

到達時間の分布を考慮した流出解析

On Concentration Time Distribution in Runoff Analysis

九州大学 工学部 正会員 平野 宗夫

九州大学 大学院 学生員 ○伊東 尚規

1. まえがき

河川の流域における降雨一流出の変換システムを解析する、いわゆる流出解析の手法は、確率情報理論を導入して流域をブラックボックスとして取り扱う stochastic hydrology と、水理学的に追求しようとする dynamic hydrology の立場に大別される。特性曲線法は後者に属するもので、流域の斜面要素と河道要素とについて、それぞれの長さ、勾配および粗度係数が導入されているが、流出解析に際しては、それら諸量の平均値が用いられ、空間的なバラツキは考慮されないのが通例である。

ところで、図-1に示すように、流れの場に色素をパルスの投入した場合を想定すると、下流のある地点における色素濃度は、流速の平均値からの変動や流速分布の存在に起因する拡散や分散によって偏平化された波形になる。類似の変形が流出の場合においても生ずるはずであり、流域における地形、地文的諸量の分布特性は、降雨一流出の変形過程において重要な役割を演ずるものと考えられる。

河道における地形量の統計的特性を流出解析に導入する試みは、近年の河道網構造の研究成果を取り入れて行なわれており、^{1), 2)} 斜面における地形量の分布の導入に関する研究は、最近始められた。^{3), 4), 5)}

本論文においては、河道要素が斜面要素に比し無視されるような小流域における流出解析法が取り扱われており、特性曲線法に、地形、地文的特性の総合的表現としての到達時間の分布が導入されている。

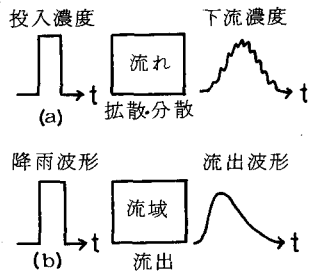


図-1 拡散・分散と流出の類似性

2. 基礎式の誘導とその特性

図-2に示すような斜面上において、水深を h 、単位幅当りの流出量を q 、降雨強度を r 、下層への浸透速度を f 、有効降雨強度を $r_0 = (r - f) \cos \theta$ 、 θ を斜面の傾斜角とすると、雨水量の連続および運動の式は次式で表わされる

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r_0 \dots\dots\dots (1) \text{ および } h = Kq^p \dots\dots\dots (2)$$

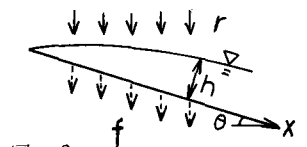


図-2

を用いることにする。ここに K と p は定数で、運動方程式として Manning の式を用いる場合には、

$K = (\frac{n}{\sqrt{\sin \theta}})^p$ および $p = 0.6$ 、Darcy 則を用いる場合には $K = \frac{1}{k \sin \theta}$ および $p = 1$ 、 n は Manning の粗度係数、 k は透水係数である。式(1)および式(2)より周知の特性方程式の解として次式がえられる。

$$l = \frac{1}{pK^{1/p}} \int_0^T \left\{ \int_v^T r_0(t-\tau) d\tau \right\}^{\frac{1-p}{p}} dv \dots\dots\dots (3)$$

および

$$q_1 = \left\{ \frac{1}{K} \int_0^T r_0(t-\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 l は斜面長、 T は斜面上流端から下流端までの雨水流の到達時間、 q_1 は斜面下流端の単位幅当りの流出量である。式(3)および式(4)より K を消去すると、時刻 t における斜面流出量 $q_1(t)$ は、

$$q_1(t) = p l \int_0^T r_0(t-\tau) d\tau / \int_0^T \left\{ \int_v^T r_0(t-\tau) d\tau \right\}^{\frac{1-p}{p}} dv \dots\dots\dots (5)$$

