

開水路における縦渦の形成に関する研究

中央大学理工学部 正会員 工博 林 泰造

中央大学大学院後期博士課程

学生員 工修 ○山田 正

1. 緒 言

開水路流れの中には様々な流れの模様が通過していくのが観察される。これらの模様のうちには時間的に定常なものと、時間空間的に不規則なものがある。ところで木下良作博士の近年における一連の研究によると^{1),2)}、洪水時の河川表面には横断方向に幾本もの縦渦がみられる(写真-1)。また木下博士はこの縦渦形成機構の解明のために、実験室内開水路の底面に、いくつかの特徴的なパターンを人工的に施し、その上にも同様の縦すじを見い出されており(写真-2)これを開水路に普遍的に存在する縦渦と解釈されている。著者らは、滑面開水路においても同様の縦渦が存在し得るのではないかと考え、その流況の可視化をアルミニウム粉末により行ってみた(写真-3)。この場合にも明瞭な3本の線となって現れており、2次元的とみなし得る滑面水路においても縦渦様のものはほぼ普遍的に存在しているように思われる。

そこで本研究では広矩形直線開水路において普遍的に縦渦が形成されるものとしての立場を取り、この観点から縦渦の成立条件ならびにその安定性に関して理論研究を行い若干の考察を行った。

2. 開水路における定常的な縦渦の成立条件

前節に記した様な縦渦の理論的取扱いに際し図-1のように座標系を取る。Navier-Stokes 方程式から渦度方程式を構成すると⁴⁾、

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \dots\dots\dots (1)$$

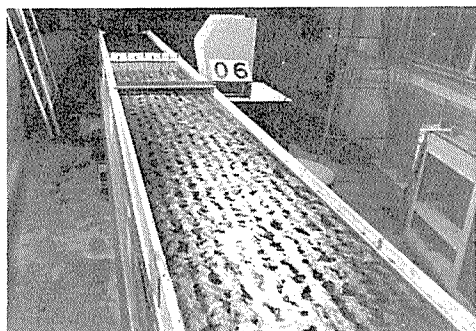


写真-2. 実験水路におけるらせん流-アルミニウム粉末散布(木下・遠藤・石坂による)
(水路幅 40 cm, 水深 1.7 cm)

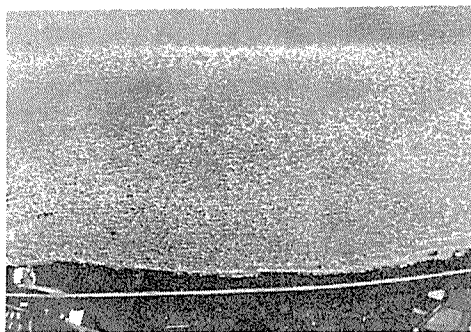


写真-1. 洪水時河川水面の航空写真
(木下・遠藤・石坂による)

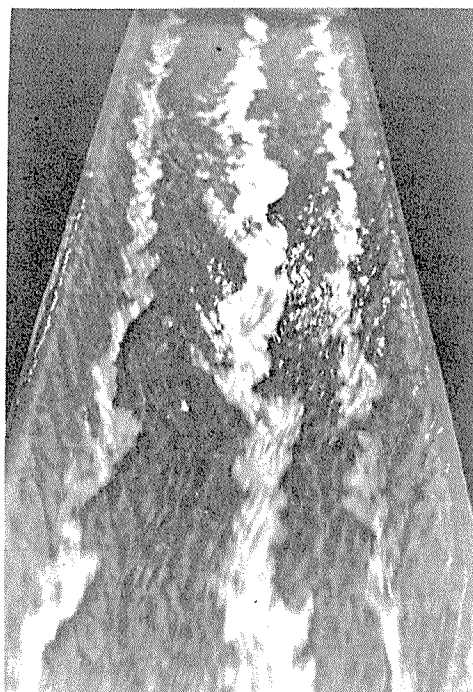


写真-3. 開水路における可視化実験(林・山田)
(水路幅 30 cm, 水深 3.1 cm)
(水路床勾配 1/130, $F_r \approx 0.9$)

