

非定常選択取水に関する研究

Study on unsteady selective withdrawal

東京工業大学 正会員 吉川 秀夫

同 上 正会員 ○山田 正

同 上 学生員 水谷 俊孝

1. はじめに

密度成層をした貯水池や海からの取水について、密度分布が直線の場合についての研究は実験的にも理論的にも従来より数多く有る。そして Deblor の研究以後、実験的には成層流体を特徴づける内部フルード数がある臨界値以下になると一定幅の層の水のみが取水される選択取水の状態が出現することが明らかにされている。一方理論的には2次元取水に関して Yih¹⁾, Trustrum²⁾, Kao³⁾, Koh⁴⁾, Imberger⁵⁾ らの解があり、軸対称取水に関して日野・大西⁶⁾, Koh⁴⁾ らの解が有る。これらの解析解のうち、取水流量が極端に小さい場合を取扱っている Koh の解を除いて内部フルード数が小さい場合の流れを十分に説明しうる解は無いと言えよう。この様な事情から Pao⁷⁾ らは数値計算を行ない、密度成層流体中に取水によって特異な波動が現れることを見出ししている。本研究は選択取水の問題として解析的に取扱いの容易な2次元取水の場合に着目し、運動方程式中の移流項を部分的に残した Oseen 近似に基く理論展開を行い、内部フルード数が1に比べて十分に小さい場合を考え、ある瞬間より急激に一定流量を取水したときの流体内部の挙動をいわゆる過渡応答の問題として解析し、さらにこのような場合の実験を行い、解析解の妥当性を検討し、合せて線形理論の限界を考察したものである。

2. 理 論

(1) 基礎方程式 座標系を図-1に示す。2次元選択取水の基礎方程式としては Boussinesq 近似を行った x, y 方向の運動方程式、連続の式、ならびに非圧縮の条件式の4式となるが、未知数としては流速 u, v 、圧力 P 、密度 ρ の4個より原理的には解き得る形をしている。ここで粘性項に関して、一般に取水口近傍を除いては $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$ が成立していると考えられる。よって $\nu \nabla^2 u \simeq \nu \partial^2 u / \partial y^2$ とおき、一種の境界層近似を持ち込むことができよう。また移流項は前述のように Oseen 近似を用い、これらの近似 (Boussinesq 近似, Oseen 近似, 境界層近似) のもとに基礎方程式を列挙すると

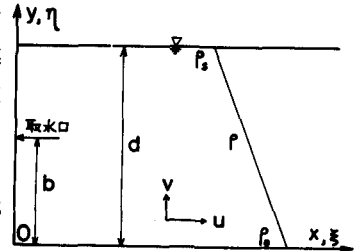


図-1 座 標 系

$$\frac{\partial u}{\partial t} - U \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{\rho_0} g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - U \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots (4)$$

ここに、 ρ_0 : reference density ここでは底面密度、 ν : 動粘性係数、 g : 動力加速度、 U : 断面平均流速の絶対値 $= q/d$, q は単位幅当りの流量

つきに (1), (2) 式より圧力 P を消去すると

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad \dots\dots(5)$$

ここに $\omega = \partial u / \partial x - \partial v / \partial y$, $D/Dt = \partial / \partial t - U \partial / \partial x$ である。さらにラグランジュの流れの関数 Ψ を用いると $u = \partial \Psi / \partial y$, $v = -\partial \Psi / \partial x$, $\omega = \nabla^2 \Psi$ より (5) 式は次のようになる。

$$\frac{D \nabla^2 \Psi}{D t} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \nabla^2 \Psi}{\partial y^2} \quad \dots\dots(6)$$

また (3) 式と (6) 式から密度 ρ を消去すると

$$\frac{D^2 \nabla^2 \Psi}{D t^2} = \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \right) + \nu \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial^2 \nabla^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots(7)$$

取水を始める前には密度が水深方向に直線分布をしている場合を考えていることより $\rho(x, y, t)$ としては次式のように考える。

$$\rho(x, y, t) = \rho_0 (1 - \varepsilon y) + \rho'(x, y, t) \quad \dots\dots(8)$$

