

不定流の数値計算法の洪水問題への適用 Applications of Numerical Method of Unsteady Flow to Flood Problems

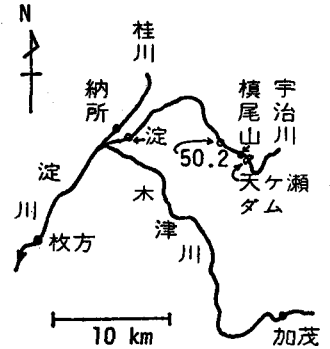
京都大学工学部 正員 井上 和也
京都大学工学部 正員 岩佐 義朗
建設省近畿地建 正員 宮井 宏

1. はじめに

本報は一様水路とはみなされない実際の河川における不定流の数値計算法を、hindcasting としての洪水追跡だけでなくもう少し異なった種類の問題にも適用しようとしたもので、その1つは任意に想定されたハイドログラフを境界条件とする洪水流をあらかじめ計算しておくことにより型紙方式的な洪水予報技術への応用を考えるものであり、もう1つはある河道区間の下流で観測された流量および水位ハイドログラフからそれより上流のハイドログラフを算出する洪水の遡上追跡である。

計算で対象とした河川は図・1に示される淀川の中・下流部である。この区間には木津川、宇治川（淀川本川）および桂川の三川の合流点が含まれており、洪水流の複雑な挙動が予想されるとともに、とくに宇治川が木津川および桂川からの背水の影響を強く受けるので、その上流の天ヶ瀬ダムの放流操作はきわめてむずかしいものになっており、この区間での洪水流の特性を詳細に把握しておくことが必要とされている。

本報で用いた数値計算法は、著者らが従来より実際の河川における洪水流の追跡法としている固定格子点についての特性曲線法である¹⁾。この方法はある点における流れの影響が dynamic waves によってそれより上・下流（ただし、流れを常流として）へ伝播されるという流れの水理学的な特徴を反映したもので、ここでの計算で必要とされる合流点からの背水の影響の評価や遡上追跡を有効に行なう方法である。



図・1 淀川中・下流部

2. 特性曲線法による数値計算法

洪水流のような漸変な不定流の基礎式として、つぎの連続式とエネルギー式を用いる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = s_o - s_f \quad \dots\dots (2)$$

ここで、 $s_o (= \sin \theta)$ は底こう配であり、また s_f は摩擦こう配で抵抗則として Manning 公式によるとき $s_f = n^2 v^2 / R^{4/3}$ である。(2)式は全エネルギー水頭 $H = z + h \cos \theta + \alpha v^2 / 2g$ (z : 基準面から河底までの高さ、 $z + h \cos \theta$: 基準面から水面までの高さ、つまり水位)を用いれば、つぎのように改められる。

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = -s_f \quad \dots\dots (3)$$

(1)および(3)式がここで用いる基礎式である。これらは双曲型の微分方程式でつぎの特性曲線による表示に改められる。すなわち、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v \pm c \quad \dots\dots (4)$$

に沿って

$$\frac{\cos \theta}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c \right) \left(\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + s_f \right) = 0 \quad \dots\dots (5)$$

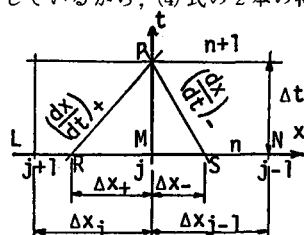
が成立する（複号同順）。ここで、 B は水面幅であり、また

$$c = \sqrt{\left(\frac{\alpha-\beta}{2\beta} v\right)^2 + \frac{gA \cos \theta}{\beta B}} \quad \dots\dots (6)$$

である。(4)式が $x-t$ 平面においてdynamic waveの伝播の軌跡を示す特性曲線の方程式であり、(5)式はdynamic waveによって上・下流に伝えられる影響を表わしている。いうまでもなく、(5)式中の微分はそれぞれの特性曲線の方角に沿ってとられなければならない。

