

流量通減部の特性を考慮した流出モデル

A Runoff Model Based on the Consideration of Flood Recession Characteristics

東京工業大学工学部 正 員 吉 川 秀 夫
 東京工業大学工学部 正 員 ○ 砂 田 憲 吾
 東京工業大学工学部 学生員 鈴 木 顯

1. はじめに

流出 Hydrograph の通減部は降雨-流出系のなかで流域特性を示すものとして従来から注目されてきた。流量通減部では単に流域系固有の特性が得られるだけでなく、その部分における主たる流出成分が中間流の一部および地下水流であり、それらは流域貯留量に対して線型性が成立するとの仮定も設けやすい。タンクモデルの提案に伴って、通減部は順次通減率の低いタンクからの流出成分による対応もつけられている。このとき、タンクモデルの低通減率パラメタは洪水部を対象とする非線型タンクのパラメタよりも容易に決定され得る¹⁾。たとえば、通減部流量の片対数紙上での傾きが通減率であることなどが用いられる。

以上の通減部特性の情報を流出系のモデル化に積極的に採り入れたらどうであろうか。従来の一般的な洪水流出解析においてもすでに降雨初期損失・基底流量などにより流出成分の分離が行われてきたが、それらは経験的であり、分離後の解析を主眼とする一過程にすぎないように思われる。ここでは、通減部の特性を考慮しながら成分分離方法そのものの効果を含めて議論し得る流出モデルを考える。すなわち、流量通減部から得られる通減率をもつ線型タンク系を地下水流系に対応させ、この系への水供給には流域平均浸透能を用い表面流出には別の非線型モデルを用いて合成する。岡・角屋²⁾は試験小流域斜面での観測から類似のモデルの妥当性を示唆しているが、本論文ではより一般的な広さをもつ流域において lumped なシステムのまま従来よりも高い精度の流出解析法を得ることを目指している。物理的意味の対応が簡潔なパラメタにできる限り集約することにより、流出モデルとしての適用性を高めながら流出特性をも明らかにするのを目的とするものである。

地下水成分を差し引かれた流出は表面流出成分のみを対象とするためモデル化も比較的考え易いうえ、非線型性を有するとしても“すなおな”非線型性であることが予想される。本論文では表面流出モデルとして河道流のアナロジーによる Muskingum 法および貯留関数法の両者について検討した。これらのモデルには2個以上の未知パラメタが持ち込まれるが、その最適パラメタの決定には Sensitivity Analysis の手法を用いた。この方法は、本論文ではパラメタの個数が抑えられ、それらの値は物理的性質からある領域内にいることが知れて、実測と計算との差で定義される評価関数が凸関数となることが考えられ有効である。本論文では貯留関数法などに対して用いられたが、非線型タンクモデルの場合にも適用可能であり、パラメタ決定の自動化に展望を開くものである。

2. 合成モデル

合成される流出モデルの基本的な妥当性を検証するためには、各成分モデルは本質を失わない限り単純化されたものを用いた方がよい。ここでは地下水流系を二段直列タンクで示す。一方表面流出系では Muskingum 法または貯留関数法を用いることにすれば合成流出モデルは Fig. 1 のように示される。

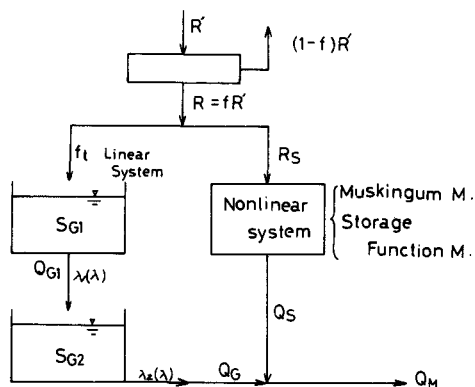


Fig. 1 合成モデル

慣用の文字・記号を用いて各流出系における連続式，貯留関係式は次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{地下水流出系} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_{G1}}{dt} = R_G - Q_{G1} \quad (1) \\ S_{G1} = K_1 Q_{G1} \quad (2) \\ \frac{dS_{G2}}{dt} = Q_{G1} - Q_G \quad (3) \\ S_{G2} = K_2 Q_G \quad (4) \end{array} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{表面流出系} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_s}{dt} = R_s - Q_s \quad (5) \\ S_s = a_0 R_s + b_0 Q_s \quad (6) \\ \text{または,} \\ S_s = k Q_s^p \quad (7) \end{array} \right. \end{array}$$

