

縦分散における移流域の特性

The Role of Convective Period in the Longitudinal Dispersion

京都大学防災研究所 ○ 道上正規

京都大学防災研究所 村本嘉雄

三井建設 K. K. 伊丹正紀

1. まえがき

河川の縦分散は流れのシア効果と乱流混合の相乗効果によって生起する過程であり、これは一次元の Fick 型の拡散方程式で記述されることがよく知られている。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

(1) 式を瞬間面源の条件下で解くと、濃度分布は周知の Gauss 分布形になる。

$$c(x, t) = \frac{W}{\rho g A 2\sqrt{\pi D t}} \exp \left[-\frac{(x - Ut)^2}{4 D t} \right] \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 c : 断面平均濃度、 U : 断面平均流速、 D : 分散係数、 W : 分散物質の投入重量、 ρg : 水の単位重量、 A : 断面積である。この(2)式では、固定された時間に対して、濃度—距離曲線が Gauss 分布形になるが、距離を固定した場合の濃度—時間曲線はわずかに歪んだ分布形状となる。しかし、この濃度—時間曲線はほぼ Gauss 分布で近似できる。時間を固定して、濃度—距離曲線を実験的に測定することは困難なため、距離を固定した濃度—時間曲線で分散過程を検討することにしよう。

(2) 式を規格化して、濃度—時間曲線での濃度を求めると次式のようにになる。

$$f(t, x) = \frac{U}{2\sqrt{\pi D t}} \exp \left[-\frac{(x - Ut)^2}{4 D t} \right] \quad \dots\dots\dots (3)$$

$f(t, x)$ の平均値 $\bar{t}$ 、分散 σ_t^2 、ピーク濃度はそれぞれ次式のように表される。

$$\bar{t} = \frac{x}{U} + \frac{2D}{U^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{2Dx}{U^3} + 8 \left(\frac{D}{U^2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$f_{max}(t_p, x) = \frac{U}{2\sqrt{\pi D t_p}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

(4)、(5) 式のそれぞれの右辺第 2 項は、 x が増加するとただちに右辺第 1 項に比し、無視できる大きさになるため、一般には(4)、(5) 式の右辺第 1 項のみを考えれば充分である。したがって、分散は、 $\sigma_t^2 \approx 2Dx/U^3$ あるいは $\sigma_t^2 \approx 2D\bar{t}/U^2$ で表示されるとともに、(6) 式から明らかなように、ピーク濃度の低減は時間の平方根に逆比例するはずであるが、必ずしもこのような関係が実験や観測では満足されていない。

Nordin Sabol¹⁾ が従来の実河川の資料を整理して、これらの関係を検討した結果、 $\sigma_t^2 = a \bar{t}^{2H}$ の関係式で、 H は $0.4 \leq H \leq 1$ で、平均値 0.7、また $f_{max} \propto t_p^{-\beta}$ において、 β は $\beta \geq 0.5$ で、平均値 0.77 という結論を得た。このような理論との差異の原因は、Ⅰ) 一次元の理論が多くの河川の縦分散を表すのに適していない、Ⅱ) 移流域が予想外に長いことによるものと推定されている。したがって、(1) 式及び(3) 式の適用限界を把握しておくことが、こうした問題を考える場合に非常に重要である。

実測値が(1) 式及び(3) 式に適合しないのは、濃度—時間曲線が立上がり部で急で、低減部で長く尾を引くという歪に起因している。この歪の原因としては、Ⅰ) トレーサの注入が瞬間面源でないこと、Ⅱ) 移流域においてシア効果によって歪まされることが及び Ⅲ) 水路断面形状の不規則性などが挙げられよう。Fischer²⁾ は

このような要因のため、(1)式の成立する領域は次式で表されるとした。

$$x > 1.8 \ell^2 U / RU_* \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 x ：トレーサー注入点からの距離、 ℓ ：最大流速点から最も離れた岸までの距離、 R ：径深、 U_* ：摩擦速度であり、この領域をTaylor 域(分散域)と名付けた。一方、Chatwin³⁾は(3)式が成立する領域として次式を提唱した。

$$x > 4.4 \ell^2 U / RU_* \dots\dots\dots (8)$$

本研究では、Nordin・Sabol 及び Day⁴⁾によって投げかけられた“河川の分散に対してはFick型の一次元拡散方程式が成立しないのではないか”という疑問を検討するため、一様幅の長水路で分散実験を行い、上述の研究成果に基づいて濃度分布形、分散、ピーク濃度の低減に関する考察を試みるとともに、実河川の資料に関しても検討を加える。

