は起らない。主流が及ぼすせん断応力を直接に A_{st} 表層に作用させる部分で図-6の A_b の部分に当る。

このせん断応力により A_{st} 部分が揺動を継続する。このモデルは管底の砂層と管壁との間の摩擦と、砂層内部の砂と砂との間の摩擦との両者を考慮したものである。

(3) 流砂量の算定

a) 掃流砂量

1) 管底の凹形壁面に沿って、滑動と静止を間欠的に繰り返している、或はその可能性を常に感しながら静止または揺動の状態を維持している部分 (図-6の A_{st}) の力の関係を次のように考える。

A_{st} 表層の中央附近に作用しているせん断応力を τ とすると

$$\tau = h_{st} C_b (\rho_s - \rho) g \mu_t \dots\dots\dots (6)$$

となる。こゝに、 h_{st} : 図-6に示される様に A_{st} の高さ、 C_b : 堆積状態の砂の体積濃度、 ρ_s : 砂の密度、 ρ : 水の密度、 g : 重力加速度、 μ_t : 管底壁面と砂との間の動摩擦係数。

A_{st} が静止直前の状態で揺動を続けている場合、簡単のために等速で移動しているものとする

$$\tau = \tau' \dots\dots\dots (7)$$

とする事が出来る。ここに、 τ' : 図-6に示される様に、管壁と砂層 A_{st} との間の摩擦応力である。管水路の場合、圧力は断面全体にわたって一様であると考えて

$$\tau' = \rho g R i_c = \rho g \frac{D}{4} i_c \dots\dots\dots (8)$$

と書ける。(7)と(8)を(6)に代入して次式を得る。

$$h_{st} = \frac{D i_c}{4 C_b (\rho_s / \rho - 1) \mu_t} \dots\dots\dots (9)$$

つぎに、この部分の断面の算定を考える。この弓形の面積を求める際に問題となるのは、この部分の両端部、すなわち図-6のB点の近傍である。

Condolios and Chapus⁽¹⁾の実験によれば、管内の堆積砂層の表面がほぼ平坦であったので、堆積砂の厚さを測定する事が出来たと報告しているが、これは一定限度以上の厚さの堆積層が形成された場合の事だと思われる。

筆者が100mm径のガラス管に砂を流して観察した時にも、ある値以上の厚さに砂が沈積した場合には安定した静止層が形成されたが、限界堆積状態と思われる領域では図-6のB点に相当する点は極めて変動が激しく、測定が困難であった。

Condolios⁽¹¹⁾等の言わんとした事は、主として主流方向に関する事で、開水路の河床波に相当するものが認められなかったという事だと推定される。

筆者が考えている領域は、これまでも述べて来た様に、極めて不安定であるのが力学的特質でもある。Howard,⁽¹²⁾ Ismail⁽²⁾の測定結果を見ても、底部の固体壁の近くでは乱れの影響が強く、砂粒子の洗掘や浮遊が助長される傾向が認められる。

従って図-6で示した断面において、図の様にB-B線が水平になるとする事は無理で、B点では他の表層部より洗掘作用が強いと考えられる。もっと単純に考えても、図-6のB-B面に一樣なせん断応力が作用した場合、堆積砂の厚い中央附近は移動しにくく、中央から離れて固体壁に近づく程動き易い。

この事はB-B面に対して鉛直な面(例えば図-7の $\delta-\delta$ 面)にせん断応力が生じる事を意味する。この側面せん断応力が加わった事に釣合うためには、表面せん断応力のみを考えて求めた(9)式による h_{st} の値よりも割増しされなければならない。つまり、中央附近では限界堆積層の厚さが増大する事になる。

実験から、 A_{st} の実際の形状は、図-7の様になっている事が観察される。併し、この様な洗掘や側面せん断応力に関しては実態の把握が困難である。現状では、差し当って図-6のモデルを基本にして解析を行うことにする。