ここに添字 G, s はそれぞれ地下水，表面流出成分を示し， a_0, b_0, k, p は定数である。

一方，流域平均浸透能には次式の Horton 型の式を用いる。

$$f_t = (f_0 - f_c) e^{-\alpha t} + f_c \quad (8)$$

ここに f_0, f_c はそれぞれ初期および最終浸透能， α は定数。これらの定数は未知であるが，後述するように支配的な量 f_0 について主に雨水浸透効果が検討される。以上より $R_G = f_t$ として

$$R_s = R - f_t \quad (9)$$

となる。実データを扱う場合 $f_t > R$ となることがあるが，この点は後に計算アルゴリズムの中で改善する。

2.1 地下水流出モデル

i) λ の決定 いま簡単のために $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ とするとき，この系からの応答関数は式(10)となる。

$$h(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad (10)$$

式(10)の対数をとってそのこう配を調べれば，時間経過が十分な減衰部で $-\lambda$ となる。強度および継続時間が有限な浸透降雨がある場合も結果は同様である。減衰率の異なる (λ_1, λ_2) 場合，あるいはそれ以上の多段タンクの場合，モデルの精度の向上は当然期待されるが，減衰率の決定にはそれに応じた条件が必要とされる。この点は今後の検討に待つことにし，ここで $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ としてもモデルの本質における議論になんの支障もない。

ii) 地下水流出成分 初期条件および浸透降雨の条件を次のようにおく。

$$\left. \begin{array}{ll} t \leq 0 ; & R_G = R = 0, \quad S_{G1} = S_{G2} = 0 \\ 0 < t \leq t_r ; & R_G = f_t \\ t > t_r ; & R_G = R = 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

ここに t_r は降雨継続時間

式(1)~(4)，(10)，(11)より地下水流出量は次のようになる。

$$\begin{aligned} t \leq t_r ; \quad Q_G(t) &= f_c (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) + \frac{\lambda^2 (f_0 - f_c)}{(\lambda - \alpha)^2} e^{-\alpha t} \{ 1 - e^{-(\lambda - \alpha)t} \\ &\quad - (\lambda - \alpha) t e^{-(\lambda - \alpha)t} \} = Q_{G*}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

$$t > t_r ; \quad Q_G(t) = Q_{G*}(t_r) e^{-\lambda(t-t_r)} + Q_{G1}(t_r) \lambda (t - t_r) e^{-\lambda(t-t_r)} \quad (13)$$

ここに，

$$Q_{G1}(t_r) = \frac{\lambda (f_0 - f_c)}{(\alpha - \lambda)} \{ e^{-\lambda t_r} - e^{-\alpha t_r} \} + f_c (1 - e^{-\lambda t_r}) \quad (14)$$

2.2 表面流出成分

i) Muskingum法 式(5), (6)より

$$\dot{Q}_s + \frac{1}{b_0} Q_s = \frac{1}{b_0} R_s - \frac{a_0}{b_0} \dot{R}_s \quad (15)$$