2. 実験の概要

開水路における縦分散の実験は数多く行われているが、その多くは実験水路が長くなく、測定点も少ないので、移流分散過程について詳細な検討がなされていない。したがってここでは、幅60cm、長さ150m、勾配1/500の長方形断面水路を用いて分散実験を行った。水路上流端より10mの地点($x=0$)に設置された、長さ59.5cmのビニール製樋の中に、6%食塩水500ccを入れて、それを水面付近で瞬間的にひっくり返すことによって、トレーサー注入とした。測定点は $x=30m \sim 130m$ まで10m間隔に11断面、水路中央の1/2水深点で、塩分濃度測定には電導度計を使用した。また、必要に応じて、水路断面内の多点測定が実施された。

実験条件は、表-1に示すとおりで、各実験ケースで濃度測定を2~3回繰り返して、その再現性を検討した。

表-1 実験条件

	Q (l/s)	U (cm/s)	h (cm)	u_* (cm/s)	$\frac{B}{h}$	$\frac{U}{U_*}$
Exp I	8	39.6	3.61	2.66	16.6	13.9
Exp II	13	45.4	4.77	3.06	12.6	14.8
Exp III	18	51.7	5.80	3.37	10.3	15.3
Exp IV	22	54.5	6.68	3.62	9.0	15.2

3. 濃度分布の性状

まず、流下方向の分散物質の全量を検討した結果、各実験ケースともほぼ保存されており、水路床などへの吸着は無視できるものと判断された。濃度分布形が図-13に示されているが、これから明らかに、低減部で長く尾を引くいわゆるTailing現象を起こしており、このGauss分布からの歪は図-1の正規確率紙上に累加濃度でプロットするときより明瞭に表される。このような濃度分布形の歪は、河床粗度や側壁による、流速分布の歪によって生じる分散物質の捕捉効果に起因しているものと推定される。

横断方向の多点測定より得られた図-2の等濃度分布図から明らかに、横断方向の濃度分布形状はピーク生起時刻を境にして、水路中央部の濃度が側壁付近のそれよりも高い前半部と、水路中央部の濃度が側壁付近のそれよりも低い後半部から成っている。したがって、前半部では水路中央から両側壁に濃度フラックスがあり、後半部では両側から中央に濃度フラックスが存在することを意味している。このような現象は死水域が存在するような流れで明瞭に現れ、それに関する死水域モデルがHays⁵⁾や村本・道上・中川⁶⁾によって検討されている。しかし、本実験水路では、側壁がペンキ仕上げ、水路床がモルタル仕上げであるにもかかわらず、死水域が存在する流れと同様な傾向があることは興味深い。

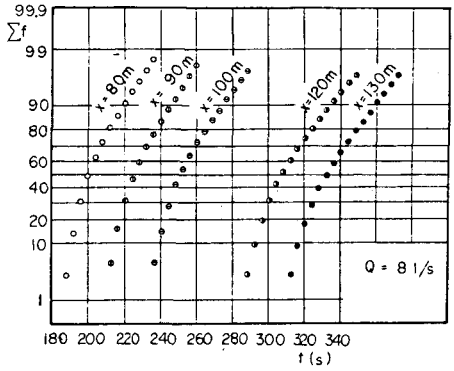


図-1 累加濃度と時間の関係

4. モーメント及びピーク濃度の特性

4. 1 モーメントの特性

$f(t, x)$ の平均値 $\bar{t}$ と x の関係を図-3 に示しているが、これらの実験値は、(4)式で与えられるように、 $\bar{t}-x$ の関係は比例関係にある。したがって、この関係から移流速度を求めることができ、また、その値は各実験とも断面平均流速にほぼ等しくなった。次に、 $f(t, x)$ の分散 σ_t^2 と $\bar{t}$ の関係が、図-4 の両対数紙上にプロットされている。これから明かなように、 $\sigma_t^2 \propto \bar{t}^{1.7}$ なる関係が成立しており、(5)式で与えられるような $\sigma_t^2 \propto \bar{t}$ にはなっていない。しかし、時間が経過するにつれて、 $\sigma_t^2 \propto \bar{t}$ に漸近する傾向がうかがえる。いま、 σ_t^2 と $\bar{t}$ の関係を普通目盛紙上に図-5 のようにプロットするとき、 $\bar{t}$ がある値より大きくなると、 σ_t^2 は