ただし, $\omega_i = \epsilon_{ijk} \partial u_k / \partial x_j$: 渦度の i 方向成分
いま流速, 渦度を

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{U}_i + u'_i \\ \omega_i &= \bar{\Omega}_i + \omega'_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

で表す。ここに $\bar{U}_i, \bar{\Omega}_i$ は各時間平均された速度, 渦度であり, u'_i, ω'_i は流速, 渦度の乱流瞬間値を表す。
さらに(2)式を(1)式に代入し, 時間平均を取ると,

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{\Omega}_i}{Dt} &= - \overline{u'_j \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j}} + \overline{\omega'_j s'_{ij}} + \bar{\Omega}_j S_{ij} \\ &+ \nu \frac{\partial^2 \bar{\Omega}_i}{\partial x_j \partial x_j} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \\ s'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

つぎに, (3)式において, $i=1$, すなわち主流方向渦度 $\bar{\Omega}_1$ を考え以下の様な仮定を設ける。

- i) 流れの場は主流方向に homogeneous である。
- ii) 十分に発達した剪断乱流中のコア領域を対象とし, 粘性項は無視し得る。
- iii) $\bar{U}_2, \bar{U}_3$ による移流項は他の項に比べ無視し得る。

上記 i), ii), iii) の仮定を用いると, (3)式は $i=1$ の場合,

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_1}{\partial t} = - \overline{u'_j \frac{\partial \omega'_1}{\partial x_j}} + \overline{\omega'_j s'_{1j}} \dots\dots\dots (5)$$

となり, さらに仮定の i) を用いて,

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \overline{u'_2 u'_3} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\overline{u'^2_2} - \overline{u'^2_3}) \dots\dots\dots (6)$$

となる。(6)式より, 縦方向渦度 $\bar{\Omega}_1$ がもともと水路中に無いか, あっても時間的に定常に存在する場合には, (6)式左辺 = 0 となる。いま $\bar{\Omega}_1$ が存在する場合を考えると, 次式が成立する。

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\overline{u'^2_3} - \overline{u'^2_2}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \overline{u'_2 u'_3} \dots\dots\dots (7)$$

以下テンソル記号を改め慣用の x, y, z 座標を導入し, 瞬間値のプライムを取って記すと(7)式は,

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\tau_{zz} - \tau_{yy}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{yz} \dots\dots\dots (8)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zz} &= -\rho \overline{w^2} \\ \tau_{yy} &= -\rho \overline{v^2} \\ \tau_{yz} &= -\rho \overline{vw} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

いま, 何らかの形で $\tau_{zz} - \tau_{yy}$ の分布がわかっているならば, (8)式を解くことにより τ_{yz} の分布がわかる。
ここで, $\tau_{zz} - \tau_{yy}$ の分布に関しては Townsend³⁾ の解析と同様に次のようにおく

$$\tau_{zz} - \tau_{yy} = a \tau_{xz} \dots\dots\dots (10)$$

ここに,

$$\tau_{xz} = \tau_0 (1 - z/D) \dots\dots\dots (11)$$

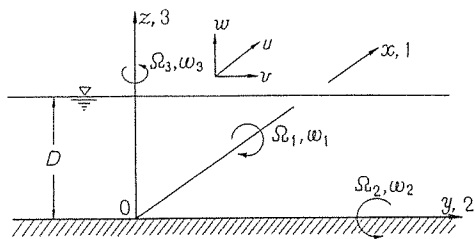


図 - 1. 座標系

ただし、 τ_0 ：底面剪断力、 $a = 0.7$ から 1.2 の値の定数。(10)式の成立に関する妥当性は図-2に示す。

さらに、 τ_0 に関しては乱流境界層における縦渦に関する古屋教授ら^{5),6),7)}の測定からみて、(12)式のような横断方向の分布を取るものと思われる。

$$\tau_0 = \bar{\tau}_0 + \tau'_0 \cos my \quad \cdots \cdots (12)$$

ここに、 $\bar{\tau}_0$ ：底面平均剪断力、 τ'_0 ： τ_0 の変動の振幅、 m ： y 方向(横断方向)波数($2\pi/L$, L は波長)

