

重回帰モデルによる洪水流出の解析

Analysis of Flood Flow Runoff by Multiple Regression Model.

農林省農業土木試験場

白石英彦

〃

正員

大西亮一

〃

○ 伊藤喜一

Ⅰ. まえがき

排水機場の設置を伴う排水計画や、洪水調節を目的とする防災ダムの管理や計画においては、洪水流出の適確な把握が必要不可欠である。従来、洪水流出の解析方法としては、Sherman の提唱した単位図をはじめとする線形解析法や、貯留関数法などにみられる非線形解析法など種々の方法が用いられていたが、特に1970年代初頭から、吉川・日野・鋤柄¹⁾をはじめとして、非線形応答理論に基く流出核の同定に関する種々の手法が提案されるに至り、流出解析の分野は大きな転換期をむかえようとしている。

本報文は、降雨一流出の系をBlack Box として考える立場をとり、その流出核の同定に応答関数としてVolterra Series を用いる非線形応答理論を基礎として、その離散的解析手法に重回帰分析を適用した流出解析法を論じたものである。

重回帰分析法による統計的単位図の算定法は、取り扱いが簡単であることから、従来から用いられていたが非線形流出核については論じられず、線形解析が主体をなしていた。近来、非線形応答理論の発展に伴い、非線形流出核の導入が考えられるようになったが、その算定に難点があり実用にはほど遠いものであった。

筆者らは、この問題に対して種々の検討を加え、一つの解決策を見い出したことを前回の報告で述べた⁵⁾。

前回の報告では、重回帰分析を用いた方法を長期間流出に適用し、次のような結果を得た。

- (1). 重回帰分析では、2次の項を含めて直接流出核を求める方法(直接法)は使用できない。
- (2). 奥野⁶⁾は2次の説明変数には平均からの差を用いて説明変数間の独立性を確保する方法により、直接法で解いているが、筆者らの方法の方が適合性は良い。
- (3). 直接法をさけるために、線形解析をまず先に行い、観測値と線形推定値との残差分に対して、非線形項をあてはめる方法が有効である。
- (4). 線形解析の適用限界を検討するには、F・M・D (Fixed Maximum Discharge) 解析手法が有効である。
- (5). 長期間流出に対して重回帰モデルは良好な適合結果を得る。

今回の報告では、重回帰モデルを洪水流出に適用し、短期間流出における有効性を検討した結果、良好な結果を得たのでここに報告する。

Ⅱ. 解析方法

今、流域をBlack Box と考えて、降雨一流出の関係がWiener 流のNon-linear System 理論に従うとすれば、現在時刻 t を原点として次式のようなVolterra Series で一般的に表示される。

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(n)} \cdots \int_0^{\infty} h_n(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{k=1}^n x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \quad (1)$$

- (1) 式を実用的には2次の項までとるものとすれば次式となる。

$$y(t) = h_0 + \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) \cdot x(t-\tau_1) \cdot d\tau_1 \\ + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \cdot x(t-\tau_1) \cdot x(t-\tau_2) \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2 \quad (2)$$

ここに、 $X(t - \tau_k) = Ar \cdot R(t - \tau_k)$

Ar : 流域面積, $R(t - \tau_k)$: 降雨強度 (mm/hour), $y(t)$: 河川流量 (m^3/sec), hn : n 次
の流出核, τ_k : 流出の時間遅れを示す積分変数

である。

したがって、(2)式の解法にその離散的表示の一つである重回帰分析を適用すれば、重回帰モデルの偏回帰係数 (流出核) の最良不偏推定値を b_0, b_i, a_{ij} 、推定流量を $Y(t)$ として次式を得る。

$$Y(t) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot X(t - \tau_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot X(t - \tau_i) \cdot X(t - \tau_j) \quad (3)$$

すなわち、偏回帰係数 b_0, b_i, a_{ij} が(2)式の $h_0, h_1(\tau_1), h_2(\tau_1, \tau_2)$ に対応する流出核であり、求めるパラメータである。パラメータの同定には最小二乗法を用いる。