さて、特性曲線法による従来の不定流の数値計算では、水路は一樣であるか、または幅が十分広く単位幅での取扱いが可能であると仮定されたり(ある場合には暗黙のうちに)、あるいは水路断面を長方形に置き換えて、従属変数の1つを(6)式の c に変換することが行なわれている(Stoker²⁾)。しかし、一樣水路ではない実際の河川への適用を考えると、上述のような仮定や置き換えは必ずしも適切でなく、また便利でもない。ここでは、現在実際の河川について広く行なわれている不等流の計算法と同じ程度の適用性を有する不定流の計算法を導くため、 x 方向の微分の差分化を特性曲線の方角に応じて変化させるCourant-Isaacson-Reesの方法³⁾を適用して、(5)式をそのまま差分化することにする。流れを常流としているから、(4)式の2本の特性曲線の方角は異符号であって $x-t$ 平面での配置は図・2のようになる。

これを参照して、(5)式を差分化するのに $\partial F/\partial t \approx (F_P - F_R)/\Delta t \approx (F_P - F_M)/\Delta t$ (ただし F は A 、 v 等の変数)とし、また $(dx/dt)_+$ に沿って成立する(5)式の正号の式においては $\partial F/\partial x \approx (F_P - F_R)/\Delta x_+ \approx (F_M - F_L)/\Delta x_j$ 、 $(dx/dt)_-$ に沿って成立する(5)式の負号の式においては $\partial F/\partial x \approx (F_S - F_P)/\Delta x_- \approx (F_N - F_M)/\Delta x_{j-1}$ とすれば、つぎの結果が得られる。



図・2 特性曲線法の差分格子

上流から下流に伝わる関係(5)式の正号の式)：

$$\left(\frac{\cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - \frac{q_j^n + q_{j+1}^n}{2} \right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2\beta} v + c\right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_j^n - H_{j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{fj}^n + s_{fj+1}^n}{2} \right) = 0 \quad \dots\dots (7.1)$$

下流から上流へ伝わる関係(5)式の負号の式)：

$$\left(\frac{\cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j-1}^n - Q_j^n}{\Delta x_{j-1}} - \frac{q_{j-1}^n + q_j^n}{2} \right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2\beta} v - c\right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{j-1}^n - H_j^n}{\Delta x_{j-1}} + \frac{s_{fj-1}^n + s_{fj}^n}{2} \right) = 0 \quad \dots\dots (7.2)$$

この差分式の特徴は、特性曲線の方角そのものは差分式に含まれていないことおよび添字が n の量は初期条件あるいは前回の計算結果より既知であって未知数は A_j^{n+1} と v_j^{n+1} の2個であり、これらがexplicitに解かれることにある。つぎに、(7.1)および(7.2)式による解法について述べる。(i) 中間点：境界条件の課せられている境界点や分・合流点以外の中間点では、(7.1)および(7.2)式より連立的に A_j^{n+1} 、 v_j^{n+1} が計算される。(ii) 境界点：上流端においては境界条件と(7.2)式、下流端においては境界条件と(7.1)式から解が求められる。したがって上・下流端のいずれにおいても課せられる境界条件は1個(たとえば水位ハイドログラフや、水位・流量曲線など)に限られることになる。(iii) 分・合流点：複雑な現象が予想されるので、計算法もそれを取り入れたものでなければならないが、最も単純なのは水位と流量の連続条件を用いることであろう。2河川が合流するとき、合流点より上流の2河川から(7.1)式、合流点より下流の河川より(7.2)式の計3個の式と先の連続条件とから収束計算によって解が求められる。(iv) 初期条件：初期条件には定常流(不等流)が与えられるものとし、計算法としつぎの標準逐次計算法がとられるとする。

$$Q_{j+1} = Q_j - (q_{j+1} + q_j) \Delta x_j / 2, \quad H_{j+1} = H_j + (s_{fj+1} + s_{fj}) \Delta x_j / 2 \quad \dots\dots (8)$$

