

プラス（マイナス）乱流平均混合流速について
Plus (Minus) Turbulent Mean Mixing Velocities

京都大学 農学部 南 勲

せん断乱流中の摩擦力あるいは物質の乱流拡散が、流れ中の変動流速成分に依存していることは、すでに明らかである。一般に、水理学でこの変動流速の挙動を取り入れて乱流拡散現象の解析を行うためには、渦粘性係数および渦拡散係数¹⁾の諸概念を導入して行うのが一般的であるが、流速分布が著しく変化するところでの乱流混合現象の実態を見ると、必ずしも充分なものではないと思われる。

一方開水路流れの乱流構造²⁾³⁾に対する研究は近来著しい進歩が見られた。たとえば福津氏⁴⁾の研究論文に見られるように、等流中の変動流速3成分の分布に対する一般的特性が得られている。しかし、本論文で取り扱ったのは、水路底近傍とか、2層乱流密度流の躍層面のように平均流分布の急変するところである。

いわゆる連続運動としての変動水理量の挙動に対する取り扱いではなく、変動流速をそれぞれ離散的な量として扱い、プラスあるいはマイナスに2分し、それぞれの単位時間内の発生確率を求め、それと水理学的係数との換算を行うことによって、プラス乱流平均混合流速およびマイナス乱流平均混合流速の時間的および場所的な量を求めることができた。すなわちプラス乱流平均混合流速は、単位時間内で50%の間存在し、マイナス乱流平均混合流速は残りの50%の時間だけ存在することになり、これを水理学的係数では $1/2$ に換算した。同様の定義は、場所的にも成立する。

変動流速の挙動を平均的な水理量として取り扱うことが可能になったので、流速の急変するせん断乱流内の運動量混合および物質の乱流混合の解析を行うことができた。

なお実験的検証の必要な部分も含まれているが、一つの提案として発表したい。

1. 時間的プラス（マイナス）乱流平均混合流速

長時間の測定から、横軸に変動流速、縦軸にそれぞれの変動流速の発生回数をプロットした変動流速の頻度分布曲線は、一般的に図1で示される。この曲線は、正規の誤差関数にきわめて近い形をしていることは一般的特性の一つと見做される。すなわち瞬間の変動流速は、それぞれ対称的な分布形を持つことが、現象的に理解される。したがって、それぞれの時間的平均値が以下のように定義される。

時間的プラス乱流平均混合流速

$$\overline{w_+} = \frac{1}{N_+} \int_0^{N_+} w_+ dN_+ \quad (1)$$

$$\overline{w_+} = \frac{1}{+T_{\infty}} \int_0^{+T_{\infty}} w_+ dt \quad (2)$$

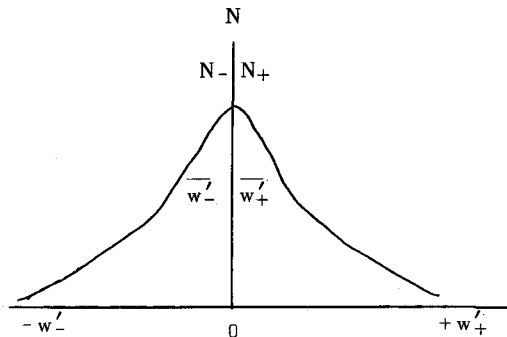


図1 変動流速の分布曲線

時間的マイナス乱流平均混合流速

$$\overline{-w'_-} = \frac{1}{N_-} \int_0^{N_-} -w'_- dN_- \quad (3)$$

$$\overline{-w'_-} = \frac{-1}{-T_\infty} \int_0^{T_\infty} -w'_- dt_- \quad (4)$$

ここに

w_+ = プラス乱流平均混合流速

N_- = マイナス混合流速のみの発生回数

w'_- = マイナス乱流平均混合流速

w'_+ = プラス混合流速 (瞬間的)

N = 混合流速の全発生回数

w'_- = マイナス混合流速 (瞬間的)

N_+ = プラス混合流速のみの発生回数

T_∞ = 全測定時間 ($t \rightarrow \infty$)