ここで初期条件 $t \leq 0$; $Q_s = 0$ および式(8), (9), (10)の関係を用いれば, 式(15)より Q_s は以下のよう求める。 $\gamma = 1/b_0$ として,

$$t \leq t_r; \quad Q_s = \gamma e^{-\gamma t} \int_0^t \{ R(\tau) - a_0 \dot{R}(\tau) \} e^{\gamma \tau} d\tau \\ + \frac{\gamma(f_0 - f_c)(1 + \alpha a_0)}{\alpha - \gamma} (e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}) - f_c(1 - e^{-\gamma t}) = Q_{s*}(t) \quad (16)$$

$$t > t_r; \quad Q_s = Q_{s*}(t_r) e^{-\gamma(t-t_r)} \quad (17)$$

ii) 貯留関数法 この場合, 基礎方程式系(5), (7)は非線型となるため, 図解法のアルゴリズムを用いて数値計算して Q_s を求める。

3. パラメタの同定

合成流出モデルの基礎方程式系に用いられるパラメタは f_0 , f_c , α および a_0 , γ または k , p の計5個である。ところで式(8)の f_c は f_0 に比較して小さい量であり³⁾ また α は浸透能の形状に関するものであることから, f_c , α は予め定めることにする。ここでは浸透能のレベルに支配的である f_0 だけを未知とし, この結果同定すべきパラメタは3個となる。

3.1 Sensitivity Analysis

いま, 実際の流出に対するモデル流出の適合度を評価関数 J として次式で定義する。

$$J(P) = \int_{t_0}^{t_1} e^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \{ Q_M(t) - Q(t) \}^2 dt \quad (18)$$

ここに P はパラメタベクトル。このとき P の近傍で J を最も効率良く減少させるべき修正量 ΔP は最急こう配法により式(19)で与えられる。 ΔP の要素 Δp_i で示せば,

$$\Delta p_i = -\beta \frac{\partial}{\partial p_i} \int_{t_0}^{t_1} e_i^2 dt = -2\beta \int_{t_0}^{t_1} e_i u_i dt \quad (19)$$

ここに β は正のスカラ量, u_i は Sensitivity function であり次式で定義される。

$$u_i = \frac{\partial Q_M}{\partial p_i} \quad (20)$$

式(19)により得られる ΔP を用いて, $(j+1)$ ステップでのパラメタは次式による繰返し計算によって求められる。

$$P(j+1) = P(j) + m(\Delta P) \quad (21)$$

ここに m は補正係数。

3.2 Sensitivity function

式(20)で定義される Sensitivity function はモデルシステムの状態方程式から作られる Sensitivity equation の解として通常は得られる。この場合, モデルのシステムが非線型であっても Sensitivity equation は線型方程式で与えられるという解析上有利な特徴を備えている。

i) Muskingum法の場合 表面流出に Muskingum 法を用いるときは基礎式自身も線型であることからすでに流量 Q_s が式(16), (17)のように得られている。従って式(12), (13)による Q_G と Q_s の和により合成モ

デルからの流出量 Q_M が与えられるので、3 個の未知パラメタ a_0 , $\gamma (=1/b_0)$, f_0 に関する Sensitivity function は直接にそれぞれ次のように求まる。

$$t \leq t_r; \quad u_1 = \frac{\partial Q_M}{\partial a_0} = -\gamma e^{-\gamma t} \int_0^t \dot{R}(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau + \frac{\gamma f_0 \alpha}{\alpha - \gamma} (e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}) \quad (22)$$

$$u_2 = \frac{\partial Q_M}{\partial \gamma} = (1 - \gamma t) H(t) + \gamma e^{-\gamma t} \int_0^t \{R(\tau) - a_0 \dot{R}(\tau)\} \tau e^{\gamma \tau} d\tau \\ + \left\{ \frac{\alpha (e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t})}{(\alpha - \gamma)^2} + \frac{\gamma t e^{-\gamma t}}{\alpha - \gamma} \right\} f_0 (1 + \alpha a_0) = u_{2*}(t) \quad (23)$$

$$u_3 = \frac{\partial Q_M}{\partial f_0} = \frac{\gamma (1 + \alpha a_0)}{\alpha - \gamma} (e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}) + \frac{\lambda^2}{(\lambda - \alpha)^2} e^{-\alpha t} \{1 - e^{-(\lambda - \alpha)t} \\ - (\lambda - \alpha) t e^{-(\lambda - \alpha)t}\} \quad (24)$$