つきに、(10),(11),(12)式を(8)式に代入すると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tau_{yz} = \frac{a\tau'_0 m}{D} \sin my \quad \cdots (13)$$

となり、 τ_{yz} に関する微分方程式を得る。境界条件としては次の(14)式を用いる。

$$z = 0, D \text{ において } \tau_{yz} = 0 \quad \cdots \cdots (14)$$

ここで $\tau_{yz} = f(z) \sin my$ とおき、(13)式の境界条件のもとに解き整理すると、

$$\tau_{yz}(y, z) = \frac{a\tau'_0}{mD} \left[1 - \cos mz - \frac{\sin mz}{\sin mD} (1 - \cos mD) \right] \sin my \quad \cdots \cdots (15)$$

となる。また τ_{yz} は渦動粘性係数 ϵ_{yz} を用いるとつぎのように表される。

$$\tau_{yz} = \rho \epsilon_{yz} \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right) \quad \cdots \cdots (16)$$

さらに $\bar{V}$, $\bar{W}$ を流れ関数 ϕ を用いて表すと、

$$\bar{V} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \bar{W} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \cdots \cdots (17)$$

(17)式を(16)式に代入して

$$\tau_{yz} = \rho \epsilon_{yz} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad \cdots \cdots (18)$$

ここで、 ϵ_{yz} に関しては渦動粘性係数の等方性という考え方をもちこみ、 $\epsilon_{yz} = \epsilon_{xz}$ とし、さらに ϵ_{xz} の断面平均値、 $(1/6) \kappa \bar{u}_* D$ を用いる。ここに κ ：カルマン定数、 $\bar{u}_*$ ：底面平均摩擦速度。

つきに(15)式、(18)式より流れ関数 ϕ に関する式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \beta \left[1 - \cos mz - \frac{\sin mz}{\sin mD} (1 - \cos mD) \right] \sin my \\ \beta &= 6 a \bar{u}_* / \kappa m D^2 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (19)$$

ϕ に関する境界条件としてはセル構造をしていると考えられる縦渦の境界をよぎる流れはないとすることにより、

$$\phi = 0, \quad \partial^2 \phi / \partial n^2 = 0 \quad \cdots \cdots (20)$$

ただし n は境界に垂直な方向を示す。

(19)式を(20)式の境界条件のもとに解くと、

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{\beta}{m^2} \left[\cos mz + \frac{\sin mz}{\sin mD} (1 - \cos mD) \left(1 - \frac{mD}{2 \sin mD} \right) + \frac{mz}{2} \sin mz \right. \\ & \left. - \frac{m}{2} \cdot \frac{1 - \cos mD}{\sin mD} \cdot z \cos mz - 1 \right] \sin my \quad \cdots \cdots (21) \end{aligned}$$

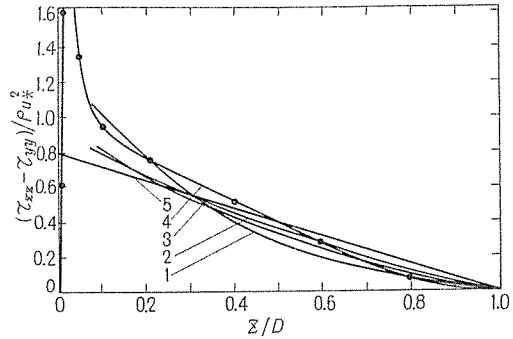


図-2. 法線応力差の分布 (H.J. Perkins)
(曲線1:正方形風洞, 2:隅角部流れ, 3:
非平衡境界層, 4:圧力勾配のない境界層
(Klebanoff), 5:(10)式 $a=0.8$)

