

序 地下水流の基礎式はDarcy則と連続式からえられるLaplaceの方程式で与えられるが自由表面や海岸線付近の淡塩境界面形状などのように境界の一部が未知の場合、解をうることが困難ことが多い。定常な自由表面形や淡塩境界面形を求めるには複素関数による等角写像、近似的には準一様流の仮定を用いたDupuit-Forchheimerの式、また数値計算では差分法や有限要素法などがある。非定常流については準一様流の仮定に基づく式およびその線型近似式など、また準一様流仮定ができない場合には差分法、有限要素法などが用いられている。本報ではこの準一様流仮定ができないような非定常流の自由表面形や淡塩境界面形状の微分方程式を有限要素法により具体的に求め、定常状態近傍のこの方程式の安定性について若干の検討を加えたものである。

1. 1次元地下密度流問題

1次元密度流問題は以下に示すように解析解がえられるが自由表面や淡塩境界面をもった一般的な問題に対する取り扱い法、とくにその解析手順を検討するのによい例となるのでFig.1-1のモデルで解析解および有限要素法による取り扱い法を検討する。いま境界面の方程式を

$$F(x, t) = x - \xi(t) = 0 \quad \text{--- (1, 1)}$$

またDarcy則が成り立つものとすれば1次元のLaplaceの方程式がFig.1-1に示す2つの領域に対して次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p_I}{dx^2} &= 0 & 0 \leq x \leq \xi(t) & \text{--- (1, 2)} \\ \frac{d^2 p_{II}}{dx^2} &= 0 & \xi(t) \leq x \leq l & \text{--- (1, 3)} \end{aligned}$$

ここに p_I, p_{II} はそれぞれの領域の圧力分布である。 λ を空けき率、 k を透水係数、 ρ_I, ρ_{II} を両領域の流体密度とし境界条件を示すと

$$p_I = p_I^* \quad x=0 \text{ --- (1, 4)}, \quad p_{II} = p_{II}^* \quad x=l \text{ --- (1, 5)}, \quad \text{淡塩境界面上では}$$

$$p_I = p_{II} \quad x=\xi(t) \text{ --- (1, 6)}, \quad \left[\frac{k}{\rho_I g} \right] \frac{dp_I}{dx} = \left[\frac{k}{\rho_{II} g} \right] \frac{dp_{II}}{dx} = -\lambda d\xi/dt, \quad x=\xi(t) \text{ --- (1, 7)}$$

$$\text{初期条件は境界面 } x=\xi(t) \text{ に対して与えられ、} \quad \xi(t) = \xi_0 \quad t=0 \text{ --- (1, 8)}$$

(i) 解析解¹⁾ 領域Iについては境界条件(1,4),(1,7)式、領域IIについては境界条件(1,5),(1,7)式を用いて(1,2),(1,3)式を積分すると

$$p_I = - \left[\frac{\lambda \rho_I g}{k} \right] (d\xi/dt)x + p_I^* \text{ --- (1, 9)} \quad p_{II} = - \left[\frac{\lambda \rho_{II} g}{k} \right] (d\xi/dt)x + \left[\frac{\lambda \rho_{II} g}{k} \right] (d\xi/dt) + p_{II}^* \text{ --- (1, 10)}$$

この2つの式には $d\xi/dt$ が未知数のまま残っておりこれを決定することが必要である。したがってまだ使っていない境界面での圧力の連続条件(1,6)式を(1,9),(1,10)式に適用すると、

$$\left\{ \lambda g (\rho_{II} - \rho_I) / k \right\} \xi \cdot d\xi/dt = (\lambda l \rho_{II} g / k) d\xi/dt + p_{II}^* - p_I^* \text{ --- (1, 11)}$$

これが時間 t に関する境界面 $x=\xi(t)$ についての微分方程式である。初期条件(1,8)式を使って積分すると

$$\left\{ \lambda g (\rho_{II} - \rho_I) / 2k \right\} \{ \xi(t)^2 - \xi_0^2 \} = (\lambda l \rho_{II} g / k) \{ \xi(t) - \xi_0 \} + (p_{II}^* - p_I^*) t \text{ --- (1, 12)}$$

また各 $\xi(t)$ に対応した圧力分布 p_I, p_{II} はこの $\xi(t)$ を(1,9),(1,10)式に代入することにより求められる。

(ii) 有限要素法による解析方法。 (i)の解析解の誘導の過程では2つの領域を別個に考え、境界面上では流速の連続条件(1,7)式を用いて解の形を定めておき、最後に圧力の連続条件(1,6)式から境界面 $\xi(t)$ の微分方程式を定めた。ここでも同じ考え方にしたがうことにする。それぞれの領域に対する汎関数は、

$$\chi_I(p_I) = \int_0^{\xi(t)} (k/2\rho_I g) (dp_I/dx)^2 dx + (k/\rho_I g) (dp_I/dx)(p_I - p_I^*) \Big|_{x=0} + \lambda p_I d\xi/dt \Big|_{x=\xi(t)} \text{ --- (1, 13)}$$

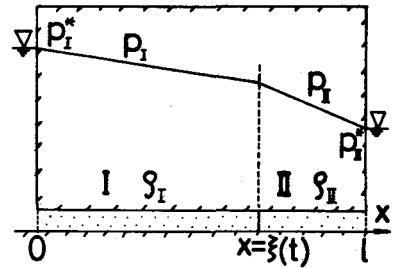


Fig. 1-1 1次元密度流問題

$$\chi_I(P_I) = \left(\int_{\xi(t)}^1 (k/2 \eta_I^2) (dp_I/dx)^2 dx - (k/\eta_I^2) (dp_I/dx) (P_I - P_I^*) \right) \Big|_{x=1} - \lambda P_I d\xi/dt \Big|_{x=\xi(t)} \quad \text{--- (1, 14)}$$

つぎに2つの領域を要素で分割し有限要素法の定式化を考える。要素内部において圧力分布を直線分布、

$P = a\alpha + \beta$ とし定数 a, β を節点座標 x_i, x_j , 節点圧力 P_i, P_j によって表わすと $P = \{(P_j - P_i)/(x_j - x_i)\}x + (x_i P_j - x_j P_i)/(x_j - x_i)$ --- (1, 15)