(5)式を用いて次式のように表される。

$$\sigma_t^2 = \frac{2D}{U^2} (\bar{t} - t_*) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 t_* : σ_t^2 を $\bar{t}$ の1次関数で表したとき、 $\sigma_t^2 = 0$ になる $\bar{t}$ の値を示しており、これを遅れ時間と定義する。このような遅れは、横断方向のシアによって引き伸ばされた

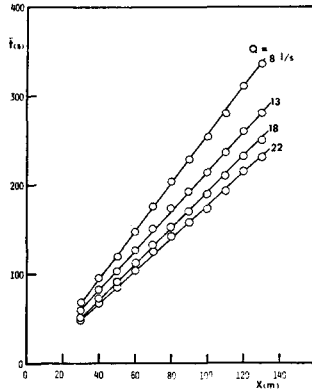


図-3 $\bar{t}-x$ の関係

分散物質が、断面内に拡がるために必要な時間であり、測定対象の時間スケールと t_* が同程度の場合には、(9)式の σ_t^2 と $\bar{t}$ の関係を両対数紙上にプロットするとき、 $\sigma_t^2 \propto \bar{t}$ の関係は得られない。本実験では、このような領域に属していたため、 $\sigma_t^2 \propto \bar{t}$ にはならなかったものと考えられるが、 $\bar{t} \gg t_*$ の場合には、 $\sigma_t^2 \propto \bar{t}$ (両対数紙上で) の関係を満足するであろう。