上式は、非定常項が無いとしたとき、すなわち $A_j^{n+1} = A_j^n$ 、 $v_j^{n+1} = v_j^n$ という定常状態を考えたときの(7.1)および(7.2)式を自動的に満たす関係に他ならない。つまり、(8)式の標準逐次計算法は(7.1)および(7.2)式の不定流の計算法の特種な場合とみなされるときにも、逆に(7.1)および(7.2)式は定常流としての不等流の計算法に非定常成分の計算式が重ね合わされたものといえる。(v) 安定性：周知のように(7.1)お

よび (7.2) 式の安定性の必要条件は、つぎの CFL 条件および Vasiliev の条件である。

$$\text{CFL 条件: } \Delta t < \Delta x / |(dx/dt)_+|, \quad \text{Vasiliev の条件: } \Delta t < v / g s_0. \quad \dots\dots (9)$$

後者の条件は、 Δt が dynamic wave の減衰の時間スケールである $v / g s_0$ より小さくなければならないことを示すもので、 Δt の大きさを直接制限し河床こう配の急な河川では問題となる。しかし伊藤⁴⁾が導いているように (7.1) および (7.2) 式の摩擦項の評価をそれぞれ $(s_{fj}^{n+1} + s_{fj+1}^n) / 2$ および $(s_{fj-1}^n + s_{fj}^{n+1})$ と改めれば Vasiliev の条件は現われない。

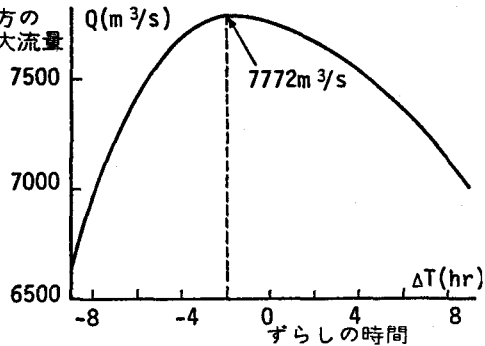
3. 淀川中・下流部における洪水追跡への適用

淀川における洪水処理計画においては、現在ダム群による統合的な放流操作が淀川を 1 つのシステムとしてみる立場より行なわれることになっており、洪水の統合管理の基礎となるべき洪水追跡計算には淀川の全流域を 39 個の流域要素と 19 個の河道要素に分割した貯留関数法が適用され、任意に想定された規模の降雨に対して 58 個の地点における流量ハイドログラフが算出されるようになっている。しかしこの方法では空間的な集中化のスケールが大きいので、淀川中・下流部における洪水の挙動について詳細な情報が得られない点に問題があり、これを補うために前述した特性曲線法による不定流計算が行なわれている⁵⁾。ここではこの不定流計算法を用いて基準地点である枚方の最大流量の発生を検討した結果について述べる。枚方に大きい流量をもたらすのは、木津川および桂川に相当の出水があつて、しかもそれぞれの最大値が枚方において同時に合致する場合であろう。表・1 は淀川における過去の著名の 8 洪水について上記の貯留関数法によって求められた枚方、加茂および納所^{*})における流量の最大値とその生起時刻をまとめたものである。これらの 8 洪水

出 水 名	5313	5907	1028	6524	5615	5817	5915	6016
枚 方 (m ³ /s)	8027	6565	7746	5929	4072	4603	5986	3621
生起時刻 (月/日/時)	9/26/ 2	8/14/13	10/28/16	9/18/ 7	9/27/20	8/26/ 8	9/27/7	8/30/17
加 茂 (m ³ /s)	4834	4065	5016	4088	3412	3998	4780	1041
生起時刻 (月/日/時)	9/25/21	8/14/ 8	10/28/11	9/18/ 1	9/27/14	8/26/ 2	9/27/1	8/30/ 3
納 所 (m ³ /s)	2770	2604	2039	2030	872	537	1337	2635
生起時刻 (月/日/時)	9/25/22	8/14/ 5	10/28/14	9/17/23	9/27/17	8/26/14	9/27/8	8/30/15