よって $\bar{V}$, $\bar{W}$ はつぎのようになる

$$\begin{aligned} \bar{V} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\beta}{m} \left[\sin mz - \frac{\cos mz}{\sin mD} (1 - \cos mD) \left(1 - \frac{mD}{2 \sin mD}\right) - \frac{mz}{2} \cos mz \right. \\ \left. + \frac{1 - \cos mD}{2 \sin mD} \cdot \cos mz - \frac{mz}{2} \cdot \frac{\sin mz}{\sin mD} (1 - \cos mD) \right] \sin my \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{W} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\beta}{m} \left[\cos mz + \frac{\sin mz}{\sin mD} (1 - \cos mD) \left(1 - \frac{mD}{2 \sin mD}\right) + \frac{mz}{2} \sin mz \right. \\ \left. - \frac{m}{2} \frac{1 - \cos mD}{\sin mD} z \cdot \cos mz - 1 \right] \cos my \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

(22), (23) 式より一対の縦渦を計算して図示したものが図-3.である。計算に用いたパラメーターは $a = 0.8$, $\tau'_0/\tau_0 = 0.06$, $L = 2.5D$ である。図-3より $\bar{V}$, $\bar{W}$ の断面内最大値は約 $0.5 \bar{u}_*$ であった。

つぎに縦渦の存在するなかでの主流のひずみを考える。いま縦渦の存在する水路においても主流 $U(z)$ は縦渦自身からは直接の影響を受けないと仮定すると、

$$\frac{U(y, z)}{\bar{U}(z)} = \frac{u_*}{\bar{u}_*} = \left(1 + \frac{\tau'_0}{\tau_0} \cos my\right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

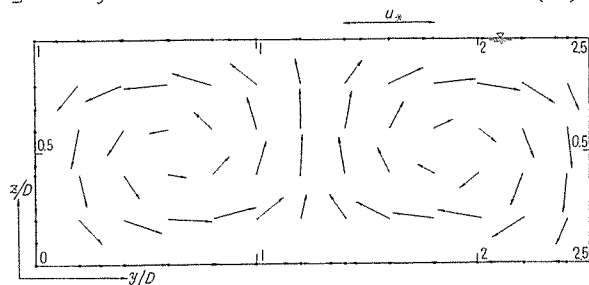


図-3. 開水路横断面における縦渦の構造の計算

ここに $\bar{U}(z)$, $\bar{u}_*$ はそれぞれ y 方向(横断方向)に平均された主流流速, ならびに底面平均摩擦速度を表す。

以上の結果をモデル的に図-4に示しておく。図-4に示す流れの模様は Perkins¹¹⁾ が示し, 木下良作博士^{1), 2)} あるいは古屋教授ら^{5), 6), 7)} が実験的に提示したものと同様である。

つぎに開水路内に定常的存在する縦渦による直接エネルギー逸散を評価する。いまこの値を $\alpha \bar{u}_*^3$ とおくと次式が近似的に成立する。

$$\alpha \bar{u}_*^3 = \frac{\nu}{L} \int_0^L \int_0^D \mathcal{Q}_1^2 dz dy \quad \dots\dots\dots (25)$$

このとき断面内において主流と縦渦による直接エネルギー逸散はつぎの様に表し得る。(巻末参照)

$$\frac{I_d}{I} = (8 + \alpha) \cdot \frac{\bar{u}_*}{U_m} = (8 + \alpha) \sqrt{f/8} \quad \dots (26)$$

ここで (25), (26) 式を $\mathcal{Q}_1 = -\nabla^2 \phi$ の関係を用いて (21) 式より計算すると縦渦自身による直接エネルギー逸散は主流による直接エネルギー逸散に比して高々 2 ~ 3 % であった。

以上の結果をまとめてみると, 十分に発達した剪断乱流中に生じている定常な縦渦はまず主流に垂直な断面内における乱れの法線応力の差 $\overline{w'^2} - \bar{v}^2$ が水深方向のみならず横断方向にも不均一な分布を取り, この応力差の横断方向不均一は新た