と表わされる。

次に、1次河道における流出量 Q を考える。流域面積が小さい場合には、降雨波形から流出波形への変形は主として斜面において行なわれ、河道におけるハイドログラフの変形は小さいことが知られている。^{6), 7)}そこで、1次河道におけるおくれを無視すると、時刻 t における流出量 $Q(t)$ は、

$$Q(t) = \sum q_i \cdot \Delta b = \sum R(t, T) \cdot l \cdot \Delta b \quad (6)$$

ここに、 Δb は長さ l 、到達時間 T の斜面の幅、

$$R(t, T) = p \int_0^T r_0(t-\tau) d\tau / \int_0^T \left\{ \int_0^T r_0(t-\tau) d\tau \right\}^{\frac{1-p}{p}} dv \quad (7)$$

である。式(6)において、 $l \Delta b$ は到達時間が T である斜面の面積 ΔA であるから、これを流域面積 A で割ったものは到達時間 T の確率とみなすことができる。すなわち、 T の確率密度関数を $\varphi(T)$ とすると、

$$l \Delta b / A = \varphi(T) \Delta t, \quad \int_0^\infty \varphi(T) dT = 1 \quad (8)$$

したがって、式(6)は

$$Q(T) = A \int_0^\infty R(t, T) \varphi(T) dT \quad (9)$$

となり、流出に関する基礎式が得られる。

なお、 $p = 1$ すなわち、流れがDarcy則にしたがう場合には、上式は簡単になり、

$$Q(t) = A \int_0^\infty \frac{\varphi(T)}{T} \int_0^T r_0(t-\tau) d\tau dT = A \int_0^\infty u(\tau) r_0(t-\tau) d\tau \quad (10)$$

ここに、

$$u(\tau) = \int_0^\infty \frac{\varphi(T)}{T} dT \quad (11)$$

上式は単位図にはかならない。したがって、斜面における単位図は、到達時間の分布を表現したものともなされる。

さて、式(9)または式(10)において、到達時間 T の分布形 $\varphi(T)$ が与えられると $Q(t)$ が計算できるから、流出解析は $\varphi(T)$ をいかに評価するかという問題に帰着する。降雨および流出量のデータから $\varphi(T)$ を定める手法としては、 $\varphi(T)$ に適当な確率密度関数を仮定し、平均、分散などをパラメータとする parametric model として解く方法と、 $\varphi(T)$ をブラックボックスとし、統計的に最適な $\varphi(T)$ を求める stochastic model として解く方法が考えられる。

3. パラメトリックモデルとしての解析と試験地への適用

(1) 到達時間の分布形の仮定

到達時間 T は式(3)より

$$T = f(l p K^{\frac{1}{p}}, \text{hyetograph}), \quad p \neq 1 \quad \text{および} \quad T = l K, \quad p = 1 \quad (12)$$

と表わされるが、上式において、 K および p は斜面勾配、表層の粗度や透水係数など、斜面の地形的・地文の諸量によって規定されと考えられるから、 T の分布は、非線形($p \neq 1$)の場合には地形・地文諸量の分布と降雨波形によって、線形($p = 1$)の場合には地形・地文諸量の分布のみによって規定されることになる。非線形の場合には、 T は降雨の強度と時間分布に関係するので、 $\varphi(T)$ も時々刻々降雨波形の変動につれて変化し、式(3)のままでは考えにくい。そこで強度 r_0 の降雨が継続している場合の到達時間を T_0 とすると、式(3)より

$$T_0 = r_0^{p-1} l^p K \quad (13) \quad \text{および} \quad T_0 = r_0^{p-1} \left[\frac{1}{p} \int_0^T \left\{ \int_0^T r_0(t-\tau) d\tau \right\}^{\frac{1-p}{p}} dv \right]^p \quad (14)$$

となり T_0 は r_0 と地形・地文諸量のみの関数、 T は T_0 と降雨波形のみの関数になるので、 r_0 に対する T_0 の分布が与えられると任意の降雨波形に対する任意時刻の $\varphi(T)$ が計算される。

つぎに、地形・地文的諸量の影響は K の中に集約的に含まれているので、 K はこれらの諸要素 ($z_1 \cdot z_2 \cdots z_n$) の積の形で表わされると考え

$$K = z_1 \cdot z_2 \cdots z_n \quad \text{および} \quad T_0 = r_0^{p-1} l^p z_1 \cdot z_2 \cdots z_n$$