表・1 貯留関数法によって求められた最大流量

のうち上記の条件を満たしているのは 5313 出水および 1028 出水であろう。そこで出水の時間のずれが枚方の最大流量にどのような影響を与えるかをさらに詳しくみるため、出水規模の大きい 5313 出水について納所の流量ハイドログラフを時間的にずらせた計算を行なった。境界条件として加茂においては貯留関数法によって求められた流量、宇治川 50.2 km (宇治橋の下流) では天ヶ瀬ダムの放流流量に宇治川発電所の放水流量を加えた流量、枚方では昭和 50 年に設定された水位-流量曲線を与えることにし、納所^{**)}においては貯留関数法によって求められた流量ハイドログラフを時間 ΔT ($\Delta T > 0$ で納所の出水が実際より速くなる) ずらせて与えた。(河道の総延長 61 km, 断面数 37, 平均区間距離 2 km, $\Delta t = 60$ 秒) 図・3 は計算結果より、 ΔT と枚方の最大流量の関係を示したもので、この図より 5313 型出水の場合 $\Delta T = -2$ 時間つまり納所の出水が実際よりさらに 2

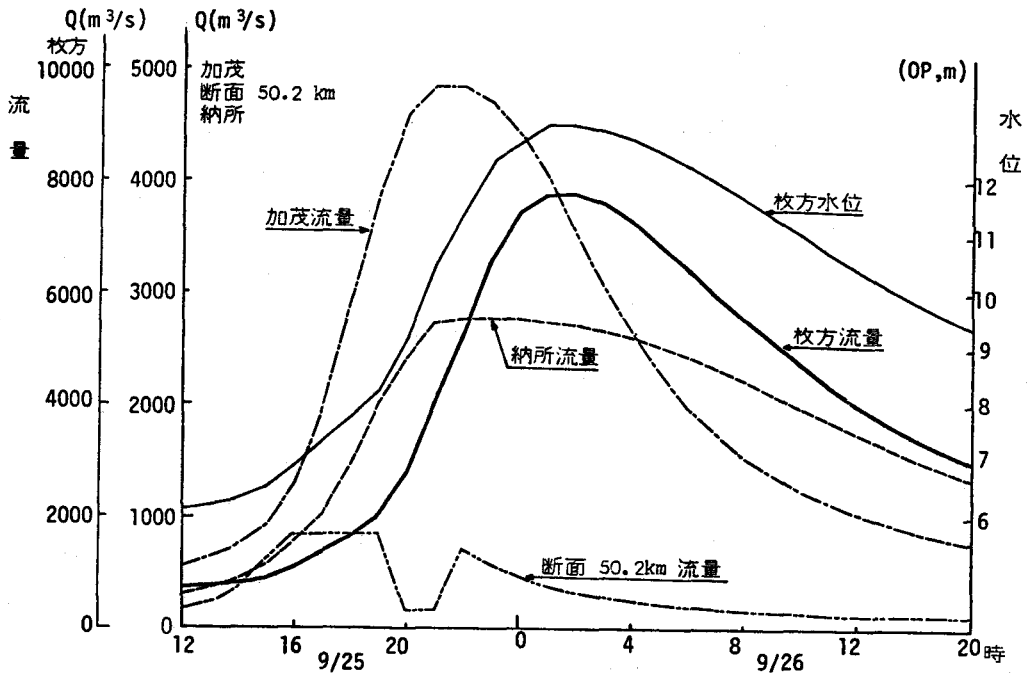


図・3 枚方の最大流量

* 貯留関数法の計算では納所より 3 km 上流の羽東師で流量

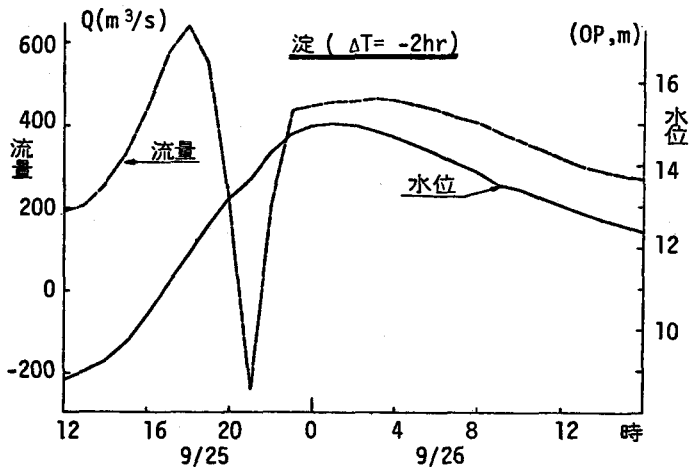
が求められるとされている。しかし後の不定流計算では河道資料等の都合より納所を桂川の上流境界点とし、羽東師の流量ハイドログラフをそのまま納所でのそれとした。

** 納所は実際には三川合流部からの背水の影響を受けると考えられ、境界点として好しくない。



図・4 $\Delta T = -2$ 時間の場合のハイドログラフ