今、観測値を $y(t)$ 、推定値を $Y(t)$ 、 $y(t)$ と $Y(t)$ との残差を $e(t)$ とすれば

$$E = \sum_{t=1}^P e^2(t) = \sum_{t=1}^P \{y(t) - Y(t)\}^2 \quad (4)$$

(4)式を $\frac{\partial E}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial E}{\partial b_1} = 0, \dots$ として得られる正規方程式を解けば、所要のパラメータは求められる。しかしながら、線形項 b_i と非線形項 a_{ij} を同時に解くと、説明変数相互に高い相関関係が存在するため、説明変数相互の独立性が保たれなくなり、正規方程式中に多重共線性が生ずる。したがって、算出された偏回帰係数の値が信頼性の薄いものとなるので、筆者らは、観測値 $y(t)$ から線形成分を取り除き、線形成分に対しては、線形項 b_i のみで示される線形重回帰モデルを適用し、線形モデルで表し得ない、観測値と線形モデルによる推定値との残差分、すなわち、非線形成分に対しては、2次の非線形モメント項 a_{ij} で示される非線形重回帰モデルで別途に計算を行う方法をとっている⁴⁾。また、線形モデルの適用限界には、F・M・D (FiXed Maximum Discharge) 法⁷⁾を用いることは前にも述べた。

III. 短期間流出解析データに対する適用

長期間流出 (主として日流出量) データに対して、筆者らの方法は良好な結果が得られたことは、前回の報告で述べその有効性が確かめられた。

それは、重回帰分析が平均値で現象をとらえることから、日平均流量として示される比較的定常の長期間のデータに対しては、優れた適合性を示すことは当然考へうることである。

ところで、これを短期間の洪水流出 (主として時間流出量) データに対して適用した場合どうであろうかという疑問が生じる。

本報告では、以下に述べる10波の時間洪水流出データに本手法を適用し、短期間流出に対する重回帰モデルの有効性の有無を検討した。

解析地区は、Fig.1に示す熊本県矢形川天君地区 (流域面積 9.9 km^2) であり、洪水時の河川流量は10波あるが、測定期間は1洪水波につき、1～3日程度である。また、降雨データは1地点のみで、流量の1～3日前からのデータを用いている。

IV. 解析結果の検討

洪水流出の解析には、統計的流出予測があまり用いられなかった。その原因は、1波や2波の洪水データでは統計量として不足であることと、誤差の影響を取り去ることができず、その影響を直接に受けることが

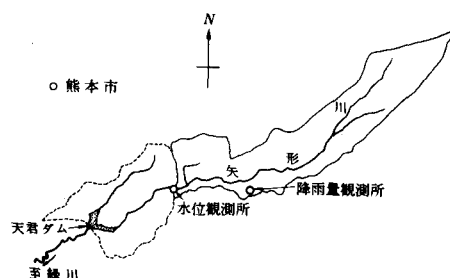


Fig1 洪水流出の解析地区の流域図

原因で、統計的単位図がうまく求められなかったためであると考え。

1. 多くの洪水波データを用いた重回帰モデルの算定

Fig.2はここで用いた10波の1つ1つについて、線形解析による統計的単位図を求めたものである。結果として、1つ1つの洪水波について求めた統計的単位図は振動が激しく、非常に不安定であり、偏回帰係数に負値を生じているものもあって、物理的にも単位図として受け入れ難いものが多い。

一方、10波の洪水波すべてのデータを用いて解析すると、Fig.2のNo.12のような統計的単位図を得る。すなわち、10波の洪水波が1つの単位図にまとまり、誤差の影響と統計量の不足による不安定性は解消される。また、No.11の単位図は、一洪水波の統計的単位図に与える影響を検討するために、10番目の洪水波を除いて算定したものである。No.12の単位図にほぼ等しい値を得、その影響はあまり強くない。

2. 降雨の自己相関と偏回帰係数の独立性の検討

Fig.3は、10波の洪水波に対する降雨系列の自己相関を示す。降雨系列 $X(t)$ の自己相関係数 $C_{xx}(\tau)$ は、

$$C_{xx}(\tau) = \overline{X(t) \cdot X(t-\tau)} / \overline{X^2(t)} \quad (5)$$

$$\text{あるいは、} \quad C_{xx}(\tau) = \overline{\{X(t) - \bar{X}\} \cdot \{X(t-\tau) - \bar{X}\}} / \overline{\{X(t) - \bar{X}\}^2} \quad (6)$$