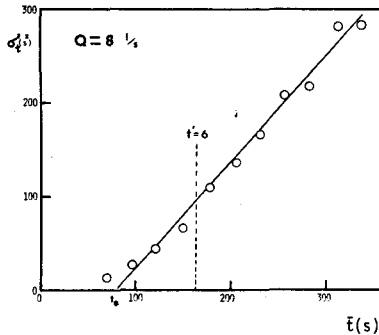


図-5 $\sigma_t^2-\bar{t}$ の関係

次に(9)式の適用範囲及び t_* の特性を検討するために、Fischer の分数に関する Lagragian time scale T_L を導入しよう。

$$T_L = 0.3 \frac{\ell^2}{RU_*}$$

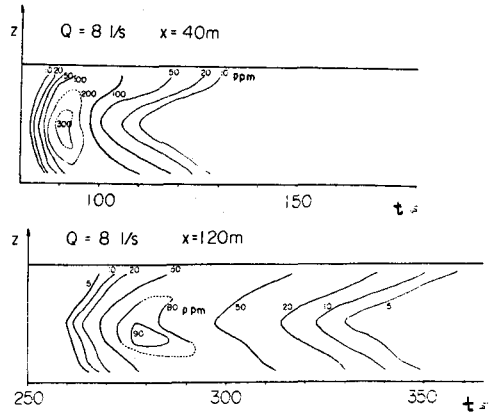


図-2 等濃度分布

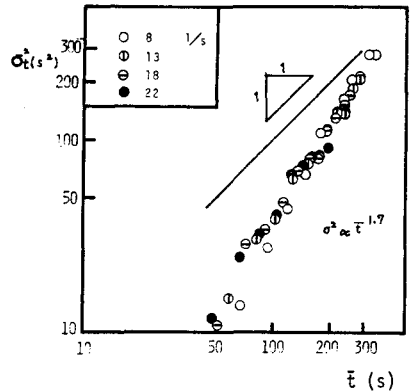


図-4 $\sigma_t^2-\bar{t}$ の関係

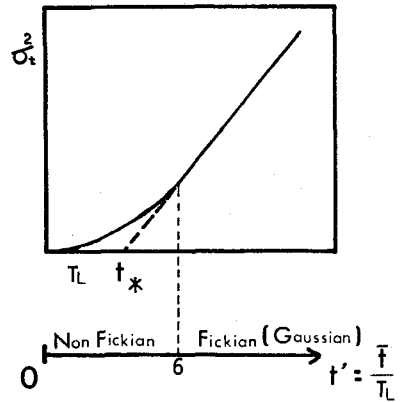


図-6 縦分散過程の模式図

$\bar{t}$ の無次元量 $t' = \bar{t}/t_L$ を作って、 σ_t^2 の変化を模式的に書くと図-6のように表される。この図で、 $t' > 6$ は(7)式に対応するものであり、(9)式の適用範囲は $t' > 6$ になるものと考えられる。また、この領域では(1)式の Fick の拡散方程式が適用できるものと推定される。さらに、 t' が增大するとき、濃度分布形は(3)式で与えられる Gauss 分布形に漸近するであろう。これらの実験範囲における t_*/T_L は 1.8~4.8 の範囲で、その平均値は 3.3 になっている(表-2 参照)。なお、図-5 に $t' = 6$ に対応する $\bar{t}$ の値を記入してある。

表-2 t_* , T_L , t_*/T_L の実験値

	Q (l/s)	t_* (s)	T_L (s)	t_*/T_L	D (cm ² /s)	D/hu _*
Exp I	8	80	28.1	2.8	770	80.2
Exp II	13	80	18.5	4.3	1068	72.8
Exp III	18	60	13.8	4.3	1020	52.2
Exp IV	22	20	11.2	1.8	820	33.9

4. 2 ピーク濃度の低減

図-7 はピーク濃度の低減を表したものであるが、実験値は $f_{max} \propto t_p^{-0.88}$ となり、(6)式から得られる $f_{max} \propto t_p^{-0.5}$ の関係とは異なっている。前述の分散の場合と同様に遅れ時間 t_* を導入して、トレーサ投入後の経過時間と、実質的な分散時間を区別して、図-8 を作成した。これから明かなように、次式の関係を得る。

$$f_{max} \propto (t_p - t_*)^{-0.5} \tag{11}$$

以上の考察に基づいて、(6)式を次式のように修正すれば、ピーク濃度の低減が予測できよう。

$$f_{max}(t_p - t_*, x) = \frac{U}{2\sqrt{\pi D(t_p - t_*)}} \tag{12}$$

いま、(12)式と実験値の適合性を検討するため、図-9 に f_{max} と $D(t_p - t_*)/U^2$ の関係をプロットし、かつ(12)式の関係を図示した。その結果、実験値は(12)式でかなりよく表示されることがわかる。ただし、分散係数 D は $\sigma_t^2 - \bar{t}$ のグラフの勾配から、次式のモーメント法によって算出した。

$$D = \frac{U^3}{2} \frac{d\sigma_t^2}{dx} = \frac{U^2}{2} \frac{d\sigma_t^2}{d\bar{t}} \tag{13}$$

このように、モーメント法によって得られる D と遅れ時間 t_* を使用すれば容易にピーク濃度の低減は予測される。

4. 3 実河川のピーク濃度の低減

Godfrey・Frederick⁷⁾ の実測資料に基づいて、ピーク濃度および遅れ時間 t_* について検討を加える。彼らはアメリカの5つの河川について11ケースの縦分散実験を行ったが、移流速度が流下方向にはほぼ一定の9ケースの資料を使用する。Nordin・Sabol は彼らの資料について、 c_{max} と t_p との関係をも対数紙上にプロ