時間遅れたときに最大*)になることが分る。図・4および5はこのときのハイドログラフのいくつかを示したものである。図・4で分るように、この型の出水では木津川（加茂）ではピークが明瞭なのに対し、桂川（納所）ではピークのあとの低減が緩やかであって、このため図・3のように $\Delta T > 0$ の部分では枚方の最大流量はあまり変化していない。図・5より、淀では三川合流部からの背水の影響が著しく、水位が相当高くなって天ヶ瀬ダムからの放流流量が制限され減少している時間には逆流の生ずることもありえ、はじめに述べたように同ダムの放流操作のむずかしさがうかがわれる。



図・5 $\Delta T = -2$ 時間の場合の淀のハイドログラフ

ここで述べた5313型出水の場合、桂川の流量の低減が緩やかなため ΔT が-3時間～-2時間の間では枚方の最大流量は大きくは変化せず、出水の時間差の影響は十分明瞭にとらえられなかった。しかし上記のように境界点で任意にハイドログラフを想定して不定流計算を実施することにより、洪水の挙動をあらかじめ知ることができるとともに、ダムの放流操作が適切であるかどうか判断できることになる。そして実際

*) 枚方の最大流量は貯留関数法による値よりやや小さい ($\Delta T = 0$ のとき $7755 \text{ m}^3/\text{s}$ で貯留関数法では表・1のように $8027 \text{ m}^3/\text{s}$)。この差は計算法の違いからは説明されない。貯留関数法におけるパラメータの値や不定流計算の境界条件についてはなお検討を要しよう。

に生じる洪水に対してこのような計算を行なっておけば、型紙方式的な洪水予報やダム放流操作への応用が考えられよう。

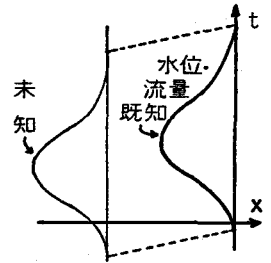
4. 遡上追跡

ここでいう遡上追跡とは下流で観測された流量および水位ハイドログラフが上流のどのようなハイドログラフによってもたらされたかを計算するもので、このような遡上追跡の適用の考えられる問題としてつぎのものが挙げられる。

(1) ダムの放流操作：ダムより下流のある地点で望ましい形のハイドログラフを得るには上流のダムの放流操作をどのように行なえばよいかを求める問題で、とくに懸案地点が他の河川から背水の影響を受けている場合が対象となる。