図-6の A_{st} の面積は

$$A_{st} = \int_0^{h_{st}} b(z) dz \dots\dots\dots (10)$$

A_{st} は、 h_{st}/D について線形化すると

$$A_{st} = \frac{4}{3} D^{\frac{1}{2}} h_{st}^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{h_{st}}{D} \right) \right] \dots\dots\dots (11)$$

となり、そこで、これに(9)を代入すると、上式は次式の様に書ける。

$$A_{st} = \frac{1}{6} D^2 \left[\frac{ic}{C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_t} \right]^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{3ic}{40C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_t} \right] \dots\dots\dots (12)$$

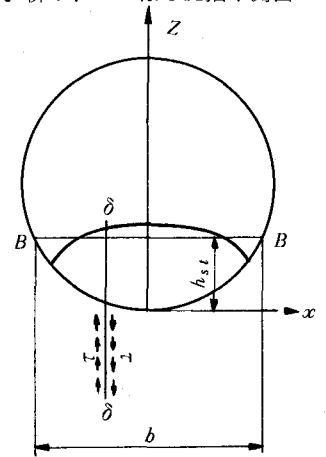


図-7 始動直前の管底の堆砂形状

Ⅱ) つぎに上記 A_{st} の表面に接して流動している掃流砂層 A_b について考える。 A_{st} が動き出すためのせん断応力は、この A_b から伝達されるのであるが、このせん断応力は芦田・道上⁽³⁾が開水路移動床の掃流砂量を求めるのに用いたと同様に、Bagnold⁽⁴⁾の方法を適用して算定する事にする。

Bagnold は粒子を含む流れがある面に与えるせん断応力は、次の式で表わされる事を実験的に検証した。

$$\tau = \tau_s + \tau_F \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 τ : 全せん断応力、 τ_s : 粒子の衝突によって生じるせん断応力、 τ_F : 流体自身のせん断応力である。

Bagnold⁽⁴⁾はこの関係を回転式二重円筒の装置によって確かめたものであるから、管水路の流砂にも使用し得るものと考えられる。

A_{st} が始動直前の状態で静止を保っている場合(限界静止状態)で、 h_{st} が変化しないとすれば、 A_{st} 表層の砂が剝離されて A_b 層内に混入して行く事もなく、 A_{st} 表層に新たな堆砂が生じる事もない。この様な場合には、 A_{st} と A_b の両層間の境界面では流体のせん断応力は、砂粒の限界掃流力にほぼ等しい値に維持されていると考えてよい。この場合(13)式の τ_F は τ_c に等しいとおいて

$$\tau_s = \tau - \tau_c \dots\dots\dots (14)$$

と書ける。ここに、 τ_c : 砂粒の限界掃流力である。この場合堆積状態に近い濃度の砂層をある厚さで、管底の凹面壁に沿って押し流すだけのせん断応力は砂粒の限界掃流力よりも十分に大きいとして、 $\tau > \tau_c$ とすれば、(4)式は

$$\tau = \tau_s \dots\dots\dots (5)$$

となる。流体中の粒子の砂面に対する衝突によって鉛直応力 σ_s が生じ、 τ_s と σ_s の間には

$$\tau_s = \sigma_s \mu_s \dots\dots\dots (6)$$

が成立する。ここに μ_s : 砂粒子と砂面の間の動摩擦係数で、 $\mu_s = 0.4 \sim 0.5$ という事である。⁽⁴⁾ ここに

$$\sigma_s = h_b C_b (\rho_s - \rho) g \dots\dots\dots (7)$$

で表わす事が出来る。但し、 h_b : 図-6に示される掃流砂層 A_b の厚さで、前述の仮定により、堆積状態に近い濃度を持つものとする。(7)を(6)に代入すると

$$\tau_s = h_b C_b (\rho_s - \rho) g \mu_s \dots\dots\dots (8)$$

となり、(6)が成り立つ場合を考えれば、上式は次の様に書き表わせる。

$$\tau = h_b C_b (\rho_s - \rho) g \mu_s \dots\dots\dots (9)$$

限界撓動時の A_{st} が、等速で撓動している場合を想定すれば、図-6の関係から(9)にも(7)と(8)が使用出来るので(9)は

$$h_b = \frac{Di_c}{4C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_s} \dots\dots\dots (10)$$