で示される。本報告では(6)式を用いている。

結果より、 $\tau = 1 \sim 2$ では若干弱い相関がみられるが、 $\tau \geq 3$ ではほとんど相関はみられない。また、 $\tau \geq 10$ ではほぼ一定の負の相関になるのは、無降雨状態に対する影響のためであると思われる。この結果から、降雨系列はほとんどランダムであると考えてさしつかえないであろう。

Fig.4は、10波の洪水波データを用いた時の解析で、降雨の時間遅れの項が単位図にどのような影響を与えるか、また時間遅れを何時間とればよいかを検討するために、時間遅れを1時間づつ増加させた解析を行った結果を示したものである。この結果から、前報で論じた長期間流出の場合と同様に、 b_i の値は時間遅れの増加の影響をほとんど受けないことが理解され、Fig.3の結果とあわせて、説明変数(降雨系列)の独立性が保たれていることがわかる。

ただ、長期間流出の場合と異なるのは、各時間遅れで求めた b_i の最後の値が大きくなることが、検討の余地がある。ここにおける線形解析のlag timeは、 $\tau = 37$ 時間をとるものとした。

3. 降雨系列と時間流量系列の相互相関

降雨系列 $X(t)$ と時間流量系列 $y(t)$ の相互相関係数 $C_{xy}(\tau)$ は統計的には次のように表される。

$$C_{xy}(\tau) = \overline{X(t-\tau) \cdot y(t)} / \sqrt{\overline{X^2(t-\tau)} \cdot \overline{y^2(t)}} \quad (7)$$

$$\text{あるいは、} \quad C_{xy}(\tau) = \overline{\{X(t-\tau) - \bar{X}\} \cdot \{y(t) - \bar{y}\}} / \sqrt{\overline{\{X(t-\tau) - \bar{X}\}^2} \cdot \overline{\{y(t) - \bar{y}\}^2}} \quad (8)$$

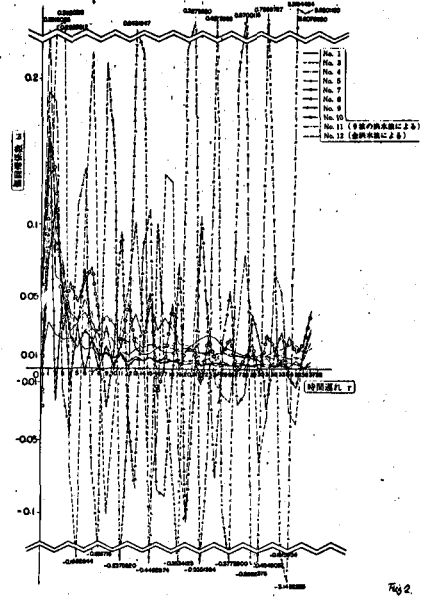


Fig.2 種々の洪水波に対する統計的単位図

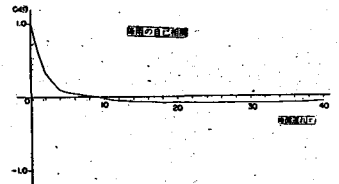


Fig.3 降雨系列の自己相関

Fig.5は、(8)式を用いて算出した降雨と流出量の相互相関を示したもので、二つの系列の関連性を知ることができる。すなわち、 $\tau=1$ において相関が高く、1時間遅れの降雨の影響が卓越していることを示している。したがって、統計的単位図として算出された、線形の偏回帰係数 b_i の変化とも対応した関係をもっている。

4. F・M・D 解析による線形モデルの選定と非線形流出核の算定

Fig.6は、F・M・D 解析によって、各段階のF・M・Dにおける線形流出モデルの精度の指標である重相関係数と、分散比 F 値、及び線形モデルの $\sum b_i$ で示される流出率を検討したものである。大きな洪水波をデータの中に導入しても線形近似に歪を生じていないことから、この流域は比較的に線形性の強い流域であると考えられる。