ここに $\varepsilon = (\rho_0 - \rho_s) / \rho_0 d$, ρ_s は水面での密度である。さらに (8) 式を (7) 式に代入し, $\rho' / \rho_0 \ll 1$ を考慮すると (9) 式を得る。

$$\frac{D^2 \nabla^2 \Psi}{Dt^2} + \varepsilon g \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \nu \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial^2 \nabla^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots(9)$$

ここに $D^2/Dt^2 = (\partial / \partial t - U \partial / \partial x)^2 = \partial^2 / \partial t^2 - 2U \partial^2 / \partial t \partial x + U^2 \partial^2 / \partial x^2$ である。(9)式が以下の解析における基本式となる。

(2) 無次元化 (9) 式の無次元化は次のように行った。 $\xi = x/d$, $\eta = y/d$, $\tau = t/T$ ($T = 1/\sqrt{\varepsilon g}$), $\varphi = \Psi T/d^2$, $Re = d^2/\nu T$ (レイノルズ数), $Fr = UT/d$ (内部フルード数) これを用いると

$$\frac{D^2 \nabla^2 \varphi}{D \tau^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Re} \frac{D}{D\tau} \left(\frac{\partial^2 \nabla^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) \quad \dots\dots(10)$$

ここに $D/D\tau = \partial / \partial \tau - Fr \partial / \partial \xi$ である。ここで前述のように (10) 式右辺の粘性項に対し境界層近似を用いると $\nabla^2 \varphi \approx \partial^2 \varphi / \partial \eta^2$ となり, (10) 式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - Fr \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Re} \frac{D}{D\tau} \left(\frac{\partial^2 \nabla^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) \quad \dots\dots(11)$$

ところで (11) 式を解いて得られる解は取水口に向うポテンシャル流れ (一様流) からのズレを表していることより実際の流線 φ_0 はこれに一様流を加えて表わす。(12)式中の $H(\tau)$ は単位ステップ関数である。

$$\varphi_0 = -\eta Fr H(\tau) + \varphi(\xi, \eta, \tau) \quad \dots\dots(12)$$

(3) 境界条件 (11) 式に対する境界条件及び初期条件は壁面での滑りを許すと

$$(i) \quad \varphi = 0, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad \eta = 0, \quad 1 \quad (ii) \quad \varphi = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$(iii) \quad \varphi(\xi = 0) = [-F(\eta) + \eta Fr] H(\tau) \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \xi = 0$$

$$F(\eta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \eta \leq b \\ Fr & b \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad \dots\dots(13)$$

$$(iv) \quad \partial \nabla^2 \varphi / \partial \tau = \nabla^2 \varphi = 0, \quad \tau < 0$$

ここで後の便のために $\xi = 0$ での境界条件 (iii) を η 方向にフーリエ変換すると

$$\varphi(\xi = 0) = \left[-2Fr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \cos n\pi b \cdot \sin n\pi \eta \right] H(\tau) \quad \dots\dots(14)$$

(4) ラプラス変換 (12) 式に付記 2 で定義されるラプラス変換を (13) 式の (iv) を考慮して行くと

$$\left(p - Fr \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 \nabla^2 \bar{\varphi} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Re} \left(p - Fr \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^4 \bar{\varphi}}{\partial \eta^4} \quad \dots\dots(15)$$

ここに $\bar{\varphi}$ は φ の像関数である。つぎに $\bar{\varphi}$ を y 方向にフーリエ変換を行い、その中の任意の 1 項に関して (15) 式の解の形を次のように与える。

$$\bar{\varphi}_n(p) = -\frac{A_n}{kp} \cos kb \cdot \sin k\eta \cdot \exp(-\alpha k \xi) \quad \dots\dots (16)$$

ここに A_n : 境界条件より決まる定数, $k = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$, である。(16) 式を (15) 式に代入し、若干の計算の後 α を決める方程式を得る。

$$(p + Frka)^2 (\alpha^2 - 1) + \alpha^2 = 1/R_e \cdot (p + Frka) \quad \dots\dots (17)$$