と書き直せる。つぎに A_b については図-6より

$$A_b = b h_b \dots\dots\dots (11)$$

としてよい。再び $h_{st} < D$ の条件から、 b を h_{st}/D について線形化すると、(9)式から

$$b = D \left(\frac{i_c}{C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_t} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{i_c}{8C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_t} \right] \dots\dots\dots (12)$$

となり、更に(12)と(10)から(9)を計算して次式が得られる。

$$A_b = \frac{D^2}{4} \frac{1}{\mu_s \mu_t^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{i_c}{C_b(\rho_s/\rho - 1)} \right]^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{i_c}{8C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_t} \right] \dots\dots\dots (13)$$

■ 管底部の掃流域の全断面積 A_{bt} は

$$A_{bt} = A_b + A_{st} \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる。これに(12)と(13)を入れて

$$A_{bt} = \frac{D^2}{2\mu_t^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{i_c}{C_b(\rho_s/\rho - 1)} \right]^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{3\mu_t} \left(1 - \frac{3i_c}{40C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_t} \right) + \frac{1}{2\mu_s} \left(1 - \frac{i_c}{8C_b(\rho_s/\rho - 1)\mu_t} \right) \right] \dots\dots\dots (15)$$

となる。これから掃流砂量は

$$Q_B = A_{bt} C_b v_b \dots\dots\dots (16)$$

で表わされる。ここに v_b : 管底掃流砂の平均速度、 Q_B : 全掃流砂量である。ここに

$$v_b = \alpha_0 v_{*c} \dots\dots\dots (17)$$

とおいて、(8)式より

$$v_{*c} = \sqrt{\tau/\rho} = \frac{1}{2} \sqrt{gDi_c} \dots\dots\dots (18)$$

であるから、これ等の関係を(16)に入れると、掃流砂量を与える式は次の様になる。

$$Q_B = \frac{\alpha_0 D^{\frac{5}{2}}}{4} \left(\frac{g}{\mu_t C_b} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\rho_s / \rho - 1} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{3\mu_t} \left(1 - \frac{3 i_c}{40 C_b (\rho_s / \rho - 1) \mu_t} \right) + \frac{1}{2\mu_s} \left(1 - \frac{i_c}{8 C_b (\rho_s / \rho - 1) \mu_t} \right) \right] i_c^2 \dots (29)$$

ここで問題になるのは α_0 であるが、これは開水路の場合とは別の取り扱いを必要とする様である。図-8は都田等が42.5mm径の亚克力管に、粒径が2.07mmで比重が2.5である球形ガラスを流して測定した流速分布図である。これによると、管底の粒子層はある厚さで堆積状態のまま(粒子相互の相対位置を変化させずに)で滑動している様子がうかがえる。

一般の移動床開水路の掃流現象には起り得ない現象だと思う。 α_0 については、現在検討中である。

b) 浮遊砂量

開水路の浮遊砂量の算定は、流速分布として対数法則を使い、濃度分布としてはRouseの分布を用いて、この両者の積を、ある基準点から水面まで積分する方法が普通はとられる。小川がこの方法を管内の浮遊流砂量の算定に進展させたのは前述の通りである。