$$t > t_r; \quad u_1 = \{-\gamma e^{-\gamma t_r} \int_0^{t_r} \dot{R}(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau + \frac{\gamma f_0 \alpha}{\alpha - \gamma} (e^{-\alpha t_r} - e^{-\gamma t_r})\} e^{-\gamma(t-t_r)} \quad (25)$$

$$u_2 = u_{2*}(t_r) e^{-\gamma(t-t_r)} - Q_s(t_r) (t - t_r) e^{-\gamma(t-t_r)} \quad (26)$$

$$u_3 = \frac{\gamma (1 + \alpha a_0)}{\alpha - \gamma} (e^{-\alpha t_r} - e^{-\gamma t_r}) e^{-\gamma(t-t_r)} + \frac{\lambda^2}{(\lambda - \alpha)^2} e^{-\alpha t_r} \{1 - e^{-(\lambda - \alpha)t_r} \\ - (\lambda - \alpha) t_r e^{-(\lambda - \alpha)t_r}\} e^{-\lambda(t-t_r)} + \frac{\lambda}{\alpha - \lambda} \{e^{-\lambda t_r} - e^{-\alpha t_r}\} \lambda (t - t_r) e^{-\lambda(t-t_r)} \quad (27)$$

$$\text{ここに,} \quad H(t) = e^{-\gamma t} \int_0^t \{R(\tau) - a_0 \dot{R}(\tau)\} e^{\gamma \tau} d\tau$$

ii) 貯留関数法の場合 モデルは非線型方程式で表わされているため、Sensitivity equationを導いてこれを解く必要がある。本論文では浸透雨量に係る f_0 自身の量的な把握を特に重視しない。また後述するように f_0 の Sensitivity の低いことが示されるためこれを固定して扱えば計算は単純化される。すなわち、 $R_s = R - f_t$ を決めておけば、表面流出成分は地下水流出成分とは独立である。以上より k , p に関する Sensitivity equation, u_1 , u_2 はそれぞれ式(28), (29)のようになる。

$$A \dot{u}_1 + B u_1 = C \quad (28), \quad A \dot{u}_2 + B u_2 = D \quad (29)$$

ただし、

$$A = k p Q_s^{p-1}, \quad B = k p (p-1) Q_s^{p-2} \dot{Q}_s + 1, \quad C = -p Q_s^{p-1} \dot{Q}_s, \quad D = -k Q_s^{p-1} \dot{Q}_s$$

初期条件 $u_1(0) = u_2(0) = 0$ のもとで式(28), (29)を解けば次式を得る。 $t \leq t_r$ および $t > t_r$ で、

$$u_1 = \frac{C}{B} \left(1 - e^{-\frac{B}{A}t}\right) \quad (30), \quad u_2 = \frac{D}{B} \left(1 - e^{-\frac{B}{A}t}\right) \quad (31)$$

4. 実流域への適用

実河川流域として神流川 (373 km^2) における水文データを用い、特徴的な大小洪水 5 ケースについて合成モデルの適用と検討を行った。 f_0 , f_c , α の値は他流域 (由良川, 350 km^2) ではあるが石原ら³⁾の得た $f_0 = 4 \text{ mm hr}^{-1}$, $f_c = 0.27 \text{ mm hr}^{-1}$, $\alpha = 0.15 \text{ hr}^{-1}$ をもとに、 α は同様な値とし、 f_c を無視する代り $f_0 = 10 \text{ mm hr}^{-1}$ 程度にとった。また遅れ時間 (T_L) は降雨と流出の重心間隔の $1/2$ とした ($4 \sim 6 \text{ hr}$)。なお、逓減部データを集めて 2.1 節の方法で得られる逓減率は $\lambda = 0.03 \text{ hr}^{-1}$ である。