とおくと、中央極限定理によって T_0 の分布は対数正規分布に漸近することが予想される。⁸⁾ そこで $\varphi(T_0)$ を対数正規と仮定すると、式(9)は T_0 の中央値 $\bar{T}_0$ と分散 σ_T^2 をパラメーターとする parametric model になる。

(2) 試験地への適用

$\varphi(T_0)$ を対数正規分布とし、竜ノ口山森林理水試験地に適用する。同試験地は岡山県旭川の支流にあり、流域面積は 22.611 ha で形状は図-3 のようである。流出解析の際には有効雨量の評価が大きな問題となるが、同試験地の損失雨量と直接流出量については小川⁹⁾により詳細に検討されているので、ここでは、その資料を用いることにする。

まず線形 ($p=1$) の場合を対象とし、式(10)を用いる。 $\varphi(T)$ を対数正規とし、標準偏差 σ_T のいろいろな値に対して計算のピーク流量が実測値のそれとほぼ一致するように、 T のモード $\hat{T}$ を定めて計算したハイドログラフの一例を示すと図-4 のようである。同図の流出 (洪水 No. 1) に対して、 $\sigma_T = 2.0 \sim 2.1$ 程度、 $\hat{T} = 10$ 時間程度とすると計算と実測のハイドログラフはよく一致する。次に $\sigma_T = 2.0$ 、 $\hat{T} = 10$ 時間 ($T = 16$ 時間) として他の洪水に適用してみると、同程度の規模の洪水ではよく適合する (図-5 参照) が、ピーク流量の大きい洪水では計算値のピークが実測値のそれより小さくなる (図-6 参照) 傾向を示す。これは単位図法に共通の特性であり降雨強度によって単位図を変える必要があるといわれていることに対応している。しかし、その場合でも、 $\sigma_T = 2.0$ とし、 $\hat{T}$ を小さくしてゆくと計算値は実測値と適合するようになる。したがって、降雨強度の影響は主として $\hat{T}$ に現われ σ_T にはあまり関係しないようであり、実用的には、 σ_T はそのまま $\hat{T}$ を降雨強度によって変えればよいと思われる。

また、単位降雨に対する流出高すなわち単位図を σ_T と $\hat{T}$ をパラメーターとして描いていくと図-7 のようになる。図より、 σ_T が大きくなるほど、また $\hat{T}$ が大きくなるほど単位図が偏平化することがわかる。また、河道を無視しているため単位図においては時間の遅れが生じていない。

次に非線形の場合について、 $p = 0.6$ 、 $r_0 = 1.0 \text{ mm/hr}$ 、および $\varphi(T_0)$ を対数正規として線形の場合と同様にして、流出解析を行なうと図-4 のようであり、 T_0 の標準偏差 $\sigma_{T_0} = 2.0$ 、 T_0 のモード $\hat{T}_0 = 2.0$ 時間 (中央値 $\bar{T}_0 = 3.2$ 時間) とする計算値のハイドログラフは実測値のそれとよく一致する。同じ値を他の洪水に適用したものが図-5、6 に示されているが線形の場合に較べると適合性は良好である。し