(2) 貯水池の流入ハイドログラフの算定：貯水池においては通常水面は水平であるとして、流出流量と水位変化から流入流量が求められているが、水面こう配が無視しえない場合にはこの方法は適切でない。このような場合の流入流量を求める問題である（ただし一次元解析法が適用されるとしておく）。

さてこの問題は通常の洪水追跡と比べ、(i)下流端で流量ならびに水位ハイドログラフが既知である、(ii)上流端のハイドログラフは未知である、という2点で異なっている（図・6）。この問題を解く手法の1つとして、上流端のハイドログラフを仮定し試行錯誤的に計算する方法が考えられるが、労力が大きく有効な方法とはいえない。ここで述べるのは、この問題が独立変数の x と t を入れ換えれば、「初期値問題」に他ならないことに注目して、先述の特性曲線法の考え方をそのまま適用したもので、その結果の計算式は差分格子を図・7のようにとるときつぎのように導かれる⁶⁾。



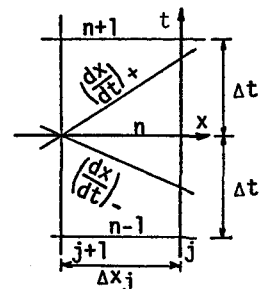
図・6 遡上追跡

$(dx/dt)_+$ に沿う関係：

$$\left(\frac{\cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - \frac{q_{j+1}^n + q_j^n}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v + c \right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_j^n - H_{j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{fj+1}^n + s_{fj}^n}{2} \right) = 0 \quad (10.1)$$

$(dx/dx)_-$ に沿う関係：

$$\left(\frac{\cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^n - A_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - \frac{q_{j+1}^n + q_j^n}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v - c \right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{H_j^n - H_{j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{fj+1}^n + s_{fj}^n}{2} \right) = 0 \quad (10.2)$$



図・7 遡上追跡の差分格子

ここで非斉次項は不等流計算との整合を考慮して上式のようにとられている。つまり定常状態で $A_j^{n+1} = A_j^n = A_j^{n-1}$, $v_j^{n+1} = v_j^n = v_j^{n-1}$ のとき、(10.1) および (10.2) 式は不等流の標準逐次計算法(8)式に帰着される。

(10.1) および (10.2) 式において未知数は添字 $(j+1)$ に関する量であって、2式より Q_{j+1}^n および $(H_{j+1}^n - s_{fj+1}^n \Delta x_j / 2)$ が連立的に解かれ、これより標準逐次計算法と同様の収束計算によって $(j+1)$ 断面での水位等が求められる。「境界条件」としては、 $t=0$ および $t=N\Delta t$ (N : t 方向の分割の総数) では不等流の関係(8)式が成立するとするのが自然であろう。また区間内に分・合流点が含まれる場合には、分・合流支川におけるハイドログラフが条件として必要とされるが、種々の場合が考えられ一般的な取扱いはむずかしいので、ここでは分・合流点はないものとしている。なお、(10.1) および (10.2) 式の安定性の必要条件はこの場合の CFL 条件 $\Delta t > \Delta x_j / |(dx/dt)_\pm|$ である。

計算例 対象区間は先と同じであり、6524 出水について遡上追跡を行なった。まず加茂、納所、横尾山および枚方において実測の水位ハイドログラフを境界条件として与え、通常の洪水追跡を行なった（出水資料等は文献7によった）。その結果の淀および横尾山における流量および水位ハイドログラフを示したのが図

8および9である。図に示されているこの出水での実測水位と計算水位を比較すれば、淀においては水位の上昇期の始めの部分、榎尾山においては水位の低減期に実測値と計算値のずれがみられるが、全体としてみれば両者はほぼ一致しており、最大値およびその出現時刻についても満足すべき結果といえよう（榎尾山については、低減期の実測水位—OP 15.3 m 程度—に対しては断面積が極端に小さくなっており、この断面の資料に少し不備があるようである）。