このような各節点値に関して汎関数 χ_I, χ_{II} を極値にすることが変分原理の解析の目的になる。いま具体的に Fig.1-2 に示すモデルで考えてみると (1, 15) 式を (1, 13) 式と (1, 14) 式に入れ P_I で微分して 0 とおくと

$$\begin{bmatrix} -a_I & 0 & 0 \\ 0 & a_I + a_I/\{\xi(t)-1\} & -a_I/\{\xi(t)-1\} \\ 0 & -a_I/\{\xi(t)-1\} & a_I/\{\xi(t)-1\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_I P_I^* \\ a_I P_I^* \\ -\lambda d\xi/dt \end{bmatrix} \quad \text{--- (1, 16)}$$

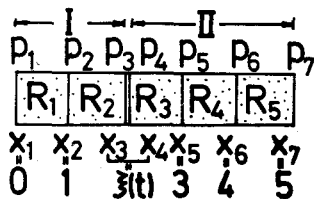


Fig.1-2 有限要素によるモデル (1次元)

$$\begin{bmatrix} a_{II}/\{3-\xi(t)\} & -a_{II}/\{3-\xi(t)\} & 0 & 0 \\ -a_{II}/\{3-\xi(t)\} & a_{II} + a_{II}/\{3-\xi(t)\} & -a_{II} & 0 \\ 0 & -a_{II} & 2a_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda d\xi/dt \\ 0 \\ a_{II} P_I^* \\ -a_{II} P_I^* \end{bmatrix} \quad \text{--- (1, 17)}$$

ここで境界面上での圧力連続条件 (1, 6) 式, すなわち $P_3 = P_4$ を適用すると、

$$\begin{bmatrix} -a_I & 0 & -a_I P_I^* \\ 0 & a_I + a_I/\{\xi(t)-1\} & a_I P_I^* \\ 0 & -a_I/\{\xi(t)-1\} & -\lambda d\xi/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda d\xi/dt & -a_{II}/\{3-\xi(t)\} & 0 & 0 \\ 0 & a_{II} + a_{II}/\{3-\xi(t)\} & -a_{II} & 0 \\ a_{II} P_I^* & -a_{II} & 2a_{II} & 0 \\ -a_{II} P_I^* & 0 & 0 & -a_{II} \end{bmatrix} \quad \text{--- (1, 18)}$$

$\det |K_I| \qquad \det |K_{II}|$

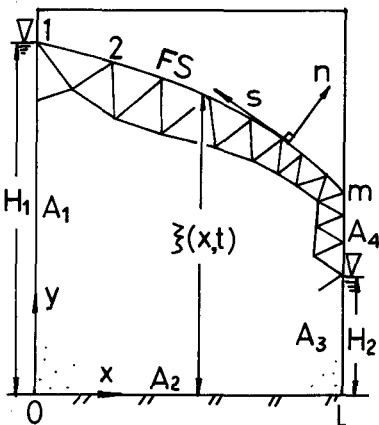
ここに $\det |K_I|, \det |K_{II}|$ はそれぞれ (1, 16), (1, 17) 式の P にかかる係数行列式である。 $\xi(t)$ は $x_2 < \xi(t) < x_5$ の範囲である。この式を展開すると $\xi(t)$ についての微分方程式 (1, 11) 式に一致する。以上の例で境界面の位置を規定する方程式はつぎのような手順で定められると考えることができる。①両領域の圧力分布を別々に定める形式をつくる。②境界面上で圧力の連続条件を適用する。すなわち2次元の場合には空間的に離散化された自由表面や淡塩境界面上の各節点に対し圧力の連続条件を適用すれば各節点毎に (1, 18) 式のような微分方程式がえられよう。

2. 2次元自由表面問題 有限要素法により非定常自由表面形を求めた計算例は従来より多くみられるが^{2), 3)}, いづれも自由表面上の条件を満たすように節点を移動させてゆくもので厳密には各ステップ毎で試行錯誤が必要となり、また自由表面計算上の安定問題も検討されていない。また2相流のようにその境界面上で圧力が自由表面上のように既知でない場合には境界面形状が正しいかどうか容易にチェックできないと考えられる。いづれの場合にも非定常状態の境界面形を記述する微分方程式がえられていないためと考えられる。ここでは Fig.2-1 に示すようなモデルで自由表面形の微分方程式を有限要素法によって求めてみよう。

$$\text{基礎式は } \partial^2 \phi / \partial x^2 + \partial^2 \phi / \partial y^2 = 0 \quad \text{--- (2, 1)}$$

$$\phi \text{ は速度ポテンシャルで } \phi = P / \rho_f g + y \quad \text{--- (2, 2)}$$

ここに ρ_f は密度, g は重力加速度である。境界条件として Fig.2-1 について Fig.2-1 2次元自由表面問題



(イ) 境界 A_1 , および A_2 においては圧力は静水圧分布をなすものとする。

$$\phi = H_1 \text{ on } A_1, \quad \phi = H_2 \text{ on } A_2 \quad - - - (2, 3)$$

(ロ) 境界 A_3 は不透水層とする。 k を透水係数とすれば、 $-k \partial \phi / \partial y = v_0 = 0$ on A_3 - - - (2, 4)

(ハ) 境界 A_4 は浸潤面を表わし、この面上の圧力 P は大気圧に等しいので $\phi = y$ on A_4 - - - (2, 5)

(ニ) 自由表面 FS においては 大気圧 $P = 0$ の条件と流量の連続条件とを考える。

$$\phi = \xi(x, t) \quad - - - (2, 6) \quad -k \partial \phi / \partial n = \lambda \cos(n, y) \partial \xi / \partial t \text{ on } FS \quad - - - (2, 7)$$