(17) 式は α に関する 4 次方程式であるが、これから根 α を求める事は困難である。よって以下の様に極限の場合を考えることにする。

(a) $Fr \rightarrow 0$, $Re \rightarrow 0$ (移流項無視, 非粘性の極限) のとき (17) 式の根は $\alpha = \pm p/\sqrt{p^2 + 1}$ となり、これを (16) 式に代入して

$$\bar{\varphi}_n(p) = \frac{A_n}{kp} \cos kb \sin k\eta \cdot \exp\left(-\frac{pk\xi}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) \quad \dots\dots (18)$$

(18) 式のラプラス逆変換を取れば解は得られるわけであるが、その前に $\tau \rightarrow 0, \infty$ 等の簡単な場合から考察してみる。

(i) $\tau \rightarrow 0$ このときはラプラス逆変換の極限值定理より

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi_n(\tau) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \bar{\varphi}_n(p) = \frac{A_n}{k} \cos kb \cdot \sin k\eta \cdot \exp(-k\xi) \quad \dots\dots (19)$$

(19) 式は、(18) 式で $\xi = 0$, $\tau \rightarrow 0$ としたときに等しいものであるから $A_n = -2Fr$ となる。(19) 式より取水開始直後の解は

$$\varphi = -\eta Fr - 2Fr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \cdot \sin n\pi\eta \exp(-n\pi\xi) \quad \dots\dots (20)$$

となり、これは取水口に流入するポテンシャル流れである。

(ii) $\tau \rightarrow \infty$ この場合も同様にラプラス逆変換の極限值定理を用いると

$$\varphi = -\eta Fr - 2Fr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \cdot \sin n\pi\eta \quad \dots\dots (21)$$

(21) 式は $\xi = 0$ での境界条件と同じであり、 $\partial\varphi/\partial\eta = \delta(b)$ となり意味のない解である。

(iii) ラプラス逆変換の数値計算 (22) 式のラプラス逆変換を付記 2 に示す数値計算手法により行い、図示したものが図-2 である。

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} e^{p\tau} \exp\left(-\frac{n\pi p\xi}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) dp \quad \dots\dots (22)$$

これより (22) 式はある種の波動現象を示しており、この波動は Pao⁷⁾ や McEwan⁹⁾ らもそれぞれ独自に見い出している。ところでこの波動現象は付記 1. にも示すように解の固有関数(モード)によって決る伝播速度 C_n をもっており $C_n = 1/n\pi$ (次元をもつ形では $C_n = d/n\pi T$) と考えられる。この波速によって図-2 を書き直したものが図-3 である。Pao⁷⁾ らはこの波動を“columnar wave”と呼んでいる。これは段波の形をしたモード波の一種と考えられ、取水口に向う平均流速 $Fr (=UT/d)$ にさからって上流にそ上するものである。よってモード(n)によっては波速が平均流速よりも小さくなり、上流にそ上することが出来ないものも存在することになる。

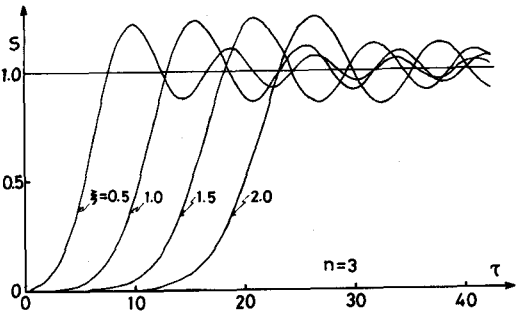


図-2

ある点で観測しているとそ上し得る全てのモードが出揃った以後は流れは定常となる。このときの解を準定常解と呼ぶと、これは次式の様に表わすことができよう。

$$\varphi_0 = F_r \left\{ -\eta - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\pi} \cos n\pi b \cdot \sin n\pi \eta \right\} \dots (23)$$

ここに N は $1/n\pi > F_r$ を満す最大の正整数である。(23)式により流速分布を図示したものが図-4であり、内部フルード数 F_r が小さくなるにつれて流速分布はとがってくるのがわかる。