併し、この方法は、開水路の場合でも底面附近の境界条件、即ち、底面附近での基準点の定め方、及びそこでの濃度の算定が難かしいために、未解決の問題が残されている。

拡散係数を適切に定めれば濃度分布形は得られるが、濃度の値そのものについては十分に明らかにされていない。

管水路の場合には、三次元の固体壁によって空間を限定され、さらにその壁面からの粒子や流体のはね返り作用が加わる。

そこで筆者は、管水路の浮遊砂の算定の問題を次の様に取り扱う事にした。管底に堆積層が生じる直前の場合を考える事は掃流砂の場合と同じであるが、単位時間当りに流送される浮遊砂量は

$$Q_s = A_s v_s C_s \dots \dots \dots (30)$$

で与えられる。ここに Q_s : 浮遊砂量、 A_s : 浮遊砂が存在する可能性を有する領域で、図-6の A_s に略等しいとしてよい。 v_s : A_s に於ける断面平均流速、 C_s : A_s 断面の平均浮遊砂濃度である。

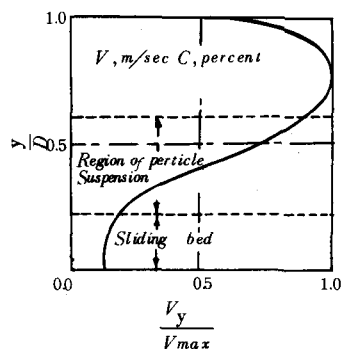


図-8 都田等による流速分布の測定結果

この C は前述の様な実状から容易に求まる水量ではないので、以下の様な手法により近似値を算定する事にした。すなわち、限界褶動状態の単位管長当りのエネルギー消費 i_c をつぎの様に表わす事にする。

$$i_c = i_f + i_b + i_s \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 i_f : 管壁面と流体との間の摩擦によるエネルギー消費、 i_b : 砂層を管底壁面に沿って滑動させるのに使われるエネルギー、 i_s : 固体粒子の浮遊を維持するのに消費されるエネルギーである。(31)式では、浮遊砂相互の衝突や浮遊砂と管壁との衝突によるエネルギー損失は、他の原因によるものよりも充分に小さいと仮定している。そこで

$$i_f = \frac{D i_c}{4 A_s} (P_s - b) \dots \dots \dots (32)$$

ここに、 P_s : A_s 部分の潤辺長である。

$$i_s = \frac{w_0}{v_s} C_s (\rho_s / \rho - 1) \dots \dots \dots (33)$$

ここに w_0 : 浮遊粒子の沈降速度である。

$$i_b = \left(\frac{A_b i}{A_s} \right) \frac{\alpha_0 g D i_c}{4 v_s^3} (\rho_s / \rho - 1) C_b \mu_s \dots \dots \dots (34)$$

と各々与えられる。この③①～③④の関係から C_s を逆算すると

$$C_s = \frac{v_s i_c}{w_o(\rho_s/\rho-1)} \left[1 - \frac{D(P_s-b)}{4A_s} - \left(\frac{A_{bt}}{A_s} \right) \frac{\alpha_o^2 g D}{4v_s^2} (\rho_s/\rho-1) C_b \mu_t \right] \dots\dots\dots ③⑤$$

と書ける。この C_s を③②に代入して次式が得られる。

$$Q_s = \frac{i_c}{w_o(\rho_s/\rho-1)} \left[A_s v_s^2 - \frac{DP_s v_s^2}{4} + \frac{D b v_s^2}{4} - \frac{A_{bt}}{4} \alpha_o^2 g D (\rho_s/\rho-1) C_b \mu_t \right] \dots\dots\dots ③⑥$$

つぎに、 A_s 、 v_s 、および P_s について検討すると次の様である。

Condolios and Chapus^{①①}、Gibert^{①②} は砂の堆積によって管路断面の一部が縮小された場合の測定を行い、次の関係が成立つ事を見出した。

$$\eta = \frac{v'_L}{\sqrt{4gRh}} = \frac{v_L}{\sqrt{gD}} = \text{const.} (2.1 \sim 2.3) \dots\dots\dots ③⑦$$