まず代表的な洪水 No. 1 について Muskingum 法との合成モデルを適用した結果は Fig. 2 のようになる。最適パラメタとして得られた値は $a_0 = 0.004$, $\gamma = 0.15$, $f_0 = 9.96$ である。 a_0 は出発値を 1.8 程度としたにもかかわらず $b_0 (=1/\gamma)$ より小さな値となり、このことは貯留量がほぼ流出量のみの関数となることを

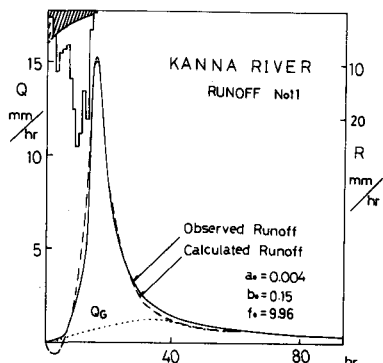


Fig. 2 合成モデルの適用 (Muskingum法)

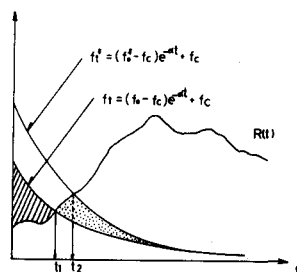


Fig. 3 浸透能低下の遅れ

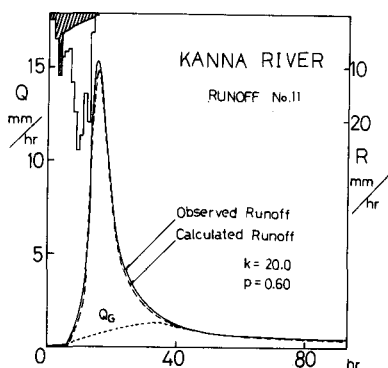


Fig. 4 合成モデルの適用 (貯留関数法)

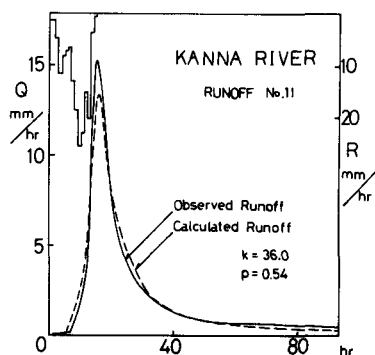


Fig. 5 貯留関数法のみ適用

示している。また f_0 の Sensitivity は他の二つのパラメータに較べかなり鈍いことも判明した。これは評価関数が高水部分に支配されることに原因している。Fig. 2 でモデル流出の立ち上り部分が負となっているのは、Fig. 3 における $R < f_t$ の場合によるもので、式(9)などをそのまま用いるのは不適当である。この点を吟味するためには浸透能の回復に関する議論が必要であるが、ここでは未飽和状態の地表面では浸透能の低下が遅れると考える。Fig. 3 において斜線部と斑点部との面積が等しくなるような曲線 f_t^* を用い t_2 を境界にしてモデルを適用する。実際には $R(t)$ が離散量であることから f_0^* も連続量でなくなり J に対し f_0 の Sensitivity がとれなくなる。以上の諸点を考慮し、 f_0 を固定した貯留関数法により以後の検討を進める。

総合貯留関数法により、まず $p_0 = 0.5$, $k_0 = 4.0$ 程度の値を出発値として合成モデルにより神流川データを解析した。5 個の洪水データ (ピーク流出高 $3 \sim 21 \text{ mm/hr}$) による計算の結果得られた最適パラメータはほぼ一定の $k = 19 \sim 22$, $p = 0.60 \sim 0.69$ となった。 $p = 0.6$ は Manning 抵抗則に従う開水路等流における河道貯留の場合に符合し結果は興味深い。試みに No. 11 のデータで出発値 $k_0 = 8$, $p_0 = 0.3$ のような最適値とかけ離れた値を与えても上と同様な結果が得られた。