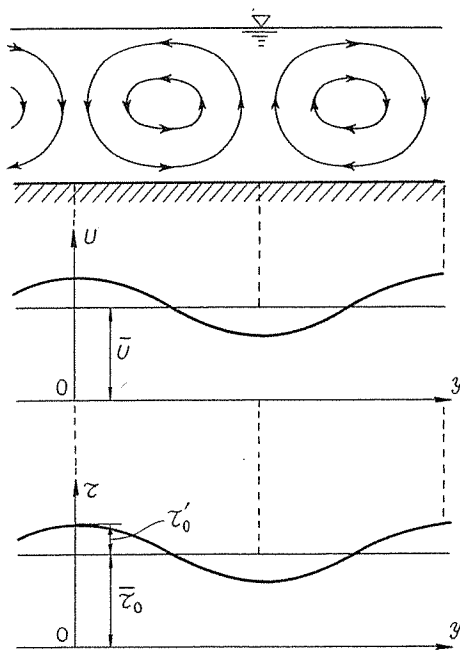


図-4. 開水路における縦渦のモデル

に τ_{xz} にも変化を与え、また断面内で主流方向渦度をもつ様に τ_{yz} の分布を生じさせる。逆に τ_{xz} に横断方向の不均一を自然に、あるいは人工的に、与えてやるならば主流方向渦度を生じさせる様に τ_{yz} の分布が決定される。このことは主流流速 $\bar{U}(z)$ に関して、水深方向に τ_{xz} が分布をもつがゆえに横方向渦度 $-\partial\bar{U}/\partial z$ が生じ、その逆もまた成立するという場合に似ている様に思われる。ただ応力の不均一が縦渦を生むのか、縦渦が応力の不均一を生むのかは、あたかも“にわとりとたまご”の関係にあるように思われる。このことに関し木下良作博士の最近の研究¹⁾においては写真-2のように水路床に特定のパターン(写真-2では縦すじ)を人工的に配置した場合、その上では、流れは定常で明瞭な縦すじを作っており、これを縦渦の存在によるものと結論づけておられるが、これは上記の理論研究の実験的裏づけとなるものと考えられる。

3. 開水路の縦渦の安定性について

写真-3において、著者らは水路床に何ら人工的な模様をつけない流れの中にも比較的規則正しい縦すじを見出している。この現象も水路内に縦渦の存在を考えるならば容易に説明がつくものと思われる。しかしこの場合の縦渦には外見上何らの発生要因となるものも見当らない。よってここでは何らかの発生要因(上流端の条件、流れの中のコヒーレントな運動によるもの等)をもって作り出された縦渦の安定性に関し、理論式を導き若干の考察を加えてみる。

(a) 基本式とその誘導

連続の式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

また Navier - Stokes の式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで流速と圧力の各成分を次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + \tilde{u}_i + u'_i \\ p &= \bar{p} + \tilde{p} + p' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに $\bar{u}_i$, $\bar{p}$ は集合(時間)平均値, $\tilde{u}_i$, $\tilde{p}$ は横断方向に周期的変動をしている項, u'_i , p' は乱流瞬間値を示す。ここで(29)式の様に空間的周期成分が存在する場合、その平均操作には2通りの方法が考えられる。1つは通常集合(時間)の平均であり $\bar{\quad}$ で表し、残りの1つは空間的同位相ごとの集合平均をとったものであり $\langle \quad \rangle$ で表わし以後これを位相平均と称する。これらの平均操作の主な特徴を列記すると、

$$\left. \begin{aligned} \langle f' \rangle &= \bar{f} = \bar{f}' = 0 \\ \overline{\tilde{f}g} &= \bar{f} \bar{g}, \quad \langle \tilde{f}g \rangle = \tilde{f} \langle g \rangle, \quad \langle \bar{f}g \rangle = \bar{f} \langle g \rangle \\ \overline{\langle f \rangle} &= \bar{f}, \quad \langle \bar{f} \rangle = \bar{f}, \quad \overline{\tilde{f}g'} = \langle \tilde{f}g' \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

次に(29)式を(27)式の連続の式に代入し、集合平均と位相平均操作を行うと、

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。また(29)式を(28)式に代入し(30),(31)式を考慮しつつ集合平均操作と位相平均操作を行うと、集合平均項に関する式が得られる。

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j})}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \dots\dots\dots (32)$$