こゝに v_L : 堆積開始限界流速、 R_h : 砂の堆積によって縮小された管断面の径深、 v'_L : 縮小された断面における平流速である。

③⑦式の値を η とすると、常識的には $\eta = \eta(d, c)$ と考えられるものであるが、Condolios^{①①} 等が 23 インチと 28 インチの円管を用いて、 $C = 15 \sim 20\%$ の混合率で 8 種類の測定値をとったところ、一種類の例外を除けば、他は全て $\eta = 2.1 \sim 2.3$ の範囲におさまリ、定数と見做してよい程のものだったという事である。但し、0.4mm 以下の細砂は、これに従わなかったとも報告している。

Gibert^{①②} も数種類の管径の管に天然砂を流した場合は、 $\eta = 2.1 \sim 2.3$ である事を見出している。

③⑦の R_h は掃流砂の領域も含むので厳密には図-6の A_s の径深に対応するものとは異なるが、近似的に等しいと見做して、 $R_h \approx R_s (=A_s/P_s)$ とする。本報の対象としている流況に於ては、③⑦式の R_h としては A_s/P_s と $D/4$ とが交互に起り、 v'_L としては v_s と v_L とが間欠的に交替しているものと考えられる。もちろん、どちらか一方の値を維持し続ける場合も起り得る。ここに③⑦を

$$\frac{P_s v_s^2}{4gA_s} = \frac{v_L^2}{gD} = \eta^2 (\approx \text{const.}) \dots\dots\dots ③⑦'$$

と書き直して③⑥に代入すると

$$Q_s = \frac{i_c}{w_o(\rho_s/\rho-1)} \left[A_s v_s^2 \left(1 - \frac{D}{4R_s} \right) + g R_s \eta^2 b D - \frac{A_{bt}}{4} \alpha_o^2 g D (\rho_s/\rho-1) C_b \mu_t \right] \dots\dots\dots ③⑧'$$

となり、上式において、管底の砂層が移動している場合を考えて、 $R_s = D/4$ とすると

$$Q_s = \frac{i_c}{w_o(\rho_s/\rho-1)} \left[\frac{g D^2}{4} \eta^2 b - \frac{A_{bt}}{4} \alpha_o^2 g D (\rho_s/\rho-1) C_b \mu_t \right] \dots\dots\dots ③⑧$$

と書ける。こゝで、上式の b や A_{bt} について再検討すると、②②や②④において $i_c/8C_b(\rho_s/\rho-1)\mu_t$ の値は、せいぜい大きくても 0.1 以下である事が予想され、また図-7の様な事情も併せて考慮すると、これを 1 に比べて充分に小さいものとして扱って

$$b \approx D \left(\frac{i_c}{C_b(\rho_s/\rho-1)\mu_t} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots ②②'$$

$$A_{bt} = \frac{D^2}{2\mu_t} \left(\frac{i_c}{C_b(\rho_s/\rho-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3\mu_t} + \frac{1}{2\mu_s} \right) \dots\dots\dots (25')$$

を使用する事にする。さらに、つぎの無次元量を導入する。

$$\alpha_1 = \frac{v_{*c}}{w_o} \dots\dots\dots (39)$$

$$\alpha_2 = \frac{i_c}{i_w} \dots\dots\dots (40)$$

ここに、37式より i_{wt} は

$$i_w = \frac{f}{2} \eta^2 \dots\dots\dots (41)$$

と書ける。22'、25'、39、40、41を用いると、浮遊砂量 Q_s は次の様に与えられる。

$$Q_s = \frac{\alpha_1 D^{\frac{5}{2}}}{2(\rho_s/\rho-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{g}{\mu_t C_b} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{f\alpha_2} - \frac{\mu_t}{2} \left(\frac{1}{3\mu_t} + \frac{1}{2\mu_s} \right) \alpha_2^2 \right] i_c^2 \dots\dots\dots (42)$$

C) 全 流 砂 量

全流砂量は、24式で表わされる掃流砂量と42式で与えられる浮遊砂量の和となる。従って、全流砂量 Q_o は

$$Q_o = Q_B + Q_s \dots\dots\dots (43)$$

で与えられる。但し、29においても $i_c/8C_b(\rho_s/\rho-1)\mu_t$ が1よりも充分に小さいとして、近似式

$$Q_B = \frac{\alpha_o D^{\frac{5}{2}}}{4(\rho_s/\rho-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{g}{\mu_t C_b} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3\mu_t} + \frac{1}{2\mu_s} \right) i_c^2 \dots\dots\dots (29')$$