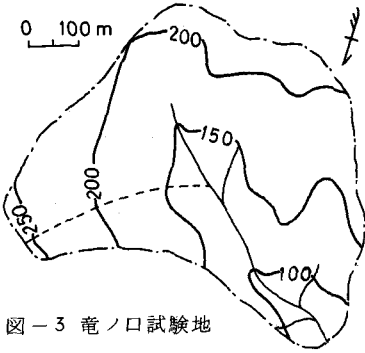


図-3 竜ノ口試験地

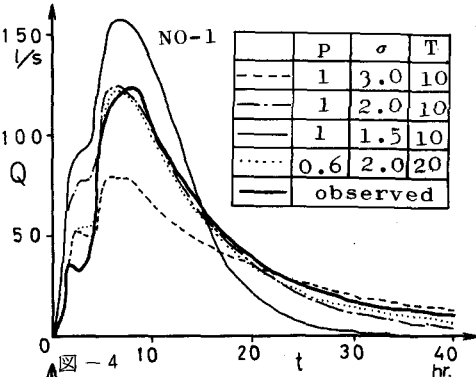


図-4

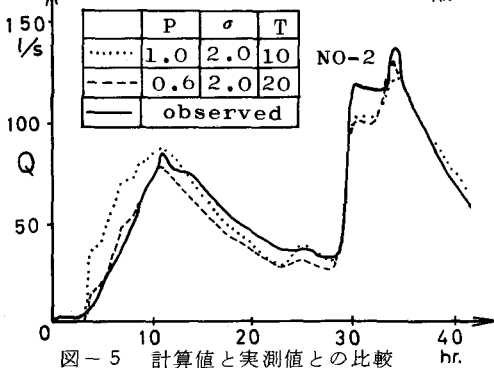


図-5 計算値と実測値との比較

かし、降雨強度が大きくなると計算のピーク流量が小さ目になるという傾向は若干残るようである。また、線形の場合と比較すると、 σ_{T_0} は線形における σ_T と一致し、 $\widehat{T}_0$ は $\widehat{T}$ の2倍となっている。前者は線形の場合降雨強度によって σ_T が変化しないことと対応するが後者は r_0 と降雨強度によって変化するので $\widehat{T}_0$ と $\widehat{T}$ の差異に特別な意味はない。

ところで、到達時間は式(1)より斜面長 l に直接関係するので、斜面長の分布を測定してみると図-8 のようになる。測定は $\frac{1}{5000}$ 地形図上で行ない、河道上に40 m 間隔に点をとり、各点より等高線に直交する線を分水界まで引き、その線の長さを l とした。図より斜面長 l は標準偏差 $\sigma_l \div 2$ の対数正規分布で近似される。いくつかの流域における斜面長分布の測定結果は対数正規分布や平方根正規分布⁷⁾、⁵⁾、ガンマ分布⁴⁾、などを示している。

本試験地においては、到達時間の分布と斜面長の分布がともに標準偏差の等しい対数正規分布で近似されたが、他の2、3の流域においても到達時間を斜面長と同じ分布形で表わすことによって良好な結果が得られている。このように、到達時間の分布形と標準偏差が斜面長分布のそれに等しいとしてみれば、式(1)は到達時間の平均値を唯一のパラメーターとするパラメトリックモデルとなり、水文資料の比較的乏しい流域への適用が容易になる。

到達時間 T は式(2)より斜面長 l と K に関係するので、 K が斜面全域にわたって一様であれば T の分布は l の分布に一致する。しかし、 K は流水の流れ難さを表わすものであるから場所的に一様とは考え難い。もし、 K の分布も対数正規に従い、 K と l が互いに独立であるとする、 K の標準偏差を σ_K とし $\sigma_T = \sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_K^2}$ となり、 $\sigma_T > \sigma_l$ となるはずであるが、実際には $\sigma_T \div \sigma_l$ となっている。このことは、 l と K が無関係ではないことを暗示するが K は水の流れにくさを表わすものであり、地形は水による侵食作用によって形成されるから、 K と l の間にある相関が存在することはうなずけることである。

4. stochastic な手法導入

stochastic hydrology は流域をブラックボックスとして取り扱うもので、力学的に追求しようとする dynamic hydrology とその基盤において両極をなすものと考えられている。しかし、現象が複雑な場合には、力学的にアプローチしてゆく場合でも、stochastic な手法にゆだねなければならない部分が存在することは、乱流理論の例をひくまでもなく明らかである。

stochastic hydrology への dynamic hydrology の融合は日野¹⁰⁾によって試みられている。ここでは特性曲線法による解の中に導入された到達時間の分布 $\varphi(T)$ の解析に従来用いられている stochastic な手法の導入を行なう。

式(9)は $\varphi(T)$ を核関数、 $R(t, T)$ を入力、および $Q(t)$ を出力とする応答関係を表わしている。とくに、線形 ($p=1$) の場合には、式(10)のように単位図と同じになるので、従来単位図の同定に用いられている手法