さらに周期的変動項に関しては、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \widetilde{u}_j \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \widetilde{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j - \overline{\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j})}{\partial x_j} + \frac{\partial (\langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \widetilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

(32) 式と (33) 式を比べると, $\partial \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j / \partial x_j + \partial \overline{u'_i u'_j} / \partial x_j$ の項は集合平均項に対して正に働くなら周期的変動項に対して負に働いていることがわかる。上記の (33) 式が以下の理論展開の基本式となる。

(33) 式で $i=2, 3$ の場合を列記してみる。以後テンソル記号を改め, 慣用の x, y, z 座標で表わす。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \bar{U} + \widetilde{u} + u' \\ u_2 &= \bar{V} + \widetilde{v} + v' \\ u_3 &= \bar{W} + \widetilde{w} + w' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

$i = 2$ の場合

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial t} + \bar{U} \cancel{\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}} + \widetilde{u} \cancel{\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}} + \widetilde{v} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \widetilde{w} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \\ & + \frac{\partial (\widetilde{u} \widetilde{v} - \overline{\widetilde{u} \widetilde{v}})}{\partial x} + \frac{\partial (\widetilde{v} \widetilde{v} - \overline{\widetilde{v} \widetilde{v}})}{\partial y} + \frac{\partial (\widetilde{v} \widetilde{w} - \overline{\widetilde{v} \widetilde{w}})}{\partial z} \\ & + \frac{\partial (\langle u' v' \rangle - \overline{u' v'})}{\cancel{\partial x}} + \frac{\partial (\langle v' v' \rangle - \overline{v' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\langle v' w' \rangle - \overline{v' w'})}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial y} + \nu \left(\cancel{\frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$i = 3$ の場合

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} + \bar{U} \cancel{\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}} + \widetilde{u} \cancel{\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x}} + \widetilde{v} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \widetilde{w} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \\ & + \frac{\partial (\widetilde{u} \widetilde{w} - \overline{\widetilde{u} \widetilde{w}})}{\partial x} + \frac{\partial (\widetilde{v} \widetilde{w} - \overline{\widetilde{v} \widetilde{w}})}{\partial y} + \frac{\partial (\widetilde{w} \widetilde{w} - \overline{\widetilde{w} \widetilde{w}})}{\partial z} \\ & + \frac{\partial (\langle u' w' \rangle - \overline{u' w'})}{\cancel{\partial x}} + \frac{\partial (\langle v' w' \rangle - \overline{v' w'})}{\partial y} + \frac{\partial (\langle w' w' \rangle - \overline{w' w'})}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial z} + \nu \left(\cancel{\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

いま図 - 1 の様な 2 次元開水路を考えていることより, $\bar{V}, \bar{W} = 0$ となり, また乱流中に挿入した縦渦の各流速成分には微小振幅を考えていることより微小項の 2 次以上の項を無視し, さらに $\partial / \partial x = 0$ より各矢印を付した項が落ちる。

つきに (35), (36) 式から主流方向渦度 $\widetilde{\omega}_x$ をつくと,

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \widetilde{\tau}_{23} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\widetilde{\tau}_{33} - \widetilde{\tau}_{22}) = \nu \left(\frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_x}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (37)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\omega}_x &= \partial \widetilde{w} / \partial y - \partial \widetilde{v} / \partial z \\ \widetilde{\tau}_{ij} &= \langle u'_i u'_j \rangle - \overline{u'_i u'_j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

さらに “background turbulence” は $\partial v' v' / \partial y = \partial w' w' / \partial y = \overline{v' v'} = 0$ より (37) 式は,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widetilde{\omega}_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \langle v' w' \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\langle w' w' \rangle - \langle v' v' \rangle) \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}_x}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ここで $\widetilde{\tau}_{22}, \widetilde{\tau}_{23}, \widetilde{\tau}_{33}$ に関しては Newtonian eddy model を用いると,

$$\widetilde{\tau}_{ij} = -2\epsilon_i \widetilde{S}_{ij} = -\epsilon_i \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここに, ϵ_i : 渦動粘性係数