ここに λ は空けき率, $\cos(n, y)$ は方向余弦である。上記の Laplace の方程式と境界条件に対して変分原理を考えることになるが、1. の 1 次元地下密度流でのべたように自由表面上では (2, 7) 式の境界条件を用いて汎関数を構成する。このときの汎関数は⁴⁾

$$\begin{aligned} \chi(\phi) = & \left\{ \int_D (k/2) [(\partial \phi / \partial x)^2 + (\partial \phi / \partial y)^2] dx dy - \int_{A_1} k(\phi - H_1) \partial \phi / \partial n ds - \int_{A_2} k(\phi - H_2) \partial \phi / \partial n ds \right. \\ & \left. + \int_{A_3} v_0 \phi ds - \int_{A_4} (\phi - y) \partial \phi / \partial n ds + \int_{FS} \lambda \phi \cos(n, y) \partial \xi / \partial t ds \right\} \quad - - - (2, 8) \end{aligned}$$

次に有限要素法の実際の算定にあたっては $A_1 \sim A_4$ 上での境界条件は数値として与えておくので (2, 8) 式右辺の第 2 ～ 第 5 項を除いた汎関数を考えてよい。すなわち

$$\chi(\phi) = \left\{ \int_D (k/2) [(\partial \phi / \partial x)^2 + (\partial \phi / \partial y)^2] dx dy + \int_{FS} \lambda \phi \cos(n, y) \partial \xi / \partial t ds \right\} \quad - - - (2, 9)$$

さて有限要素法による浸透流の解析は既に多く示されているのでここでは簡単にのべる。自由表面の方程式を構成する上で三角形分割か四角形分割かによって方程式の性質も異なることは十分考えられるが、ここではもっとも簡単な三角形要素分割を用いる。自由表面上の節点には解析に都合がよいように Fig. 2-1 のように 1, 2, ..., m の通し番号を付けておく。三角形要素内で ϕ の一次分布を仮定し、

$$\phi = \{ (a_i + b_i x + c_i y) \phi_i + (a_j + b_j x + c_j y) \phi_j + (a_l + b_l x + c_l y) \phi_l \} / 2 \Delta_e \quad - - - (2, 10)$$

ここに Δ_e は三角形の面積, $a_i = x_j y_l - x_l y_j$, $b_i = y_j - y_l$, $c_i = x_l - x_j$, - - - (2, 11) などである。⁵⁾ つぎに (2, 9) 式右辺の第 2 項で表わされている自由表面上での線積分;

$$\chi_{FS}(\phi) = \int_{FS} \lambda \phi \cos(n, y) \partial \xi / \partial t ds = -\lambda \int_{FS} \phi \partial \xi / \partial t dx \quad - - - (2, 12)$$

について考える。Fig. 2-2 に示すように自由表面上の三角形要素 e の節点のポテンシャル ϕ_i について (2, 12) 式の変分をとると、

$$\partial \chi_{FS}^e(\phi) / \partial \phi_i = -\left\{ \int_{x_l}^{x_i} \lambda (\partial \phi / \partial x) \right\} \partial \xi / \partial t dx \quad - - - (2, 13)$$

$$(2, 10) \text{ 式より } \partial \phi / \partial x = (a_i + b_i x + c_i y_*) / 2 \Delta_e \quad - - - (2, 14)$$

ここに y_* は Fig. 2-2 のように節点 i , l 点を結ぶ直線上の y 座標で

$$y_* = -b_j (x - x_j) / c_j + \xi_j \text{ である。これらを (2, 13) 式に代入すると、}$$

$$\partial \chi_{FS}^e(\phi) / \partial \phi_i = -(\lambda / 2 \Delta_e) \int_{x_l}^{x_i} (\partial \xi / \partial t) \{ a_i + b_i x + [-b_j (x - x_j) / c_j + \xi_j] \} dx \quad - - - (2, 15) \quad \text{Fig. 2-2 自由表面上の要素}$$

つぎに $\partial \xi / \partial t$ が 1 つの要素内で一定と仮定すると後述のように自由表面の方程式が構成できない。ここでは $\partial \xi / \partial t$ が 1 つの要素内で直線分布をすると仮定し、

$$\partial \xi / \partial t = \{ (\xi_l - \xi_i) / (x_l - x_i) \} (x - x_i) + \xi_i \quad (\cdot \text{印は時間微分}) \text{ とする。なおこの場合 1 つの要素の}$$

中でポテンシャルを一次分布、すなわち流速を一定とした (2, 10) 式と $\partial \xi / \partial t$ を直線分布とすることとは不合理ではあるが、6 点近似の三角形分割など精度のよい方法を用いればこの点の不合理さは除かれると考えられる。いまこの $\partial \xi / \partial t$ の式を (2, 15) 式に代入すると次の 3 つの式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \partial \chi_{FS}^e(\phi) / \partial \phi_i &= \lambda (x_l - x_i) (\xi_l / 6 + \xi_i / 3) = \lambda \alpha_e \Delta x (\xi_l / 6 + \xi_i / 3) \\ \partial \chi_{FS}^e(\phi) / \partial \phi_j &= 0 \\ \partial \chi_{FS}^e(\phi) / \partial \phi_l &= \lambda (x_l - x_i) (\xi_l / 3 + \xi_i / 6) = \lambda \alpha_e \Delta x (\xi_l / 3 + \xi_i / 6) \end{aligned} \right\} \quad - - - (2, 16)$$

ここに、 $\alpha_e \Delta x = x_l - x_i > 0$, Δx は自由表面上の節点の x 座標の間隔の基準値である。

以上のような各三角形毎の 2 重積分や自由表面上の線積分を実行すると各節点の速度ポテンシャル ϕ ($\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$) についてつぎのような連立方程式をうる。 K を係数行列, Q を定数ベクトルとすると、

$$K\phi = Q, \text{ あるいは } \phi = K^{-1}Q, \quad (\text{ここに } K^{-1} \text{ は } K \text{ の逆行列}) \quad \text{---(2,17)}$$

Fig.2-2 のように自由表面上の節点に 1, 2, ..., m と通し番号を付けていることに対応し(2,17)式をつぎのような小行列に分割する。

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{FS} \\ \phi_2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} C(t) + D_1 \\ 0 + D_2 \end{bmatrix}, K^{-1} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix} \quad \text{--- (2,18)}$$