また、Fig.7は各F・M・Dごとに算出された統計的単位図である。大きな洪水波が導入されるに従い単位図のピークも増加している。

ここで、解析誤差及び線形あるいは非線形モデルの精度の評価を示す重相関係数 R 、及び分散比 F は次のように表される。

観測流量を $y(t)$ 、推定流量を $Y(t)$ 、 n をデータ数、 k を説明変数の数とすると

$$R = \frac{\sum_{t=1}^n \{y(t) - \bar{y}\} \{Y(t) - \bar{Y}\}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \{y(t) - \bar{y}\}^2 \cdot \sum_{t=1}^n \{Y(t) - \bar{Y}\}^2}} \quad (9)$$

$$F = V_R / V_E$$

$$V_R = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^n \{Y(t) - \bar{Y}\}^2$$

$$V_E = \frac{1}{n-k-1} \sum_{t=1}^n \{y(t) - Y(t)\}^2$$

さらに、線形モデルの流出率 r_1 は

$$r_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T Y_1(t) dt}{\int_0^T A \cdot R(t) dt} = \sum_{i=1}^n b_i \quad (11)$$

ここに、 $y(t)$: 観測流量、 $Y(t)$: 推定流量、 $\bar{y}$ 、 $\bar{Y}$: 平均値、 $R(t)$: 降雨量、 A : 流域面積、 $Y_1(t)$: 線形推定値 である。

したがって、線形流出モデルは、その精度の指標が最大となるF・M・D = 40 m/sec のモデルを用いるものとし、実測値とこの線形モデルの残差に対して求めた2次の偏回帰係数（非線形流出核）がFig. 8である。lag timeは、 $\tau_1 = \tau_2 = 9$ 時間をとった。

また、2次の非線形流出モデルによる流出率 r_2 は、

$$\begin{aligned} r_2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T Y_2(t) dt}{\int_0^T A \cdot R(t) dt} \\ &= \frac{A \cdot \bar{R}^2}{\bar{R}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m a_{ij} \frac{\bar{R}_i \bar{R}_j}{\bar{R}^2} \end{aligned} \quad (12)$$

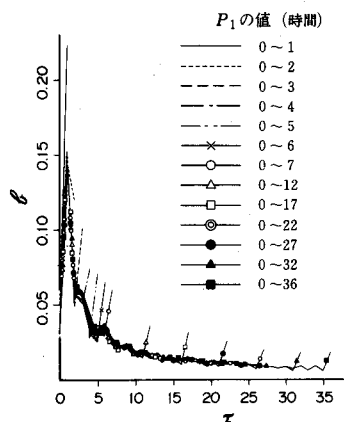


Fig.4 時間遅れの影響に対する偏回帰係数の変化

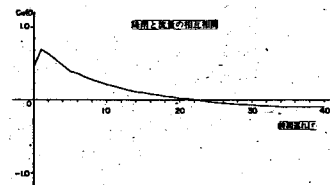


Fig.5 降雨と流出量の相互相関

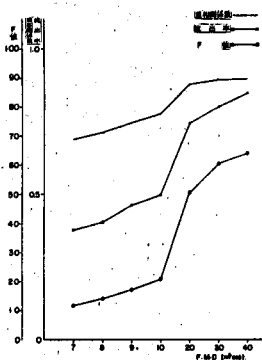


Fig.6 F・M・D 解析における線形モデルの適合度

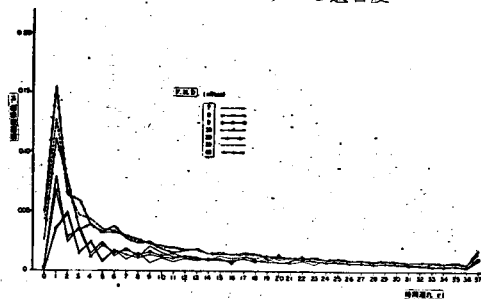


Fig. 7 F・M・D 解析における線形流出モデル

ここに、 $Y_2(t)$ ：非線形推定値、 $\overline{RiRj}/\overline{R^2}$ ：降雨の自己相関 である。

すなわち、非線形モデルによる流出率は、一義的には定まらないことを示す。

5. C・M・W展開法による流出核との比較 (通常法)⁸⁾

吉川・日野・勤柄は、Dirac の Delta (δ) 関数を用いて(2)式の理論解を次のように与えている。

$$Y(t) = y + Y_1(t) + Y_2(t) \quad (13)$$

$$Y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) \cdot X(t-\tau_1) d\tau_1 \quad (14)$$

$$Y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) \cdot X(t-\tau_1) \cdot X(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - k \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_2, \tau_2) d\tau_2 \quad (15)$$

$$K_1(\sigma_1) = \frac{1}{k} \frac{Y(t) \cdot X(t-\sigma_1)}{Y(t) \cdot X(t-\sigma_1)} \quad (16)$$

$$K_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2k^2} \frac{Y(t) \cdot X(t-\sigma_1) \cdot X(t-\sigma_2)}{Y(t) \cdot X(t-\sigma_1) \cdot X(t-\sigma_2)} \quad (17)$$