そうすると, (37) 式あるいは (39) 式は,

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}_x}{\partial t} + \frac{d^2 \epsilon_i}{dz^2} \cdot \left(\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial z} \right) = (\nu + \epsilon_i) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \widetilde{\omega}_x \quad \dots\dots\dots (41)$$

つぎに流れ関数 ψ を導入する。

$$\widetilde{v} = -\partial \psi / \partial z, \quad \widetilde{w} = \partial \psi / \partial y, \quad \widetilde{\omega}_x = \nabla^2 \psi \quad \dots\dots\dots (42)$$

さらに流れ関数 ψ を次の様におく。

$$\psi = \phi_0 e^{iky} e^{ft} \quad \dots\dots\dots (43)$$

ここに, k : 横断方向波数, f : 攪乱の増幅, 減衰を表わす係数

よって係数 f が正の場合は乱流中に挿入された攪乱の成長を示し, 負の場合は減衰を示す。

(42), (43) 式を (41) 式に代入し整理すると,

$$\epsilon \frac{d^4 \phi_0}{dz^4} - \left(f + 2\epsilon k^2 - \frac{d^2 \epsilon}{dz^2} \right) \frac{d^2 \phi_0}{dz^2} + k^2 \left(f + \epsilon k^2 + \frac{d^2 \epsilon}{dz^2} \right) \phi_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

ただし, $\epsilon = \epsilon_i + \nu$ である。

(44) 式が剪断乱流中に挿入された縦渦の増幅あるいは減衰を示す方程式である。ここで ϕ_0 の境界条件は,

$$\phi_0(0) = \phi'_0(0) = \phi_0(D) = \phi'_0(D) = 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

(44) 式を (45) 式の境界条件のもとに固有値問題として解くためには全渦動粘性係数 ϵ の分布を与えねばならないが, 一般にこれを解くには Galerkin 法などを用いねばならないであろう。いまここでは簡単のために ϵ を断面内で一定値を取るものと考えたと (44) 式は,

$$\epsilon \frac{d^4 \phi_0}{dz^4} - (f + 2\epsilon k^2) \frac{d^2 \phi_0}{dz^2} + k^2 (f + \epsilon k^2) \phi_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (46)$$

となり, その一般解は,

$$\phi_0 = C_1 \sinh p_1 z + C_2 \cosh p_1 z + C_3 \sinh p_2 z + C_4 \cosh p_2 z \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= k \\ p_2 &= \sqrt{k^2 + f/\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (48)$$

このとき係数 C_1, C_2, C_3, C_4 が恒等的に 0 でないためには,

$$\tanh \sqrt{k^2 + f/\epsilon} / \sqrt{k^2 + f/\epsilon} = \tanh k/k \quad \dots\dots\dots (49)$$

が成立しなければならない。(49) 式は超越方程式であるから trial and error で計算しなければならないが, $f=0$ の中立安定の場合, あらゆる波数 k が (49) 式を満たしてしまい非現実的である。このことからわかるように初期の状態として乱れの場与えられた縦渦の安定不安定を論じるには, (41) 式左辺第 2 項が重要な働きをしていることがわかる。現在 (44) 式に ϵ として適当な分布形を与え計算を行っているがその結果は又別の機会に譲りたい。

4. 考察と結び

本研究においては一般に剪断乱流中に存在する大規模な縦渦に注目し, それを i) 定常に存在しているものと, ii) 非定常なものに二分し, i) に関しては, その発生と存続の機構および縦渦自身のオーダーを明らかにす

ることができたと思われる。またii)に関しては安定不安定問題としての取扱いから基本式の誘導を行った。しかし現在の解析では標題に掲げる開水路としての特徴が十分考察されてはいない。一般に開水路流れではフルード数が1前後で水面に波が発生するなど表面条件が今回取扱ったほど単純なものではなくなってくる様に思われる。今後はより実際の開水路流れの現象に即し、さらに研究してゆきたい考えている。