ここに 0 はゼロベクトル, $\phi_{FS} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$, $\phi_2 = (\phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \dots, \phi_N)$,
 $C(t) = (C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t))$, $D_1 = (D_{11}, D_{12}, \dots, D_{1m})$,
 $D_2 = (D_{2m+1}, D_{2m+2}, \dots, D_{2N})$ などである。このとき、(2,18)式を用いると
自由表面上の節点のポテンシャル ϕ_{FS} は(2,17)式より

$$\phi_{FS} = G_1[C(t) + D_1] + G_2 D_2 \quad \text{--- (2,19), ここにベクトル}$$

$O(t)$ は(2,16)式を(2,17)式の Q に入れるとき符号の変ることを考慮すればたとえば Fig.2-3 の場合には、

$$C_i(t) = -\lambda(x_{i+1} - x_i)(\dot{\xi}_{i+1} + 2\dot{\xi}_i)/6 - \lambda(x_i - x_{i-1})(2\dot{\xi}_i + \dot{\xi}_{i-1})/6 \\ = -\lambda \Delta x [\alpha_{i-1} \dot{\xi}_{i-1} + 2(\alpha_{i-1} + \alpha_i) \dot{\xi}_i + \alpha_i \dot{\xi}_{i+1}]/6 \quad \text{--- (2,20)}$$

$$\text{また Fig.2-4 の場合には } C_1(t) = -\lambda \Delta x (2\alpha_1 \dot{\xi}_1 + \alpha_1 \dot{\xi}_2)/6 \quad \text{--- (2,21)}$$

$$\text{Fig.2-5 の場合には } C_m(t) = -\lambda \Delta x (\alpha_{m-1} \dot{\xi}_{m-1} + 2\alpha_{m-1} \dot{\xi}_m)/6 \quad \text{--- (2,22)}$$

したがって自由表面形の変動を表わすベクトル $O(t)$ はつぎのようになる。

$$C(t) = \Gamma \dot{\xi} \quad \text{--- (2,23)}$$

ここにベクトル $\dot{\xi}$ は自由表面上の節点の y 座標の変動量；

$$\dot{\xi} = (\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dots, \dot{\xi}_m) \quad \text{を表わす。また } \Gamma \text{ は次式で示す実対称の}$$

大きさ $m \times m$ の行列である。

$$\Gamma = -\frac{\lambda \Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & & & \\ \alpha_1 & 2(\alpha_1 + \alpha_2) & \alpha_2 & & & \\ 0 & \alpha_2 & 2(\alpha_2 + \alpha_3) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_{m-2} & 0 \\ & & & & \alpha_{m-2} & 2(\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1}) \alpha_{m-1} \\ & & & & 0 & \alpha_{m-1} & 2\alpha_{m-1} \end{bmatrix} \quad \text{--- (2,24)}$$

いま $O(t) = \Gamma \dot{\xi}$ を(2,19)式に代入し、自由表面上の各節点にはもう 1 つの境界条件(2,6)式を入れると次式をうる。

$$\text{すなわち、} \phi_{FS} = \xi \text{ とすると } G_1 \Gamma \dot{\xi} = \xi - G_1 D_1 - G_2 D_2 \quad \text{--- (2,25)}$$

さきに $\partial \xi / \partial t$ が要素内で一定と仮定した場合、自由表面の方程式が構成できないとのべたがそれは(2,24)式に対応する Γ が常に $\det |\Gamma| = 0$ となり(2,25)式が意味をもたなくなるからである。一方、(2,24)式は、常に $\det |\Gamma| \neq 0$ であって Γ は正則な行列であり Γ^{-1} が存在する。たとえば $m = 4$ の場合 $\det |\Gamma| = -2\lambda \Delta x \cdot \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_2 + \alpha_3) \neq 0$ である。さて(2,25)式を $\dot{\xi}$ についての標準的な式に書きかえよう。このとき G_1^{-1} が存在するかどうかについてであるが従来より有限要素法による解が求められているので問題はないであろう。よって(2,25)式は変形できて

$$\dot{\xi} = (G_1 \Gamma)^{-1} \xi - (G_1 \Gamma)^{-1} G_2 D_2 - \Gamma^{-1} D_1 \quad \text{--- (2,26)}$$

これが求める自由表面上の節点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ についての連立常微分方程式である。この式の行列 $(G_1 \Gamma)^{-1}$ は、定数行列ではなく自由表面の高さ ξ が非線型に含まれていて簡単には(2,26)式を積分して ξ を求めることはできない。したがって時間についても差分化して漸化式をつくり、計算を進めてゆくことにする。なお

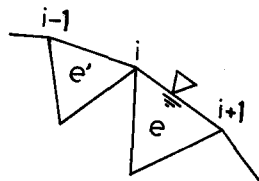


Fig.2-3 $C_i(t)$

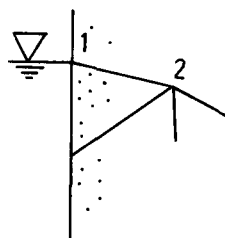


Fig.2-4 $C_1(t)$

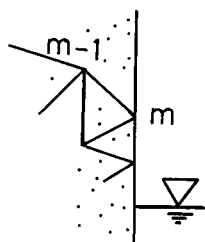


Fig.2-5 $C_m(t)$

(2,26)式が時間が経過しても発散しないような方程式か否かについては、4節で考察することにする。いま N を時間ステップ数、 Δt を時間間隔とすると、

$$\begin{aligned} [\xi^{(N+1)} - \xi^{(N)}] &= \Delta t \{ (G_1 \Gamma)^{-1} \}^{(N)} \xi^{(N+1)} - \Delta t \{ (G_1 \Gamma)^{-1} \}^{(N)} G_2^{(N)} D_2 - \Delta t \{ \Gamma^{-1} D_1 \}^{(N)}, \quad \text{あるいは、} \\ \xi^{(N+1)} &= [I - \Delta t \{ (G_1 \Gamma)^{-1} \}^{(N)}]^{-1} \xi^{(N)} - \Delta t [I - \Delta t \{ (G_1 \Gamma)^{-1} \}^{(N)}]^{-1} \{ \Gamma^{-1} D_1 + \{ (G_1 \Gamma)^{-1} \}^{(N)} G_2^{(N)} D_2 \} \dots (2,27) \end{aligned}$$