$\overline{w'_+}$ と $\overline{w'_-}$ とは定常的な値となり、それぞれの単位時間内の発生確率は50%と考えられてよい。この発生確率を水理学的諸式に代入する場合には係数 $1/2$ をかけることになる。また、その大きさについては、(5)式となる。

$$|\overline{w'_+}| = |\overline{w'_-}| \quad (5)$$

この定義は、流体力学の分野で定義されている変動流速の時間的平均値と以下に示す関係がある。

$$\overline{w'} = \frac{1}{T_\infty} \int_0^\infty w' dt \quad (6)$$

$$= |\overline{w'_+}| + (-|\overline{w'_-}|) \quad (7)$$

$$\overline{w'} = 0 \quad (8)$$

2. 場所的プラス (マイナス) 乱流平均混合流速

せん断乱流中に仮想面を図2のように取るとき、それを横切る変動流速の分布はプラス変動流速とマイナス変動流速とに分けられる。変動流速のそれぞれを統計的な量と考えるとき、乱流平均混合流速を以下のよりに定義することができる。

場所的プラス乱流平均混合速度

場所的マイナス乱流平均混合速度

$$\overline{w'_+} = \frac{1}{L_+} \int_0^{L_+} w'_+ dx \quad (9)$$

$$\overline{w'_-} = \frac{1}{L_-} \int_0^{L_-} w'_- dx \quad (10)$$

この定義は従来の変動流速の定義と以下のように一致する。

$$\overline{w'} = \frac{1}{L} \int_0^L w' dx \quad (11)$$

$$= |\overline{w'_+}| + (-|\overline{w'_-}|) \quad (12)$$

$$= 0 \quad (13)$$

ここに L = 仮想面の長さ m

L_+ = w'_+ の存在する区間長 m

L_- = w'_- の存在する区間長 m

x = 仮想面の一方からの距離 m

$$\begin{aligned} \text{但し } | \Delta U_+ | &> | u' | \\ | \Delta U_- | &> | u' | \end{aligned}$$

$+ \Delta U_+$ = 単位時間に $\overline{w_+}$ の流速が到達する点の平均流速増加量 m/s , $- \Delta U_-$ = 単位時間に $\overline{w_-}$ の流速が到達する点の平均流速減少量 m/s

ここで (6) 式の関係を用いれば

$$\overline{w_+} * \overline{u'} = 0 \quad (20)$$

$$\overline{w_-} * \overline{u'} = 0 \quad (21)$$

となるから、近似式として

$$\tau = \frac{1}{2} \rho (+ \Delta U) * \overline{w_+} + \frac{1}{2} \rho (- \Delta U) * (- \overline{w_-}) \quad (22)$$

が得られる。 $+ \Delta U$ と $\overline{w_+}$ とはつねに相伴い、また $- \Delta U$ と $-\overline{w_-}$ はつねに相伴い、 $+ \Delta U$ と $-\overline{w_-}$ および $- \Delta U$ と $\overline{w_+}$ の組合せは存在しない。また係数 $1/2$ は、 $\overline{w_+}$ および $\overline{w_-}$ の発生確率 50% に対応するものである。

よって、鉛直方向への移動距離 $\Delta Z = \overline{w_+} * \Delta T$ で 1 秒間を考えれば ΔU_+ , ΔU_- は次式となる。

$$+ \Delta U = \frac{u_*}{K} (\log (Z + \overline{w_+}) - \log (Z)) \quad (23)$$

$$- \Delta U = \frac{u_*}{K} (\log (Z) - \log (Z - \overline{w_-})) \quad (24)$$

一方、開水路内におけるポテンシャル剪断応力の分布は、次式で与えられる。

$$\tau = \tau_0 (1 - \frac{Z}{H}) \quad (25)$$

$$\text{ここに } \tau_0 = \rho g H I \quad \rho = \text{水の密度}, \quad g = \text{重力加速度} \quad (26)$$

H = 開水路等流水深, I = 開水路底こう配, Z = 水路底からの距り, K = カルマン常数
いま (23), (24), (25) 式を (22) 式に代入する。

$$\begin{aligned} \tau_0 (1 - \frac{Z}{H}) &= \frac{1}{2} \rho \overline{w_+} \left[\frac{u_*}{K} (\log (Z + \overline{w_+}) - \log (Z - \overline{w_-})) \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho \frac{\overline{w_+}}{K} u_* (\log \frac{Z + \overline{w_+}}{Z - \overline{w_-}}) \end{aligned} \quad (27)$$