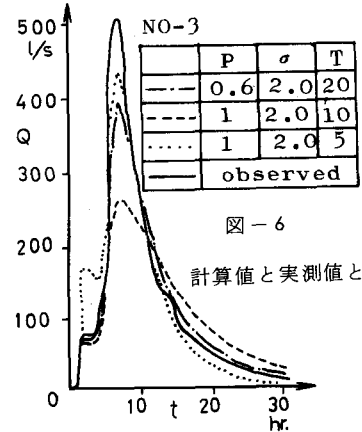


図-6

計算値と実測値との比較

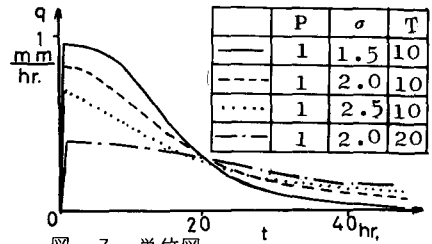


図-7 単位図

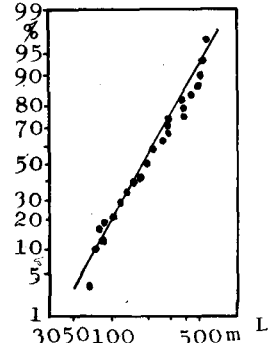


図-8 斜面長(l)のハーゼンプロット図

が適用できる。

まず線形 ($p=1$) の場合を考える。

式(10)を離散量で表わすと次のようである。

$$Q(t) = A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi(i)}{i} \sum_{j=1}^i r_e(t-j+1) \quad (15)$$

基底長を有限にとり $N \cdot \Delta t$ とし、データ個数を M として上式を行列表示すると

$$Q = A R E \phi \quad (16)$$

ここに

$$Q = \begin{bmatrix} Q(1) \\ Q(2) \\ \vdots \\ Q(M) \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r(1), r(0), \dots, r(2-N) \\ r(2), r(1), \dots, r(3-N) \\ \vdots \\ r(M), r(M-1), \dots, r(M-N+1) \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N} \\ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N} \\ \vdots \\ 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{N} \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(N) \end{bmatrix}$$

となる。上式は、 $M=N$ の場合、連立一次方程式となり直ちに ϕ が求められるが、誤差が増幅されて解が正負の間をはげしく振動する。このような誤差の拡大を防ぐために、単位図法では、最小自乗法がよく利用されているので、ここでも最小自乗法を適用してみる。

$M > N$ とし、流量の実測値と予測値との誤差 e を次式

$$e = Q - A R E \phi \quad (17)$$

で定義し、誤差の2乗の総計を最小にするという条件より次式がえられる。

$$R^* Q = A R^* R E \phi, \quad \text{ここに、} R^* \text{は} R \text{の転置行列}$$

または

$$\sum_{j=1}^N \frac{\varphi(j)}{j} \left[\sum_{t=0}^M \left\{ r_e(t-i) \sum_{w=0}^{j-1} r_e(t-w) \right\} \right] = \sum_{t=0}^M \frac{Q(t)}{A} r_e(t-i), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (18)$$

上式をいくつかの洪水に適用して $\varphi(T)$ を求めると値は正と負の間を振動し、物理的に意味のある値が得られなかった。したがって、最小自乗法は、誤差の拡大を防ぐ方法として充分ではないと考えられる。

そこで、 $\varphi(T)$ が負にならないという条件を導入するために、線形計画で用いられる simplex 法を適用する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} Q &= A R E \phi + z \\ \phi &\geq 0, \quad z \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots (19) \quad \text{なる制限下で目的関数} \quad g = \sum_{m=1}^M z_m$$

$$z = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(M) \end{bmatrix}, \quad \sum_{m=1}^M = [1, 1, \dots, 1] \quad (20)$$