ここに I は $m \times m$ の単位行列である。なお時間差分については種々考えられようが、ここではもとの方程式 (2,26) 式が非線型でありその性質も不明であることを考慮し、 ξ に

ついては未知量を、 G_1, G_2 については既知量を使って差分化した。

計算例・Fig.2-6 に示すモデルを考える。いま準一様の仮定を用

い、その式を線型近似した方程式は

$$\left. \begin{aligned} \partial h / \partial t &= (k H_0 / \lambda) \partial^2 h / \partial x^2, \\ \text{境界条件 } x=0 & \text{ で } h=H_0+h_0 \sin(2\pi t/T), \\ x \rightarrow \infty & \text{ で } h \rightarrow H_0 \end{aligned} \right\} \dots (2,28)$$

となり、この定常振動解

$$h=H_0+h_0 \exp(-mx) \cdot \sin(2\pi t/T-mx) \quad \dots (2,29), \quad m=(\lambda \pi / k H_0 T)^{1/2}$$

と比較してみよう。⁶⁾ $H_0 = 40.0 \text{ cm}$, $h_0 = 5.0 \text{ cm}$, $T = 200.0 \text{ sec}$, $k = 0.25 \text{ cm}^2/\text{sec}$, $\lambda = 40\%$ としてこの m を求めると $m = 0.0234 \text{ cm}^{-1}$ 、一方上の領域を要素 78 個に分割し、節点数 56 個、自由表面上の節点数 14 個、

$\Delta t = 5.0 \text{ sec}$ で計算し、各自由表面上の節点毎に振幅の減衰比をとり m を算定すると Table 2-1 となった。境界条件も異なっているので直接比較はできないが (2,27) 式でも計算可能という一つの目安を与えると考えられる。つぎに、Fig.2-7 に示すように水面勾配が急で浸潤面を有する場合を (2,27) 式を用いて計算した。計算条件は藤間氏⁷⁾ の用いた $\lambda = 43\%$, $k = 0.09 \text{ cm}^2/\text{sec}$, 左側水位 $H_1 = 100.0 \text{ cm}$, 右側水位 $H_2 = 20.0 \text{ cm}$ を使用した。図中破線で示す初期水面より計算を進めてほぼ定常とみなせる状態までの非定常過程を算定した。次に (2,26) 式の ξ にかかる係数行列 $(G_1 \Gamma)^{-1}$ の固有値 (この個数は自由表面上の節点 10 個のうち左端の点の水位は既知として方程式から除くので 9 個) の各計算ステップ毎の値の範囲を Fig.2-8 の A 線と B 線の間隔として示している。固有値は自由表面形の変化に伴って変化するが、どの状態でも相異なる実数値ですべて負である。また (2,27) 式の漸化式の係数行列 $[I - \Delta t \{ (G_1 \Gamma)^{-1} \}^{(N)}]^{-1}$ の固有値は $\Delta t = 5.0 \sim 50.0 \text{ sec}$ と変化させてもいづれも 0 ~ 1.0 の値であった。

3 2次元2相流問題 ここでは Fig.3-1 に示すような密度の異なる 2 つの流体が相接して流れている場合の淡塩境界面の方程式を誘導する。基本的には 1 節の 1 次元の場合の拡張である。淡水側、塩水側の系を A, B とする。基礎式は 2 次元の Laplace の方程式を考える。(系 A) $\partial^2 \varphi_1 / \partial x^2 + \partial^2 \varphi_1 / \partial y^2 = 0 \dots (3,1)$, (系 B) $\partial^2 \varphi_2 / \partial x^2 + \partial^2 \varphi_2 / \partial y^2 = 0 \dots (3,2)$ ここに φ_1, φ_2 は系 A, 系 B の速度ポテンシャルである。 ρ_1, ρ_2 をそれぞれの系の流体密度 P_1 と P_2 を圧力分布とすると、

$$\varphi_1 = P_1 / \rho_1 g + y, \quad \varphi_2 = P_2 / \rho_2 g + y \quad \dots (3,3), (3,4)$$

(境界条件)

$$(1) \text{ A}_1 \text{ 上では淡水静水圧分布を考える。} \quad \varphi_1 = H_1 \text{ on A}_1 \quad \dots (3,5)$$

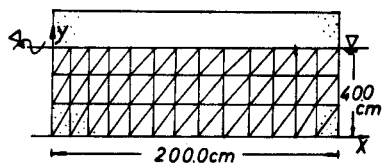


Fig. 2-6 計算例 (1)

$X \text{ cm}$	$m \text{ cm}^{-1}$
18.0	0.0248
35.0	0.0262
52.5	0.0257
69.5	0.0264

Table 2-1 各点の m

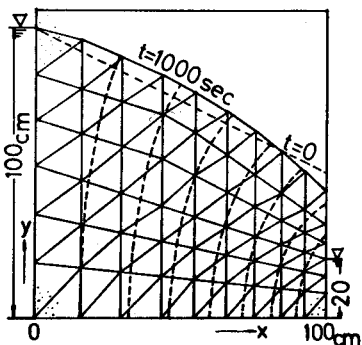


Fig. 2-7 計算例 (2)

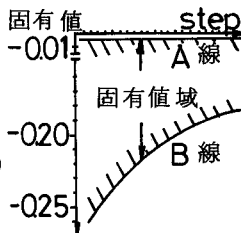


Fig. 2-8 固有値の変化

(a) A_2 上では海水静水圧分布を考える。

$$\varphi_1 = \varphi_2 H_2 / \varrho_1 - (\varrho_2 - \varrho_1) y / \varrho_1, \text{ on } A_2 \text{ --- (3, 6)}$$

(b) A_3 は不透水面とする。

$$-k \partial \varphi_1 / \partial n = 0, \text{ on } A_3 \text{ --- (3, 7)}$$

(c) B_1 上では淡水静水圧分布を考える。

$$\varphi_2 = \varphi_1 H_1 / \varrho_2 + (\varrho_2 - \varrho_1) y / \varrho_2, \text{ on } B_1 \text{ --- (3, 8)}$$