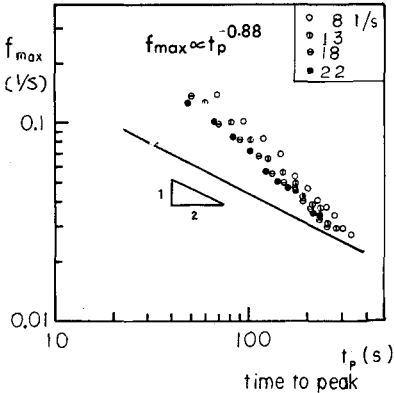


図-7 $f_{max} - t_p$ の関係

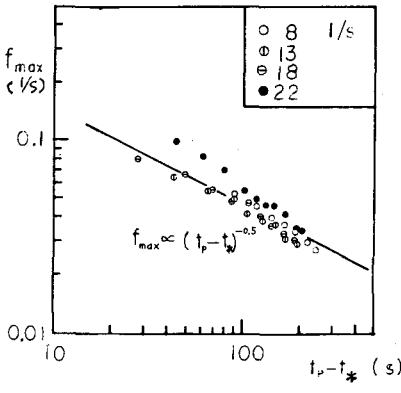


図-8 $f_{max} - (t_p - t_*)$ の関係

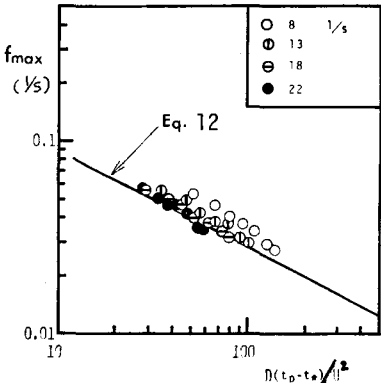


図-9 f_{max} の実験値と理論式の比較

ットして、 c_{max} が $t_p^{0.5}$ に比例しないことを示し、前述したように、(1)式または(3)式の河川への適用性に疑問を投げかけたので、ここでは遅れ時間 t_* を導入して、 c_{max} と $(t_p - t_*)$ の関係を両対数紙上にプロットしたものが図-10である。これから明かなように、各ケースとも $c_{max} \propto (t_p - t_*)^{-0.5}$ の関係を満足していることから、実質分散時間 $(t_p - t_*)$ の導入の妥当性が確かめられる。 t_* の算出は前述の方法によったが、 t_*/T_L の範囲は 1.5 ~ 17.7 で、その平均値は 4.4 であった。

一方、筆者らの河川模型実験水路におけるピーク濃度の測定結果では、 $t_*/T_L \approx 0$ となっており、さらに今後 t_* の水理学的特性を検討する必要があるだろう。

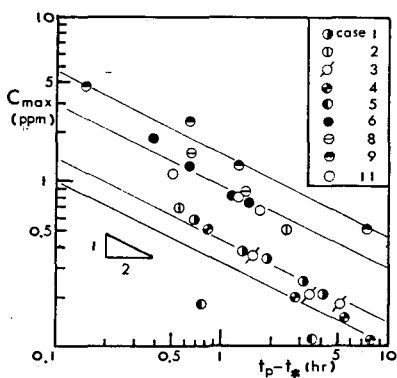


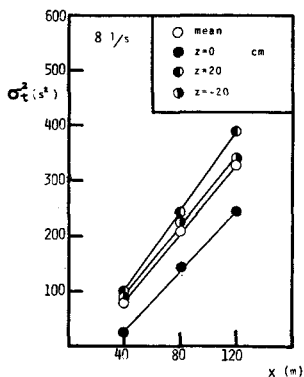
図-10 河川におけるピーク濃度の低減
(Godfrey らの資料使用)

5. 断面平均濃度と濃度分布

5. 1 断面平均濃度

大部分の実験ケースについては、水路中央部、 $1/2$ 水深点での測定濃度を断面代表値として用いているため、これを断面平均濃度とみなせるかどうかを検討する必要がある。Yotsukura・Fiering⁹⁾の数値シミュレーションによれば、断面内の各点における分散及びピーク濃度の流下方向変化率は、その位置に関係なく等しくなることが明らかにされている。

本実験においても、濃度の多点測点より、各断面内の分散及びピーク濃度の距離的变化を求めると、図-11・12 のよう表される。これらの図で mean の記号で示されるものは、断面内横断方向 7 点の $1/2$ 水深点での断面平均濃度であり、これと水路中央 ($Z=0$)、両側 ($Z = \pm 20$ cm) での温度とが比較されている。