つぎに淀において計算された水位および流量ハイドログラフを新たに下流端条

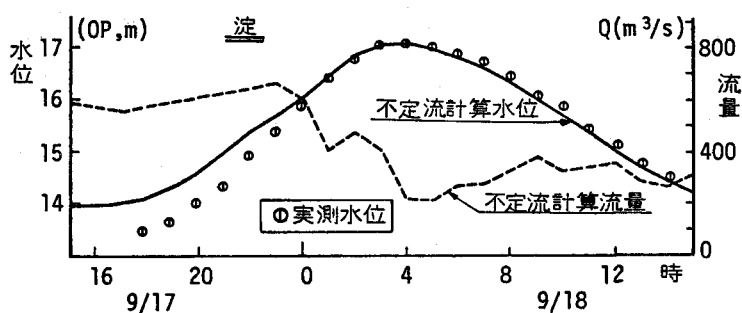


図8 淀のハイドログラフ (6524出水)

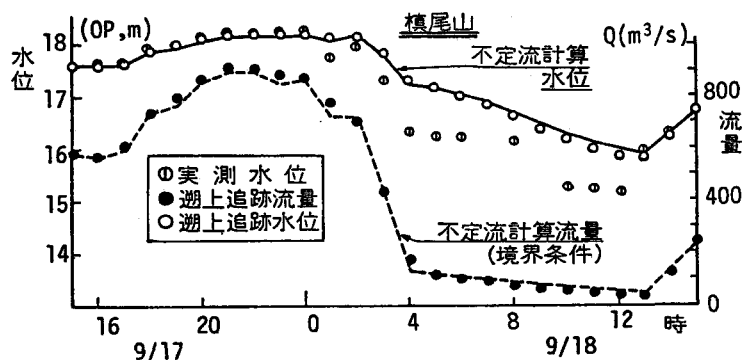


図9 榎尾山のハイドログラフ (6524出水)

件として、上流端の榎尾山まで遡上追跡を行なった（断面数9, $dx_{\max}=2.4$ km, $dt=900$ 秒）。その結果は図9に示されるとおりで、ハイドログラフがやや平滑化される傾向がうかがえるものの、ここでの遡上追跡によって上流のハイドログラフが十分な精度で再現されたとみることができよう。この方法によれば、たとえば淀において任意に水位ハイドログラフを想定したとき、これを境界条件として木津川および桂川を含めた通常の洪水追跡を行なって淀の流量を求め、これらを下流端条件として榎尾山まで遡上追跡すれば、結局淀において想定された水位ハイドログラフを実現するための榎尾山の流量（天ヶ瀬ダムの放流流量）が計算される。つまりこの方法によって先述したように下流に他河川から背水の影響を受ける懸案地点を有するダムの放流操作に関して1つの指針を得ることができることになる。

5. むすび

本報は特性曲線法による不定流の計算法について詳述するとともに、実際の河川における洪水処理問題へ適用されうる2つの例をとりあげ、それぞれについての試算の結果を示した。ここで述べた内容はいずれも適用の可能性を試みたものに過ぎず、実際問題への応用にあたっては、ここでは与件とされた多くの事項について詳しい検討が必要とされよう。

最後に、計算および作図に援助をいただいた栗林東一君（現熊谷組）ならびに大学院学生太田正規君に謝意を表します。

文献：1) 岩佐・井上・片山：京大防災研年報 19-B-2, 1976/ 2) Stoker, J. J., Water Waves, 1957/ 3) Courant, R., E. Isaacson and M. Rees, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol. 5, 1952/ 4) 伊藤剛編, 数値解析の応用と基礎, 1971/ 5) 淀川中・下流部不定流計算, 建設省淀川ダム統合管理事務所, 1977/ 6) 岩佐・井上・栗林・太田, 土木学会関西支部年講, 1977/ 7) 6524号出水の解析, 建設省近畿地方建設局, 1967.