(d) B_2 上では海水静水圧分布を考える。

$$\varphi_2 = H_2, \text{ on } B_2 \text{ --- (3, 9)}$$

(e) B_3 は不透水面とする。

$$-k \partial \varphi_2 / \partial n' = 0 \text{ on } B_3 \text{ --- (3, 10)}$$

(f) 淡塩境界面 IF 上では圧力の連続条件と流量の連続条件を考える。

$$(i) \text{ 圧力の連続条件 } p_1 = p_2 \text{ より } \varrho_1 \{ \varphi_1 - \xi(x, t) \} = \varrho_2 \{ \varphi_2 - \xi(x, t) \} \text{ --- (3, 11)}$$

$$(ii) \text{ 流量の連続条件 } -k \partial \varphi_1 / \partial n = \lambda \cos(n, y) \partial \xi / \partial t \text{ (系 A) --- (3, 12)}$$

$$-k \partial \varphi_2 / \partial n' = \lambda \cos(n', y) \partial \xi / \partial t \text{ (系 B) --- (3, 13)}$$

1次元の密度流の節節でのべたようにそれぞれの領域を別々に考えるとき、両領域の汎関数を

$$(\text{系 A}) \chi_1(\varphi_1) = \iint (k/2) [(\partial \varphi_1 / \partial x)^2 + (\partial \varphi_1 / \partial y)^2] dx dy + \lambda \int_{IF} \varphi_1 \cos(n, y) \partial \xi / \partial t ds \text{ --- (3, 14)}$$

$$(\text{系 B}) \chi_2(\varphi_2) = \iint (k/2) [(\partial \varphi_2 / \partial x)^2 + (\partial \varphi_2 / \partial y)^2] dx dy + \lambda \int_{IF} \varphi_2 \cos(n', y) \partial \xi / \partial t ds' \text{ --- (3, 15)}$$

とする。2節の自由表面の場合と同様に系A, 系Bにつきつぎの連立方程式をうる。

$$(\text{系 A}) K^A \varphi^A = Q^A \text{ --- (3, 16)}, (\text{系 B}) K^B \varphi^B = Q^B \text{ --- (3, 17)}$$

なおここでは淡塩境界面上の節点には通し番号 1, 2, ..., m を付けておく、 K^A, K^B の逆行列 G^A, G^B が存在

$$\text{するとして } \varphi^A = G^A Q^A \text{ --- (3, 18)}, \varphi^B = G^B Q^B \text{ --- (3, 19)}$$

淡塩境界面上の節点のポテンシャルとそれ以外の節点のポテンシャルとに分け、 G^A, G^B, Q^A, Q^B を分割すると、

$$\varphi^A = \begin{bmatrix} \varphi_I^A \\ \varphi_{II}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^A & G_2^A \\ G_3^A & G_4^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^A(t) + D_1^A \\ 0 + D_2^A \end{bmatrix}, \varphi^B = \begin{bmatrix} \varphi_I^B \\ \varphi_{II}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^B & G_2^B \\ G_3^B & G_4^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^B(t) + D_1^B \\ 0 + D_2^B \end{bmatrix} \text{ --- (3, 20),}$$

したがって、淡塩境界面上の節点のポテンシャルはそれぞれ

$$\varphi_I^A = G_1^A [C^A(t) + D_1^A] + G_2^A D_2^A \text{ --- (3, 22)}, \varphi_I^B = G_1^B [C^B(t) + D_1^B] + G_2^B D_2^B \text{ --- (3, 23)}$$

さて淡塩境界面上では圧力の連続条件(3, 11)式が成り立たなければならないので、(3, 22), (3, 23)式より

$$\varrho_1 (\varphi_I^A - \xi) = \varrho_2 (\varphi_I^B - \xi) \text{ いま } \varrho_2 / \varrho_1 = 1 + \varepsilon, \varepsilon = (\varrho_2 - \varrho_1) / \varrho_1 \text{ とおき(3, 22), (3, 23)}$$

$$\text{式を用いると、} G_1^A [C^A(t) + D_1^A] + G_2^A D_2^A = (1 + \varepsilon) \{ G_1^B [C^B(t) + D_1^B] + G_2^B D_2^B \} - \varepsilon \xi \text{ --- (3, 24)}$$

上式の $C^A(t), C^B(t)$ は 2 節の自由表面問題でのべたように淡塩境界面上の線積分に由来するものである。この場合、系Bが自由表面に対応するので、 $C^B(t) = \Gamma \dot{\xi} = -C^A(t)$ 、ここに Γ は(2, 24)式と同一である。この関係式を(3, 24)式に代入すると

$$[G_1^A + (1 + \varepsilon) G_1^B] \Gamma \dot{\xi} = \varepsilon \xi + G_1^A D_1^A + G_2^A D_2^A - (1 + \varepsilon) [G_1^B D_1^B + G_2^B D_2^B], \text{ もし } [G_1^A + (1 + \varepsilon) G_1^B] \Gamma$$

が正則行列であれば逆行列が存在して

$$\dot{\xi} = \varepsilon F_1 \xi + F_2, F_1 = \{ [G_1^A + (1 + \varepsilon) G_1^B] \Gamma \}^{-1}, F_2 = F_1 \{ G_1^A D_1^A + G_2^A D_2^A - (1 + \varepsilon) [G_1^B D_1^B + G_2^B D_2^B] \} \text{ --- (3, 25)}$$

これが求める非定常の淡塩境界面の微分方程式である。この式も前節の自由表面の方程式と同様に ε に

ついての非線型の連立方程式である。時間 t についての差分化は同様に ν を時間ステップ数とするととき、

$$\xi^{(\nu+1)} - \xi^{(\nu)} = \varepsilon \Delta t F_1^{(\nu)} \xi^{(\nu)} + \Delta t F_2^{(\nu)}$$

$$[I - \varepsilon \Delta t F_1^{(\nu)}]^{-1} = F_3^{(\nu)} \text{ が存在するときには } \xi^{(\nu+1)} = F_3^{(\nu)} \xi^{(\nu)} + \Delta t F_3^{(\nu)} F_2^{(\nu)} \text{ --- (3, 26)}$$