これを整理すれば

$$\overline{w_+} \log \frac{Z + \overline{w_+}}{Z - \overline{w_-}} = \frac{2K}{\rho} u_* (1 - \frac{Z}{H}) \quad (28)$$

となり、試算によって $\overline{w_+}$ を求めることができる。

つぎに近似解法を考える。いま Z 点の切線こう配をもって ΔU_+ , ΔU_- を求めれば

$$+ \Delta U \doteq \frac{1}{\frac{dU}{dZ}} * \overline{w_+} \quad (29)$$

$$- \Delta U \doteq \frac{1}{\frac{dU}{dZ}} * (- \overline{w_-}) = \frac{1}{\frac{dU}{dZ}} * (- \overline{w_+}) \quad (30)$$

となり、(25)、(29) および (30) 式を (22) 式に代入すれば

$$\begin{aligned}\tau_0 \left(1 - \frac{Z}{H}\right) &= \frac{\rho}{2} \overline{w'_+} \left(\frac{\overline{w'_+}}{Z} + \frac{\overline{w'_+}}{Z}\right) \frac{u_*}{K} \\ &= \rho u_* \frac{\overline{w'_+}^2}{K} \frac{1}{Z}\end{aligned}\quad (31)$$

となる。これを整理すれば鉛直方向プラス乱流平均混合流速は

$$\overline{w'_+}^2 = u_* \left(1 - \frac{Z}{H}\right) \frac{K}{\rho} * Z$$

すなわち

$$\overline{w'_+} = \sqrt{\frac{K}{\rho} u_* * Z \left(1 - \frac{Z}{H}\right)} \quad (32)$$

で与えられる。

また鉛直方向マイナス乱流平均混合流速は

$$\overline{w'_-} = -\overline{w'_+}$$

となる。

本関係式は、開水路水深の底面より 10% 以内において適用することにする。実験常数 D3 は約 5 程度である。

5. 濃度の薄い物質の乱流混合量

平均流速のこう配の大きいところでの濃度の薄い物質の乱流拡散量は、 $\overline{w'_+}$ および $\overline{w'_-}$ がそれぞれ時間的に 50% づつ存在するものとすれば、図 4 のモデルにおいて次式で与えられる。

$$q_c = \frac{1}{2} C_2 * \overline{w'_+} - \frac{1}{2} C_1 * \overline{w'_-} = \frac{1}{2} \overline{w'_+} * (C_2 - C_1) \quad (33)$$

本式において係数 $1/2$ は 50% の発生確率に対応する。

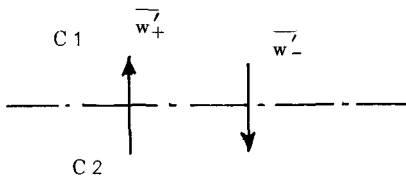


図 4 物質の鉛直乱流混合モデル

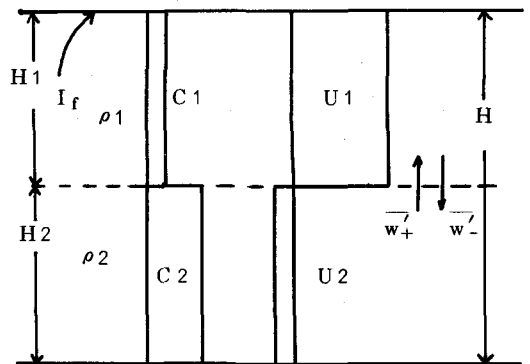


図 5 2 層密度流鉛直混合モデル

6. 下層塩水の上層淡水層中への平均乱流混合流速⁵⁾

図5に示す2層塩分密度流において、塩分躍層をって行なわれるプラス鉛直平均乱流混合流速およびマイナス鉛直平均乱流混合流速を、運動量関係式とエネルギー関係式とから求めると、次式が得られる。