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot X(t-\sigma) d\sigma \quad (18)$$

また、(18)式を(19)式のように2乗平均パワーで割って規準化し、自己相関係数の形にしたものを K' とすると

$$K' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t) \cdot X(t-\sigma)}{X^2(t)} d\sigma \quad (19)$$

ここに、 $K_1(\delta_1)$ ：線形流出核 (相互相関係数)、 $K_2(\delta_1, \delta_2)$ ：非線形流出核 (3重相関係数)、 K' は入力が白色雑音ならば 1.0 となる。本地区においては、 $K' = 3.01$ であった。今、本地区の降雨入力が平均値 $\mu_X = 0$ のガウス分布に従う白色雑音であると仮定すれば、(16)、(18)式から、Fig. 9 に示すような線形流出核が求められる。また、重回帰モデルにおける線形流出核を比較として示す。さらに、Fig. 10 は(17)式から求めた非線形流出核である。線形、非線形とも C・M・W 展開法の方が安定性においては優れている。次に、Fig. 11 は、本地区の降雨入力の度数分布を示したものであり非負の非ガウス分布となるが、無降雨時間は全体の約 90% を示め、平均値 $\bar{X} = 0.74$ となり仮定に近い値を示す。したがって、時間流出解析においては、十分に長い期間のデータが得られれば、無降雨の占める割合が大きくなるので、非負の分布ではあるが、 $\bar{X} \neq 0$ の仮定は成り立つように思われる。

6. 重回帰モデルによる洪水流出推定結果

Fig. 12 ~ 16 は、以上述べた重回帰分析で算定された、線形及び非線形流出核を用いて推定した結果を、実測値と比較して示したものである。この結果から、線形モデルでは表わし得なかった部分の推定が、非線形モデルを導入することによって改善され、良好な結果を得る。

V. 結 言

統計的流出予測法は、従来は主として長期間流出の解析に適用されることが多く、短期間の洪水流出の解析にはあまり用いられなかった。それは、洪水データは測定期間が短く一連の統計データとして得にくいこ

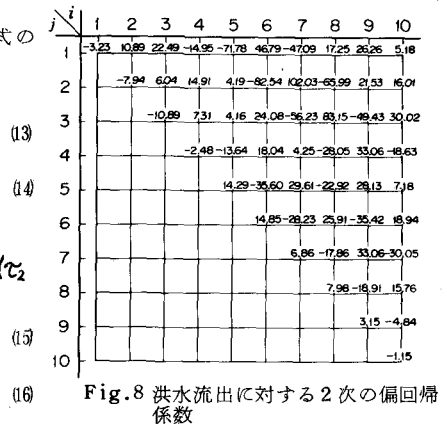


Fig. 8 洪水流出に対する 2 次の偏回帰係数

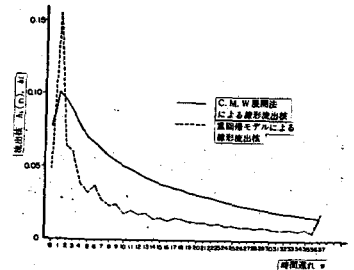


Fig. 9 C・M・W 展開法による流出核と重回帰モデルによる流出核の比較

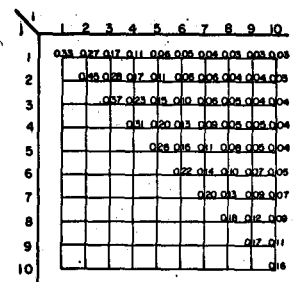


Fig. 10 C・M・W 展開法による非線形流出核

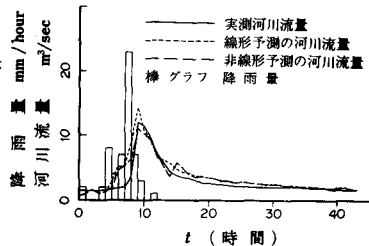
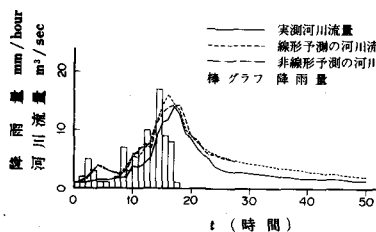
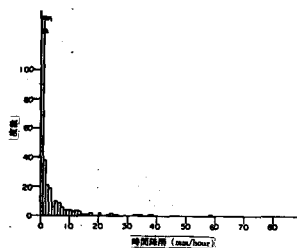