を用いると、次の様な最大流砂量を与える式が得られる。

$$Q_o = \frac{D^{\frac{5}{2}}}{4(\rho_s/\rho-1)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{g}{\mu_t C_b} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{4\alpha_1}{f\alpha_2} + \alpha_o \left(\frac{1}{3\mu_t} + \frac{1}{2\mu_s} \right) (1 - \alpha_o \alpha_1 \mu_t) \right] i_c^2 \dots\dots\dots (44)$$

4. 理論式の検討

筆者の理論式(44)は図-6のモデルに基づいて誘導されたものであるが、これを従来の実験結果と比較することによって検討する事にする。従来の実験結果を表わす式は一般に

$$\phi = \frac{i - i_w}{C i_w} = K (F_r)^{-\beta} \dots\dots\dots (45)$$

の形をもつ、ここに

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gD(\rho_s/\rho-1)}} \dots\dots\dots (46)$$

である。(45)式の K と β は表-2の通りである。

筆者は、序説に述べた様な立場から、筆者の理論式と *Durand* の式との比較を行う。筆者のモデルは最大流砂濃度(図-4のA点)を対象としたものであるが *Durand* の実験式(2)は堆積を生じない全ての範囲を対象としている。*Durand* の実験式から最大流砂量を与える式を以下の様に誘導する。

水だけを流した場合の動水勾配 i_{wt} は

$$i_w = f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g} \dots\dots\dots (47)$$

であるから、(46)と(47)から

$$i_w = \frac{f}{2} (F_r)^2 (\rho_s/\rho-1) \dots\dots\dots (48)$$

となる、つぎに(45)を變形すると

$$C = \frac{(F_r)^\beta}{K} \left(\frac{i}{i_w} - 1 \right) \dots\dots\dots (49)$$

研 究 者	K	β	文 献
Durand 他 (表-1)	$81C_D^{\frac{3}{4}}$, or 120	3	表-1
Bonnington	$150C_D^{-\frac{3}{4}}$	3	(16)
Ellis and Round	$385C_D^{-\frac{3}{4}}$	3	(17)
Babcock	$81C_D^{-\frac{3}{4}}$	3	(18)
寺 田	$8.5\mu_o/f$	2.9	(19)
八 木 他	$180C_D^{-0.775}$	$3.1 (d > 2mm)$	(8)
	$200C_D^{-1.05}$	$4.2 (d < 2mm)$	
Zandi and Govatos	$280C_D^{-0.965}$	$3.86 (F_r^2 \sqrt{C_D} < 10)$	(20)
	$6.3C_D^{-0.177}$	$0.71 (F_r^2 \sqrt{C_D} > 10)$	

表 - 2

となり、これに(49)を代入して、流送混合率を与える式は

$$C = \frac{(F_r)^\beta}{K} \left[\frac{2i}{f(F_r)^2(\rho_s/\rho-1)} - 1 \right] \dots\dots\dots (50)$$

と書かれ、上式から混合率Cを最大にする F_r を

$$\frac{\partial C}{\partial F_r} = 0 \dots\dots\dots (51)$$

の条件を用いて求めると、 C_{max} を与える $F_r = F_{rcr}$

$$F_{rcr} = \left(\frac{2(\beta-2)i}{\beta(\rho_s/\rho-1)f} \right)^{\frac{1}{\beta}} \dots\dots\dots (52)$$

が得られる。上式の F_{rcr} は(49)に於て、Cを最大にするための最適管径と最適流速の相互関係を規定するものであり、また(50)においてCを最大にするものである。