図から明かなように、図-11 断面内の分散値の変化

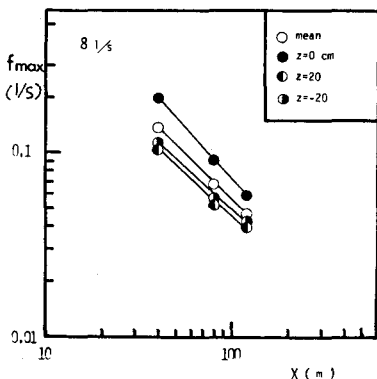


図-12 断面内の f_{max} の変化

それぞれの変化率はほぼ等しくなっており、断面平均濃度を水路中央部の値で代表させることができるであろう。

5. 2 濃度分布

トレーサー投入点付近の濃度分布は、種々の要因によって歪んだ形状をしているため、(3)式によってその分布形状を表すことはできないので、(3)式を濃度応答関数として用いた Routing 法によって濃度分布を算出した結果が図-13 に示されている。もちろん、Routing 法は(1)式の成立を前提としているので、その適用範囲も(1)式の成立する範囲で、Fischer によって提案された(7)式または $D > 6$ の領域に限られる。D としては、(3)式のモーメント法より算出された値 (表-2 参照) が用いられ、U としては移流速度が用いられているが、Routing 法と実測値との適合性はかなり良好である。このことは分散物質が Taylor 域に到達しておれば、たとえ濃度分布が歪んでいても、分散係数はモーメント法で予測されるとともに、その濃度分布形状は Taylor 域の濃度分布を初期値として与えた Routing 法で予測されることを示している。したがって、このような分散物質の濃度分布は、図-6 で示したように、投入点からの距離の増加とともに Gauss 分布に漸近していく

ものと考えられる。

一方、移流域では、シア効果と乱流混合がつり合っていないため、 σ_t^2 は $\bar{x}$ に比例せず、(1)式は成立しない。したがってこの領域における濃度分布形状の予測には、二次元あるいは三次元の拡散方程式

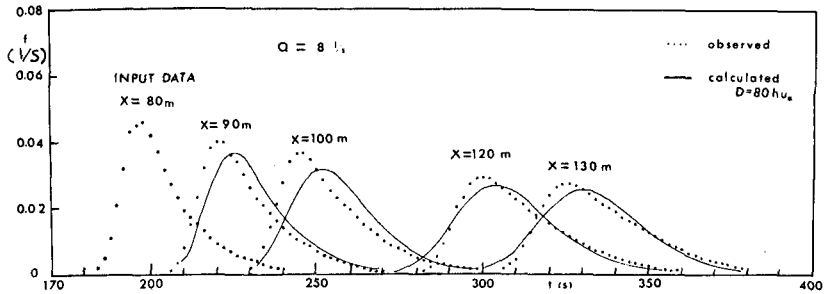


図-18 Routing 法による計算値と実測値の比較

の数値計算に頼る以外に方法はないようである。

6. あとがき

Fick の一次元の拡散方程式が成立するには、Fischer によって提案された $\epsilon' > 6$ の Taylor 領域に分散物質が到達していなければならない。このような領域では、遅れ時間 t_* を導入することによって、トレーサ投入後の経過時間と実質分散時間を区別するとき、分散及びピーク濃度はそれぞれ(9)及び(12)式で表される。また、濃度分布形は Taylor 域に到達した濃度分布を初期値として与えた Routing 法によって推算されるが、その場合の分散係数の算定には、モーメント法が適用できる。なお Fischer の方法による分散係数の推算値はモーメント法によるそれと若干の差異があり、横方向の乱流拡散係数の検討が必要であろう。

参 考 文 献

- 1) Nordin, C.F. & G.V. Sabol : Empirical data on longitudinal dispersion in rivers, U.S.G.S., Water Resources Invest. 1974.
- 2) Fischer, H.B. : Longitudinal dispersion in laboratory and natural streams, Report No. KH-R-12, CIT 1966.
- 3) Chatwin, P.C. : The cumulants of the distribution of concentration of a solute dispersing in solvent flowing through a tube, J. Fluid Mech., 51, part 1, 1972.
- 4) Day, J.T. : Longitudinal dispersion in natural channels, Water Resources Research, Vol. 11, No. 6, 1975.
- 5) Hays, J.R. : Predicting effects of dead zones on stream mixing, Proc. ASCE, Sanit. Eng. Div., Vol. 96, 1970.
- 6) 村本・道上・中川 : 開水路流れの縦分散に関する考察, 第20回水理講演会論文集, 1976.
- 7) Godfrey, R.G. & B.J. Frederik : Stream dispersion at selected sites, U.S.G.S., prof. Paper 433-K, 1970.
- 8) 村本・道上・伊丹 : 開水路流れの縦分散について, 第32回土木学年次学術講演会講演概要集, 第2部 1977.
- 9) Yotsukura, N & Fiering, M.B. Numerical solution to a dispersion equation, Proc. ASCE, Hydraulic Div., Vol 90, Hy 5, 1964.