Fig. 11 降雨入力の数値分布 Fig. 12 重回帰モデルの洪水流出への適用例 Fig. 13 重回帰モデルの洪水流出への適用例

と、解析結果に示されるように1波程度の洪水波に対して解析を行っても、うまく流出核が求められなかったことが原因である。しかしながら、多くの洪水波をうまく処理して一連の時系列のようにして解析を行えば、良好な流出モデルを算定することができることを本報告では述べた。それは、各洪水波が同

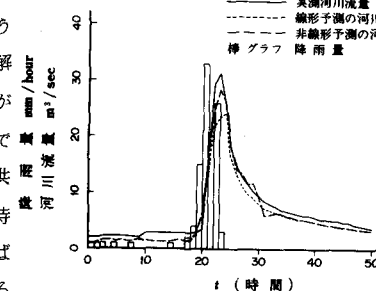


Fig. 14 重回帰モデルの洪水流出への適用例

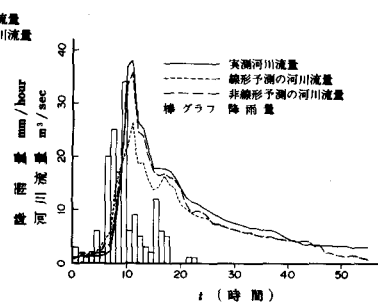


Fig. 15 重回帰モデルの洪水流出への適用例

程度の誤差のもとでは、降雨入力と流出量のデータが多くなるほど入出力系の平均値は安定化されるし、相関関係への情報も多くなり安定化するため、当然考え得ることである。C・M・W展開法における平均値及び相関関数が入出力に対して十分に長い期間を対象にして定義されていることと相通ずるものであると考え。今後は、C・M・W展開法など種々の解法と比較しながら重回帰モデルの改良を行い、研究を進めていきたいと考えている。

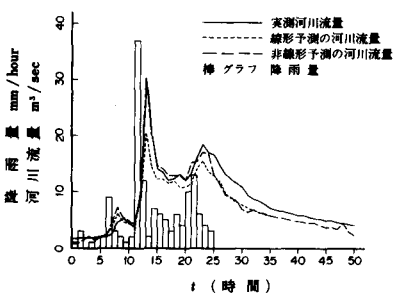


Fig. 16 重回帰モデルの洪水流出への適用例

参考文献

- 1) 吉川・日野・勤柄 (1971) 「C・M・W展開法による非線形流出の解析」 第15回水理講演会論文集 P.55 ~ 60
- 2) 四ヶ所・田中・戸原 (1974) 「非線形システムモデルによる流出解析」 農土論集, 50 P.20 ~ 23
- 3) 池田・樺木 (1975) 「GMDH (発見的自己組織化法)と複雑な系の同定・予測」 計測と制御, vol.14, No.2
- 4) 白石・大西・伊藤 (1976) 「重回帰式による非線形降雨流出の解析法—重回帰式による水系解析の方法(I)—」 農土論集, 63 P.43 ~ 49
- 5) 白石・大西・伊藤 (1977) 「重回帰モデルによる非線形降雨流出の解析」 第21回水理講演会論文集 P.171 ~ 176
- 6) 奥野・久米・芳賀・吉沢 (1971) 「多変量解析法」 日科技連 P.152 ~ 157
- 7) 白石・大西・伊藤 (1977) 「水系解析の系統的解析法(Ⅷ)—F・M・D法を用いた流出成分の分離に関する数値実験—」 農土学会講演要旨 P.354 ~ 355
- 8) 日野・砂田 (1977) 「非線形流出応答系の同定における遅延フィルター相関法の拡張について」 第21回水理講演会論文集 P.183 ~ 188