これを特に限界フルード数 (Critical Froude Number) と呼ぶ事にする。また、(52)式中の*i*は、最大混合率 C_{max} に対応するものであるから、この*i*は i_c と書き直さなければならない。(図-4)

(52)を(50)に代入すると C_{max} が得られ、

$$C_{max} = \frac{2}{K\beta^{\frac{\beta}{2}}} (\beta-2)^{\frac{\beta}{2}-1} \left[\frac{2i_c}{f(\rho_s/\rho-1)} \right]^{\frac{\beta}{2}} \dots\dots\dots (53)$$

となり、本報の主題である最大流砂量の値は

$$Q_o = \frac{\pi}{4} D^2 v_L C_{max} \dots\dots\dots (54)$$

であるから、上式の v_L (限界堆積流速)に $v_L = F_{rcr} \sqrt{gD(\rho_s/\rho-1)}$ を用い、(53)と(52)を代入すると(54)は

$$Q_o = \frac{\pi}{4} D^{\frac{5}{2}} \left(\frac{2g(\beta-2)i_c}{\beta f} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2(\beta-2)^{\frac{\beta}{2}-1}}{K \beta^{\frac{\beta}{2}}} \left[\frac{2i_c}{f(\rho_s/\rho-1)} \right]^{\frac{\beta}{2}} \dots\dots\dots (55)$$

と書かれる。上式にDurandの実験式の指数 $\beta = 3$ を入れると

$$Q_o = \frac{2\pi}{9} D^{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{g} i_c^{\frac{3}{2}}}{K f^{\frac{1}{2}} (\rho_s/\rho-1)^{\frac{3}{2}}} \dots\dots\dots (56)$$

が得られる。上の(56)式を筆者の理論式(44)と比較すると、どちらも $Q_o = K_o i_c^{\frac{3}{2}}$ の形を持ち、関数形が一致している。

更に、本報の解析の過程において(54)または(55)で与えられる掃流砂の濃度も、(56)式で表わされる浮遊砂の濃度も、ともに $i_c^{\frac{3}{2}}$ に比例しており、(一般に $v_o \propto i_c^{\frac{1}{2}}$ とする事が出来るから)、これは(53)式にDurand式の指数 $\beta = 3$ を代入した場合と一致する。

筆者は、本理論の展開過程において、円管内の最大流砂濃度は $i_c^{\frac{3}{2}}$ に比例する事を理論的に説明したが、

Durand 式の $\beta = 3$ は、この事が実験結果として顕われ出て来た事にほかならない。

Durand の実験式の指数 $\beta = 3$ の物理的意味は、これで明らかになったと思われる。

一般に、管路の平均流速は i_c に比例する事は周知の通りであるが、本理論の場合にも平均流速と平均濃度の積が i_c^2 に比例する事になり、 $Q_0 = K_0 i_c^2$ の形になったのである。

一方 Durand 式の係数 K については、筆者の理論による 40 式と、実験式から誘導した 50 式から次の様な内容を持つ事が判る。

$$\frac{1}{K} = \frac{9f^2}{8\pi(\mu_t C_b)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{4\alpha_1}{f\alpha_2} + \alpha_o \left(\frac{1}{3\mu_t} + \frac{1}{2\mu_s} \right) (1 - \alpha_o \alpha_1 \mu_t) \right]$$

すなわち、実験式の係数 K は、 f 、 C_b 、 μ_t 、 μ_s 、 v_b/v_{*c} 、 v_{*c}/w_o 、 i_c/i_w 等の諸水理量を内蔵している事が判った。

これ等の各因子の累積が、特定値 $K = 81 C_D^{-\frac{3}{4}}$ に収束する事を実験結果は示しているが、この事の理論的根拠については、本解析法では説明し得なかった。

しかし、Durand 式の係数が、どのような物理的内容を持つかについては、可成り明らかになったと思われる。この係数 K については、現在検討中である。

5. 結 語

Durand の実験式の根底となる力学的機構を検討する意図から解析を試みたが、管水路内の流砂現象、主として掃流砂に関しては、その力学的機構をある程度明らかにする事が出来た。