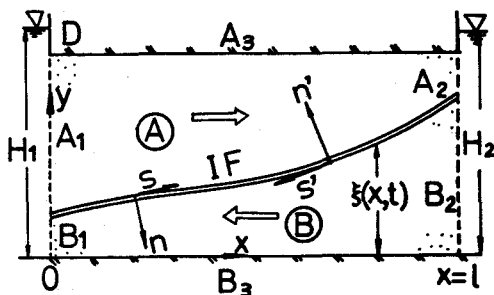


Fig. 3-1 2次元2相流問題

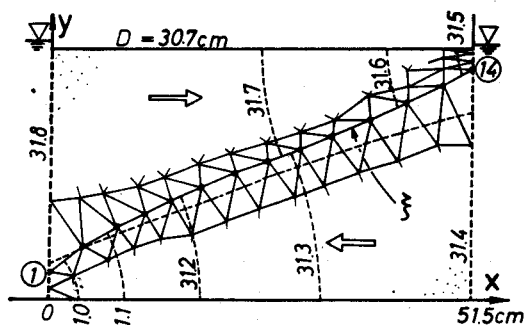


Fig. 3-2 計算例 (1)

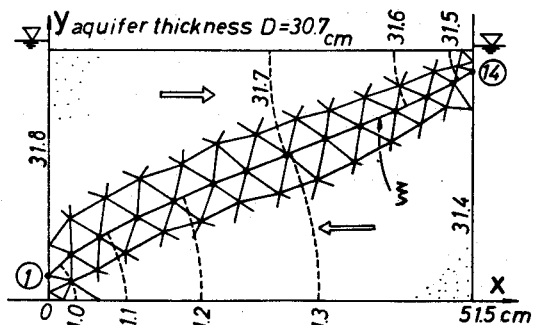


Fig. 3-3 計算例 (2)

つぎに計算例を示そう。ここでは定常 2 相流近傍の任意の初期状態から定常状態までの非定常過程を計算した。Fig. 3-2 は破線で示す状態から計算を進めたものであるが三角形の形状が計算過程で歪んでゆきその最終の形状が図のように淡水の海水側出口付近では有限要素法の計算の精度上よいとはいえない形になったので Fig. 3-3 では Fig. 3-2 の定常形を初期状態として分割をやり直し再度計算したものである。Fig. 3-3 は Fig. 3-2 とほとんど変化がなかった。また、図中破線はそれぞれの領域の算定ポテンシャル線を表わして淡水塩界面形状とほぼ直交しており、計算がほぼ満足すべきものであると考えられる。Table 3-1 は、上記の定常状態の淡水塩界面を不透水壁とみなして両領域をまったく別個に計算し両領域の淡水塩境界面上の節点の圧力を求めたもので、圧力はきわめてよく一致している。したがって、ここでえられた淡水塩境界面形状はほぼ定常状態の形状であるといえよう。つぎに Table 3-2 は方程式 (3, 25) 式の ϵ にかかる係数行列 F_1 の固有値であっていづれも異なる実数でしかもすべて負の値である。なお、Fig. 3-3 では要素数はそれぞれの領域につき 96 個、98 個、また節点数は 66 個と 65 個である。計算時間は 1 ステップにつき 1 秒程度であった。

4 安定性についての考察 ここでは、Liapunov の安定性理論をもとに 2 節で構成した自由表面形の方程式について定常状態近傍の挙動を考察しよう。なお 2 相流の場合でもえられた境界面の微分方程式の式形からみて類似であると考えられる。Liapunov の方法では線型、非線型を問わない微分方程式系；

$\dot{\epsilon} = F(t, \epsilon)$ が与えられたとき解を求めることなくその安定性を調べるものである。^{(8), (9), (10)} この詳細は文献 (8) にのべられているが、ここでは数学的厳密さを欠くうらみがあるがその概略をのべれば次のようである。その一次偏導関数とともに原点を含むある開領域で連続で、原点だけで 0 で原点以外では正となるスカラー関数 $V(\eta, t)$ を考え、(1) 原点のある近傍でその導関数 $dV/dt \leq 0$ であれば原点は安定である。(安定性定理)。またもし (2) $dV/dt < 0$ ならば安定性は漸近的である(漸近安定性定理)。

したがってここでは自由表面の方程式 (2, 26) について $V(\eta, t)$ とその導関数 dV/dt について検討してみよう。自由表面の方程式 (2, 26)；

$$\dot{\xi} = (G_1 \Gamma)^{-1} \xi - (G_1 \Gamma)^{-1} G_2 D_2 - \Gamma^{-1} D_1 \quad \text{--- (4, 1)}$$

についていま定常状態近傍の安定性をみるため、座標をうつして考えよう。まず $\dot{\epsilon} = 0$ となる点 ϵ_* を求めると (4, 1) 式より

$$\xi_* = G_{1*} D_1 + G_{2*} D_2 \quad \text{--- (4, 2),} \quad \text{この } \epsilon_* \text{ を用いて}$$

$$\eta = \xi - \xi_* \quad \text{--- (4, 3) とおき (4, 1) 式を } \eta \text{ につき書き改めると}$$

$$\dot{\eta} = A \eta + B \quad \text{ここに } A \equiv (G_1 \Gamma)^{-1}, B \equiv \Gamma^{-1} (G_1 G_{1*} - I) D_1 + (G_1 \Gamma)^{-1} (G_{2*} - G_2) D_2 \quad \text{--- (4, 4)}$$

No	P_1/g	P_2/g
1	28.828	28.829
2	26.217	21.218
3	24.171	24.172
4	21.637	21.638
5	19.693	19.694
6	17.573	17.575
7	15.946	15.947
8	13.951	13.953
9	11.953	11.955
10	10.296	10.298
11	8.535	8.537
12	6.595	6.595
13	4.894	4.896
14	3.052	3.052

Table 3-1 圧力分布

1	-0.263	8	-0.062
2	-0.209	9	-0.049
3	-0.165	10	-0.038
4	-0.144	11	-0.029
5	-0.115	12	-0.020
6	-0.095	13	-0.011
7	-0.076	14	-0.005