なお本研究中に木下良作博士より数々の貴重な示唆を与えられた。ここに記して深甚なる謝意を表する。

また本研究のための実験の遂行に熱心に協力された土木工学科学部学生 篠田薫、福田修一の両君にも謝意を表する。

5. 付記 滑面水路におけるエネルギー逸散

一般に2次元水路において直接エネルギー逸散はつぎの(S.1)によって示される。

$$\Phi = \nu \left(d\bar{U}/dz \right)^2 \quad \dots\dots\dots (S.1)$$

ここで平均流速 $\bar{U}(z)$ に粘性底層で直線、粘性底層外で対数則を用い、 Φ を水底から水面まで積分すると、

$$\int_0^D \Phi dz \simeq 12 u_*^3 \quad \dots\dots\dots (S.2)$$

となるが、バッファ領域で平均流速分布を滑らかに接属すると、

$$\int_0^D \Phi dz \simeq 8 u_*^3 \quad \dots\dots\dots (S.3)$$

ここで U_m を断面平均流速とすると $\rho g D U_m$ は単位幅当り、単位時間に通過する水の重量である。ここで直接エネルギー逸散勾配 I_d は(S.4)式で表わされる。

$$I_d = \frac{8 \rho u_*^3}{\rho g D U_m} = \frac{8 u_*^3}{g D U_m} \quad \dots\dots\dots (S.4)$$

一方、全エネルギーの損失勾配 I は(S.6)式で与えられる。

$$I = u_*^2 / g D \quad \dots\dots\dots (S.5)$$

よって、全エネルギー損失中直接エネルギー逸散の占める割合は、

$$\frac{I_d}{I} = \frac{8 u_*^3 / g D U_m}{u_*^2 / g D} = 8 \frac{u_*}{U_m} \quad \dots\dots\dots (S.6)$$

となる。ここで摩擦損失係数 f を導入すると、

$$\frac{I_d}{I} = \frac{8 u_*}{u_* \sqrt{8/f}} = 2.83 \sqrt{f} \quad \dots\dots\dots (S.7)$$

いま $f=0.01 \sim 0.06$ を取ると、 $I_d/I=30 \sim 70\%$ となる。

6. 参考文献

- 1) 木下良作・遠藤義幸・石坂晋：洪水流の写真判読—らせん流の実験的研究—，日本写真測量学会，昭和51年度秋期学術講演会講演集
- 2) 木下良作：航空写真による洪水流の解析 その乱流構造と表面の流れかたの特性について，写真測量 Vol. 6, No. 1, 1967
- 3) Townsend, A. A.: The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, Second Edition, Cambridge, 1976
- 4) Tennekes, H. and J. L. Lumley: A First Course in Turbulence, MIT-Press, Cambridge (Mass), 1972
- 5) 古屋善正・大坂英雄：二次元的乱流境界層の横方向不均一性，第1報（横方向速度分布の特性），日本機械学会論文集，40巻，339, 1971

- 6) 古屋善正・中村育雄・大阪英雄・本田秀雄：二次元的乱流境界層の横方向不均一性，第2報（壁面摩擦応力と流れ場），日本機械学会論文集，40巻，1339号，1971
- 7) 古屋善正・中村育雄・大阪英雄：二次元的乱流境界層内の定常な縦渦の構造，第5回乱流シンポジウム，1973
- 8) Willmarth, W. W. : Structure of Turbulence in Boundary Layers, Advances in Applied Mechanics, Vol. 15, Academic Press, 1975
- 9) 吉川秀夫・池田駿介：正方形断面を持つ直線水路の速度分布に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，No. 250，1976
- 10) 谷一郎：旋み点の近くの流れの安定，数理解析研究所講究録218，1974
- 11) Perkins, H. J. : The formation of streamwise vorticity in turbulent flow, J. Fluid Mech., Vol. 44, No. 4, 1970
- 12) Reynolds, W. C. and Hussain, A. K. M. F. : The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Part 3. Theoretical models and comparison with experiments, J. Fluid Mech., Vol. 54, part 2, 1972
- 13) Müller, A. : Effect of secondary flow on turbulence in an open channel, Second International Symposium on Stochastic Hydraulics IAHR, Lund, Sweden, Vol. 1, p. 6-1~20, 1976