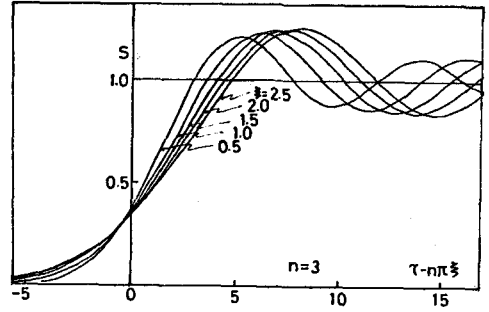


図-3

(b) $F_r \neq 0$, $Re \rightarrow \infty$ (23)式は ξ によらない解であり、 $\xi = 0$ での境界条件を満たしていない。これを取水口近くにおいては $\partial/\partial\xi$ の項を無視することが出来ないことによる。このとき (17) 式の根は $\alpha = 0$ と $\alpha = \sqrt{1 - (F_r k)^{-2}}$ の2つ有るが、 $\alpha = 0$ は (22) 式に導くものであるから残った根を (22) 式に代入すると、得られる解は

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & F_r \left\{ -\eta - 2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi \eta \right. \\ & \left. - 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \cdot \sin n\pi \eta \exp(-n\pi\xi\sqrt{1-(n\pi F_r)^{-2}}) \right\} \dots (24) \end{aligned}$$

(24)式が非粘性の場合の準定常解である。Trustum²⁾も同様の解を得ているが彼の解との相違は (24) 式右辺第2項の N が ∞ になっている点だけである。しかしこの違いは得られる流線、流速分布に大きな差を生じるものである。

(c) $F_r \rightarrow 0$, $Re \neq 0$ これは移流項を無視した運動方程式において粘性を考慮することに相当する。このとき、(12) 式中第1項の $\nabla^2 \varphi$ に関して $\nabla^2 \varphi = \partial^2 \varphi / \partial \eta^2$ のように境界層近似を行うと

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \eta^4} \right) \dots (25)$$

ここで前述のように φ を η 方向にフーリエ変換を行い、そのうちの任意の一項を φ_n とすると $\varphi_n = X(\xi, \tau) \sin k\eta$ ($k = n\pi$) と書くことが出来る。これを (25) 式に代入すると、(26) 式を得る。

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} = k^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} + \frac{k^4}{Re} \frac{\partial X}{\partial \tau} \dots (26)$$

この方程式は電気回路を支配する電信方程式と同じ型をしており、波動と拡散方程式の両方の性質をもっている。ところで電信方程式の解は知られており、拡散項による波動の減衰は $\exp[-k^3 \xi / 2 Re]$ で与えられる。よって (24) 式は修正されて

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & F_r \left\{ -\eta - 2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi \eta \exp\{-(n\pi)^3 \xi / 2 Re\} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi \eta \exp(-n\pi\xi\sqrt{1-(n\pi F_r)^{-2}}) \right\} \dots (27) \end{aligned}$$

となる。この式が粘性を考慮した線形理論にもとづく解である。図-5、6は (27) 式において、 $b = 0$ とおいたときのそれぞれ $F_r = 0.3$, $Re = 1000$ 及び $F_r = 0.03$, $Re = 500$ としたときの流線図である。

図-7は図-6と同じ F_r , Re のもので流速分布である。図-5では取水口上部に大きな渦が見られるが、実験ではこれ程顕著に渦や、逆流は存在しないようである。(27) 式より内部フルード数が小さくなるにつれ

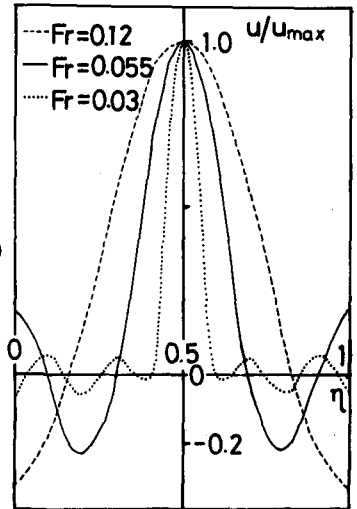


図-4 流速分布

取水幅はしだいに狭くなり、また同じ内部フルード数に対してはレイノルズ数が高い程取水幅は狭くなることがわかる。つまり Re が小さくなると (27) 式中の高モードの波動はほとんど減衰し、流れの大部分は、はじめの数モードによって決ってしまうのである。これらの事を確認するために次に実験を行ってみた。