これを基にして、Durand の実験式の指数 $\beta = 3$ の持つ意味を検討し、これを物理的に明らかにした。

しかし、この式の係数 K に関しては、管内の浮遊砂の流動機構に不明確な点が多い事もあって若干の検討の余地を残す段階に留まった。今後は、この管内浮遊流機構を明らかにしてゆきたい。

〔謝辞〕 本研究に当って、永年にわたって懇切な御指導を賜った、中央大学の林泰造教授に深く感謝の意を表するものである。

また、文献の収集に際して、好意的な御協力と有益な助言をたまわった、徳島大学の杉尾捨三郎教授、高知大学の上森千秋教授、近森邦英助教授、玉井佐一助教授に心からの謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- (1) Durand, R.: Basic Relationship of the Transportation of Solids in Pipes-Experimental Research, Proc. Minnesota International Hydraulic Convention, I.A.H.R., (1953)
- (2) Ismail, H.M.: Turbulent Transfer mechanism and Suspended Sediment in closed Channels, Proc. ASCE, Feb. (1951)
- (3) Worster, R.C.: Proc. Colloq. on Hydraulic Transport of Coal, Nat. Coal Board, London (1952)
- (4) Bonnington, S.T.: Experiment on the Hydraulic Transport of Mixed-Sized Solids, British Hydrom. Res. Associ. PR637 (1959)
- (5) Smith, R.A.: Experiments on the Flow of Sand-Water Slurries in Horizontal Pipes, Trans. Inst. Chem. Engrs. Vol. 33, no. 2. (1955)
- (6) Graf, W.H.: Sediment Transport in Closed Pipes, "Hydraulics of Sediment Transport." McGraw-Hill Publishing Co. Inc. New York (1971)
- (7) 小川元: 管内における浮遊流砂の流砂量について、土木学会誌、第 40 巻、第 9 号 (1955)
- (8) Yagi, T. et al.: An Analysis of the Hydraulic Transport of Solids in Horizontal Pipelines, Report of the Port and Harbour Research Institute, Vol. 11, No. 3, Sept. (1972)
- (9) 都田昌之、今野宏卓、斉藤正三郎、前田四郎、: 水平、垂直固液混相流について、化学工学、第 33 巻、

第一号 (1969)

- (10) Robinson, M.P. and Graf, W.H.: Pipelining of Low-Concentration Sand-Water Mixtures, Proc. ASCE, July, (1972)
- (11) Condolios, E. and Chapus, E.E.: Designing Solid-Handling Pipelines, Chem. Eng., June-July, (1963)
- (12) Howard, G.W.: Transportation of Sand and Gravel in a Four-inch Pipe, Trans. ASCE, Vol. 104, (1939)
- (13) 芦田和男、道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究、土木学会論文報告集、第206号 (1972)
- (14) Bagnold, R.A.: The Flow of Cohesionless Grains in Fluids, Philosophical Trans. Royal Soc. of London, Vol. 249, (1957)
- (15) Robinson M.P. and Yucel, O.: Discussion on "Sediment Transportation Mechanics: J. Transportation of Sediment in Pipes. " , Proc. ASCE, March, (1971)
- (16) Bonnington, S.T., British Hydrom. Res. Associ. Tech. Note 708, (1961)
- (17) Ellis, H.S. and Round, G.F.: Laboratory Studies on the Nickel-Water Suspensions, The Canadian Mining and Metallurgical Bulletin, October, (1963)
- (18) Babcock, H.A.,: The State of the Art of Transporting Solids in Pipelines, Chem. Eng. Progr. Symposium Series, No. 48 60, 36 (1964)
- (19) 寺田進: 固体混合液の管路輸送—流動理論と抵抗計算法—, 理工図書 (1973)
- (20) Zandi, I. and Govatos, G.,: Heterogeneous Flow of Solids in Pipelines, Proc. ASCE, Vol. 93, May, (1967)