Fig. 4 は Fig. 2 と同一のデータの場合の合成モデルによる計算結果である。Hydrograph の形状はかなり良く実測値と一致している。

Fig. 5 は Fig. 4 と同じデータを合成モデルに依らないで貯留関数法のみで解析した結果である。誤差が最小となる遅れ時間は Fig. 4 の場合と同一となった。ここでの方法は通常の貯留関数法と若干異なっている。

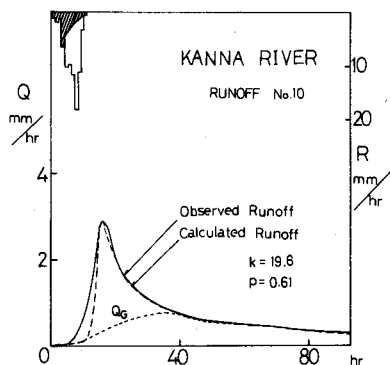


Fig. 6 パラメタ平均値による流量推定

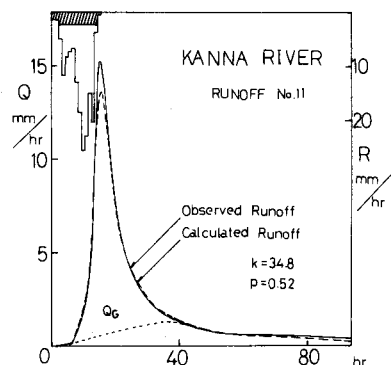


Fig. 7 f_t のパターンの変化による流出

る。それは流入係数を解析期間全体の流出係数にとっていることである。そのため結果は実測値との不一致が強調されているが、Fig. 4 との比較は十分可能で合成モデルの解析精度の向上が検証される。

Fig. 6 は各種の洪水に対して個々に得られた最適パラメタの平均値を用いて流出量の推定を行ったものである。流出の初期で若干の実測値との差がみられるが、合成モデルがこの流域にほぼ適用できることを示している。ただし遅れ時間が大きな洪水の場合と異なるため、この点は別に考慮する必要がある。

Fig. 7 は浸透能のパターンの変化を調べるために、浸透雨量総量がFig. 4 の場合に等しくかつ浸透能を一定として同じデータに適用したものである。計算流量はFig. 4 に比較しピークが若干減少し、逓減初期部分で増加するという流出の遅れの効果が理解される。

5. まとめ

逓減部特性を考慮して地下水成分と表面流成分とを合成した流出モデルとそのパラメタ同定法を示した。これらを神流川流域の実データに適用したところ、ほぼ満足すべき結果を得た。またパラメタ同定に用いた Sensitivity analysis は、適当に定義された評価関数を単調にする領域が比較的広く、この種の問題に有効であることが判った。

流量逓減部の情報をさらに積極的にモデルに組込むためには、逓減率の異なる多段のタンクや中間流のモデル化などを考える必要がある。

参考文献

- 1) 砂田・吉川・渡辺：流量逓減部の特性について，第32回土木学会年講概要集，II, pp.169-170 (1977)
- 2) 岡・角屋：丘陵地斜面域における雨水の浸入・流出過程，京大防災研究所年報，第18号B，pp.469-482，(1975)
- 3) 石原・田中・金丸：わが国における単位図の特性について，土木学会誌，第41巻，3号，pp.18-23，(1956)
- 4) Vemuri, V., Dracup, J. A., Erdmann, R. C. & Vemuri, N.: Sensitivity analysis method of system identification and its potential in hydrologic research, Water Resources Research, Vol. 5 No. 2, pp. 341-349, (1969)
- 5) McCuen, R. H.: The role of sensitivity analysis in hydrologic modeling, Journal of Hydrology, 18, pp. 37-53, (1973)
- 6) Linsley, R. K., Kohler, M. A. & Paulhus, J. L. H.: Applied hydrology, McGraw-Hill, (1949)