を最小にする ϕ を求める。

上記により $\varphi(T)$ を求めて Hazen 紙上にプロットしたものが図-9である。いずれも、ほぼ $\sigma_T \approx 2.2$ の対数正規分布をなしており、前述の対数正規の仮定が妥当なことを示している。また、同規模の洪水 $\mathcal{M}-1$ と $\mathcal{M}-2$ では σ_T, T ともほとんど一致し、ピーク流量が大きくなると、 σ_T は同じで T が小さくなることも、前節の結果と同じである。

次に、非線形 ($p \neq 1$) の場合は、降雨について式(7)のような非線形変換を行なうことにより、線形としての取り扱うことができる。すなわち、式(9)を離散量におおして行列で表示すると、

$$Q = A R \phi.$$

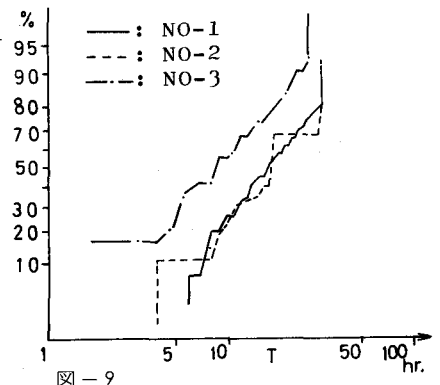


図-9

ここに,

$$R = \begin{bmatrix} R(1, T_{11}), R(1, T_{12}), \dots, R(1, T_{1N}) \\ R(2, T_{21}), R(2, T_{22}), \dots, R(2, T_{2N}) \\ \vdots \\ R(M, T_{M1}), R(M, T_{M2}), \dots, R(M, T_{MN}) \end{bmatrix} \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} \varphi(T_{01}) \\ \varphi(T_{02}) \\ \vdots \\ \varphi(T_{0N}) \end{bmatrix}$$

である。

T_{0j} と T_{ij} の関係は式(4)より

$$T_{0j} = r_0^{p-1} \left[\frac{1}{p} \int_0^{T_{ij}} \left[\int_v^{T_{ij}} r_0(i-\tau) d\tau \right]^{\frac{1-p}{p}} dv \right]^p$$

以上の式により、線形の場合と同様に Φ_0 を求めることができる。なお最小自乗法を適用した結果は、線形 ($p=1$) の場合と同様に解が振動し、物理的な解が得られなかった。その他の手法の適用については、現在検討中である。

5. あとがき

特性曲線法による流出解析の解に、地形、地文的特性の表現としての到達時間の分布を導入した式を導き parametric model および stochastic model として試験に適用した。前者は水文資料の比較的少ない流域に、後者はその豊富な流域にそれぞれ適するものと考えられるが、なお多くの流域に対する適用性の検討が必要である。

おわりに、貴重なデータを提供していただいた愛媛大学小川滋助教授と、資料の解析と計算に協力された当時院生木川良二氏(現大成建設)に深く感謝します。

参 考 文 献

- 1) 椿東一郎・竹石和夫：筑後川の流域，流出解析について，土木学会研究発表会講演集，(昭48.2)
- 2) 石原英雄・小葉竹重機：河道網系における洪水の合成について，第29回土木学会年講，(昭49.10)
- 3) 平野宗夫・小川滋・木川良二：山腹斜面からの流出について，第29回土木学会年講，(昭49.10)
- 4) 角屋睦・佐合純三：洪水流出における斜面の役割，第32回土木学会年講，(昭52.10)
- 5) 坂之井和之・藤田睦博：小流域の斜面構造と流出解析，第32回土木学会年講，(昭52.10)
- 6) 石原英雄：洪水流出の解析，土木学会水理委員会，水工シリーズ64-04，(1964.7)
- 7) 平野宗夫・木川良二：山地河川の流出過程について，第30回土木学会年講，(昭50.10)
- 8) Chow, V. T. : The log - probability Law and its Engineering Applications, proc. of A. S. C. E., Vol. 80, (1955)
- 9) 小川滋：山地小流域における出水解析の基礎的研究，九州大学演習林報告，第50号，(昭52.3)
- 10) 日野幹雄：流出の非線形性について，第16回水理講演会講演集，(昭47.2)