3. 実験装置及び実験

本研究では $9 \times 19 \times 100$ cm のアクリル製の水槽を用い 2 次元取水を実現するために水槽の一方の壁に底から 10 cm の高さに 0.2×9 cm のスリットを開け、また取水中の自由表面の低下を防ぐために水槽の他端に $19 \times 60 \times 60$ cm の補助水槽を設けている。実験は表-1 に示すように Fr をかえて行った実験のうち、2 ケースを載せている。理論で扱ったような密度分布を作るために濃度をあらかじめ測定した食塩水を静かに水槽内に入れ、所定の直線分布の密度成層を作った。取水時の流速測定には n -ヘキサンと C_6 -ベンゼンを適当に混合させることによって任意の密度をもった液を作り、35mm カメラと 8 mm カメラによる撮影のためにこれにオイルレッドを混ぜて着色し、取水前に静置した水槽内に、この液をビベットによって押し出し、このときできる赤色の小滴を

トレーサーとして用いることによって行った。つぎに一定流量の取水を開始してから後の各時刻での流速分布の一例を図-8 に掲げる。本論文には載せていないが、取水開始直後には (20) 式で予測したポテンシャル流れが現れており、流れの大部分において流速分布は一様であるが、図-8 の $t = 14$ 秒では取水口より上流に伝播しつつあるモードが取水口より 20 cm, 30 cm あたりに見られる。さらに時間が経つと水槽全体にわたって図-8 の 10 cm の点でみられる様な流速分布が形成され、流れは定常となる。しかしさらに時間が経つと、これらの波動が水槽の上流端に当たって反射し、それが流速分布を再び変えてしまうことが観察された。この様な波動の位相速度 C_n は次元をもつ形で $d/n\pi T$ で与えられているが、取水口に向う平均流速 U を考慮すると実際の伝播速度 C は $C = C_n - U$ となる。よって横軸を $t - X/C$ として取水口からの各点における最大流速を表示す

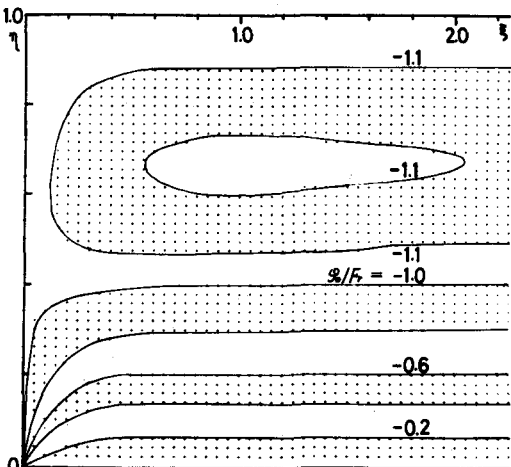


図-5 流線図 $Fr = 0.3, Re = 1000$

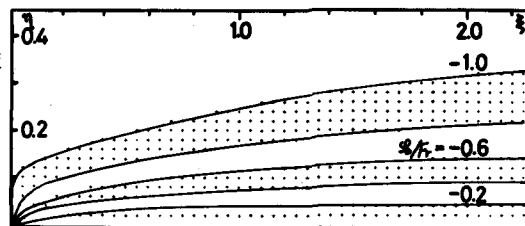


図-6 流線図 $Fr = 0.03, Re = 500$

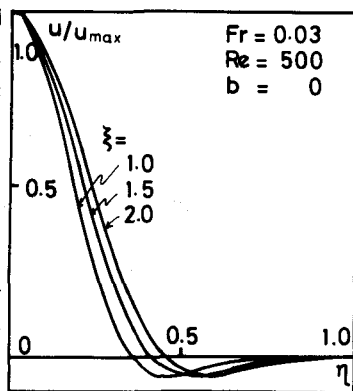


図-7

	q ($\frac{cm^2}{sec}$)	ϵ (1/cm)	T (sec)	Fr ($\frac{U}{d}$)	Re ($\frac{d^2}{\nu T}$)
RUN 1	9.13	1.36×10^{-3}	1.15	2.19×10^{-2}	4.15×10^4
RUN 2	4.83	1.32×10^{-3}	1.14	1.18×10^{-2}	4.11×10^4