プラス鉛直平均乱流混合流速

$$\overline{w_+} = \frac{(\rho_1 * g * H + (\rho_2 - \rho_1) * g * H_2) * I_f * \frac{U_1 * H_1 + U_2 * H_2}{H} - C_b * U_2^3}{\rho_m * (U_1 - U_2)^2 + (\rho_2 - \rho_1) * g} \quad (34)$$

マイナス鉛直平均乱流混合流速

$$\overline{w_-} = -\overline{w_+} \quad (35)$$

ここに C_b = 底面の抵抗係数, ρ_m = 平均密度, A = 常数

7. 砂粒子の混合

図6に示すせん断乱流中の土粒子の浮遊に対しては、 $\overline{w_+}$, $\overline{w_-}$ がそれぞれ単位時間中50%の間だけ発生するものとするば、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} q_s &= \frac{1}{2} C_2 * (\overline{w_+} - V_s) - \frac{1}{2} C_1 * (\overline{w_-} + V_s) \\ &= \frac{1}{2} \overline{w_+} (C_2 - C_1) - \frac{1}{2} V_s (C_2 + C_1) \end{aligned} \quad (36)$$

本理論を河床近くの濃度に適用してみる。いま河床表層上の d 粒径(V_s の静水中沈降速度)の濃度を C_2 とすれば、その砂粒子の浮遊限界は

$$\frac{1}{2} \overline{w_+} (C_2 - C_1) = \frac{1}{2} V_s (C_2 + C_1) \quad (37)$$

$\overline{w_+}$ および V_s が与えられ、かつ河床濃度 C_2 とすれば

$$C_2 = C_{20} \quad (38)$$

C_1 の河床上の水中濃度は

$$C_1 = C_{20} \frac{\overline{w_+} - V_s}{\overline{w_+} + V_s} \quad (39)$$

によって考えられる。

つぎに河床面上での仕事量を考える。ポテンシャルによるせん断力による単位時間、単位面積当りの仕事量 W_p は

$$\begin{aligned} W_p &= r_z * U_z \\ &= r_o \left(1 - \frac{Z}{H}\right) u_* \left(A - \frac{1}{K} \log \frac{Z}{k_s}\right) \end{aligned} \quad (40)$$

砂粒子の運動に対して、毎秒行なわれる重力に対する仕事量 W_s は

$$W_s = \frac{1}{2} g \overline{w_+}^2 (C_2 - C_1) - \frac{1}{2} g V_s^2 (C_2 + C_1) \quad (41)$$

W_p と W_s とが、定常運動においては、等しい筈であるから(40)式と(41)式を等置すれば

$$\overline{w_+} = \left\{ \frac{W_p + \frac{1}{2} g V_s^2 (C_{20} + C_1)}{\frac{1}{2} g (C_{20} - C_1)} \right\}^{1/2} \quad (42)$$

の関係式が得られる。いま C_1 に対して、(39)式を代入すれば

$$\overline{w_+} = B + \sqrt{B^2 + 4D} \quad (43)$$

$$\text{但し } B = \frac{W_p + g * V_s^2 * C_{20}}{2 * g * C_{20} * V_s} \quad (44)$$

$$D = \frac{W_p * V_s^2}{g * C_{20} * V_s} \quad (45)$$

が求まる。

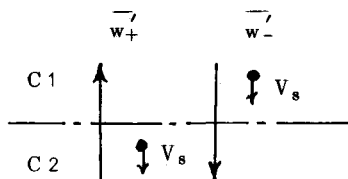


図 6 砂粒子混合モデル

8. 結 び

筆者はここにプラス平均乱流混合流速およびマイナス平均乱流混合流速のアイディアを用いて、混合量の算定を試みた。本法は乱流拡散係数を用いなくて、混合現象を取り扱う一方法であり、若干の水理現象に適用し、その解を求めることができた。

9. 参考文献

1. 物部水理学 p. 639 岩波書店 1961
2. Victor L. Streeter ; Handbook of Fluid Dynamics ; Section 26, p. 26~28, MCGRAW-HILL, 1961
3. 同上 Section 18, p. 18~23.
4. 福津家久, 開水路乱流の乱れ強度に関する研究, 土木学会論文報告集 第261号, 1977年5月
5. Isao Minami, A new idea on the mean vertical mixing velocity through internal foundary in the two layered turbulent flow, Trans. JSIDRE Dec. 1975