表-1 実験諸量

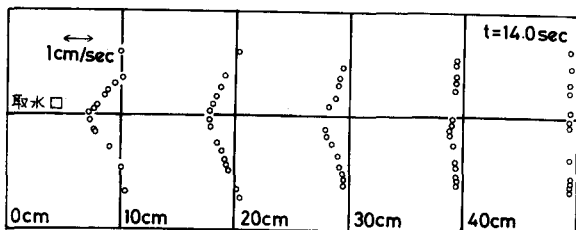


図-8 流速分布

ると図-9, 10となる。これらの図は本質的に図-3と同じであることから、理論から見いだされた、非定常選択取水の問題に現われる波動現象が実証されたことになる。ところで準定常状態における流速分布は実験でもほぼ図-7のような形をしているが、実験で得られる流速分布を(27)式で再現するためには実験のレイノルズ数の数10~数100分の1の Re を用いなくてはならない。これは見かけ上動粘性係数を大きく見積ることに相当する。このことは恐らく本研究では考えていない、各モード間の非線形干渉が生じているものと考えられ、一種の渦動粘性係数の様なものを導入する事によってある程度解決するのではないと思われる。

考察：オセーン近似にもとづく線形理論によって非定常選択取水の問題を扱うことにより、よどみ層の発生が流れをそ上する波動現象によるものであることがわかった。今後は非線形干渉をも考慮した研究を行う予定である。

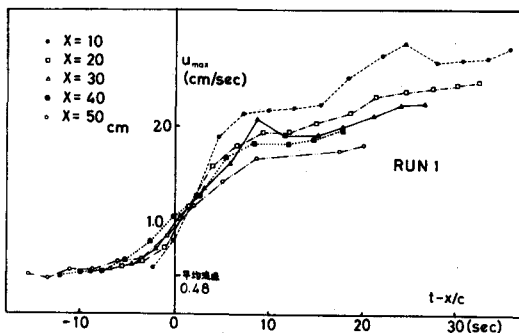


図-9

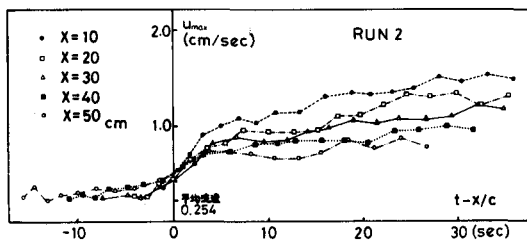


図-10

付記1. 本文(27)式において $Re \rightarrow \infty$ の場合の解は P_{20} からによって得られており、

$$\varphi(\xi, \eta, \tau) = -2F_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi b}{n\pi} \sin n\pi \eta H(\tau - n\pi \xi) \quad \dots\dots (S1)$$

ここで $H(\tau)$ は単位段階関数である。この式より各モードの位相速度 C_n は $1/n\pi$ で与えられる事がわかる。

付記2. 一般にプラス変換は次式で定義される。

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad \dots\dots (S2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad \dots\dots (S3)$$

ここで $p = r + i\sigma$ とおくと $f(t)$ は(S4)式となる。

$$f(t) = \frac{e^{\gamma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} F(r + i\sigma) d\sigma \quad \dots\dots (S4)$$

(S4)式は複素関数の複素フーリエ積分と考えられるから複素FFTのコンピュータライブラリーが利用出来る。解の精度を上げるには(S4)式を実部と虚部に分けそれぞれの積分にFilonの方法を適用する。

参考文献

- 1) Yih, C.S.: Dynamics of Nonhomogeneous Fluids, Macmillan, 1965.
- 2) Trustrum, K.: J. Fluid Mech., 19, 1964.
- 3) Kao, T.W.: J. Fluid Mech., 21, 1965.
- 4) Koh, R.C.Y.: J. Fluid Mech., 24, 1966.
- 5) Imberger, J.: J. Fluid Mech., 53, 1972.
- 6) 日野・大西: 土木学会論文報告集, 第163号, 1969.
- 7) Pao, H.P. and Kao, T.W.: Part 1, J. Fluid Mech., 65, 1974.
- 8) Kao, T.W., Pao, H.P. and Wei, S.N.: Part 2, J. Fluid Mech., 65, 1974.
- 9) McEwan, A.D. and Baines, P.G.: J. Fluid Mech., 63, 1974.