Table 3-2 F_1 の固有値

ここに I は単位行列である。方程式(4,4)は時間 t を陽には含まないいわゆる自律系であるのでいまスカラー関数 $V(\eta)$ をつぎのようにおいてみる。

$$\text{正值 2 次形式 ; } V(\eta) = (\eta, \eta) \quad \text{--- (4,5)}$$

$$\text{に対しその導関数 ; } dV(\eta)/dt = 2(\dot{\eta}, \eta) \\ = 2[(A\eta, \eta) + (B, \eta)] \quad \text{--- (4,6)}$$

前述の定理から原点 $\eta = 0$ の近傍で導関数 $dV(\eta)/dt$ が常に負であれば(4,4)式は漸近安定である。実際いまの場合を考えると任意の時間 t_1 と $t_2 (> t_1)$ のときの η_1 と η_2 に対して $V(\eta_1) > V(\eta_2)$ となり

$$\|\eta_1\| > \|\eta_2\| \text{ となる (ここに } \|\eta\| = [\sum_{i=1}^m \eta_i^2]^{1/2} \text{)}。$$

したがって方程式(4,4)は安定であるといえる。

次に(4,6)式を実際の計算例から算定してみよう。まず、(4,3)式の ϵ_{*} として次の値を用いた。すなわち Fig.4-1, Fig.4-2 には透水係数 $k = 1.895 \text{ cm/sec}$, 空けき率 $\lambda = 1.0$, 左側水位 40.0 cm , 右側水位 5.0 cm の計算条件のもとで图中破線の初期水面に対する(2,26)式の $t \rightarrow \infty$ とみなせる解における自由表面の形状を示している。

Fig.4-1 は要素数 57 個, 節点数 42 個, 自由表面上の節点数 11 個で 760 秒 (76 ステップ) 後、また

Fig.4-2 は要素数 101 個, 節点数 69 個, 自由表面上の節点数 15 個で 1000 秒 (100 ステップ) 後の算定結果である。

Fig.4-1 と Fig.4-2 における最終の自由表面と等ポテンシャル線はほぼ一致してほぼ正しい最終の水面形と考えられる。また定常状態の自由表面は不透水面とみなせることから Fig.4-1 の表の ϕ はこの図の最終の自由表面を不透水面として求めたポテンシャルであり、また表の ϵ_{*} は不透水面の y 座標すなわち最終の自由表面の水位である。 ϕ と ϵ_{*} を比較するとほぼ一致して Fig.4-1 の最終の自由表面はほぼ十分正しい定常状態を示していると考えられる。以上の結果ここでは ϵ_{*} としては Fig.4-2 の最終の自由表面形を用いることにする。なお因みに Table 4-1 は行列 A の最終的な固有値を示していても実数で負である。

Fig.4-3 には太実線で示す上記の ϵ_{*} と任意の初期水面形 3 種類を示している。case(i) は ϵ_{*} よりも大きい値, case(ii) は小さい値, case(iii) はかなり凹凸のはげしいものである。このように初期水面形として、種々の場合を与えたのは三角形の違による収束の様子をみるためである。

Fig.4-4 はそれぞれの例につき $-(1/2) dV/dt$ の値を示している。どの場合でも $dV/dt < 0$ である。したがって $\eta = 0$ の近傍では前述の(2)漸近安定性定理がなりたつ。このことからかなり任意の自由表面形をしていても定常状態の近傍では方程式(4,1)式で計算を進めてゆくと唯一の ϵ_{*} がえられることになり方程式

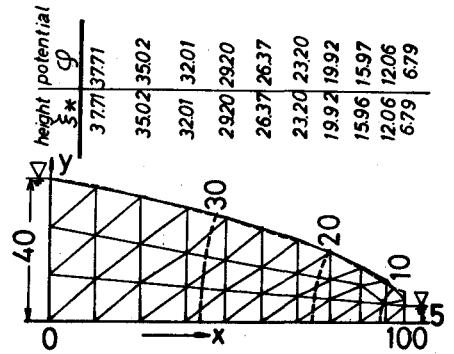


Fig.4-1 (A type) ϵ_{*} について

— equation (226)
— Dupuit's solution
--- initial height

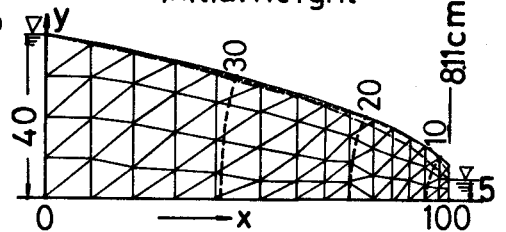


Fig.4-2 (B type) ϵ_{*} について

A type B type

-4.723	-0.314	-6.378	-0.622
-2.144	-0.174	-4.937	-0.489
-1.713	-0.056	-1.866	-0.385
-1.343		-1.563	-0.278
-1.016		-1.206	-0.185
-0.718		-1.046	-0.104
-0.490		-0.805	-0.034

Table 4-1 A の固有値

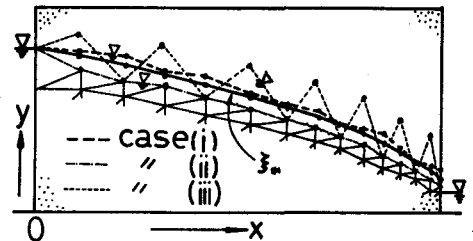


Fig.4-3 初期水面形の例

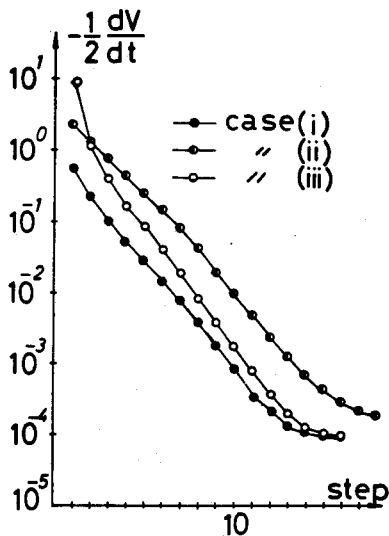


Fig.4-4 $-(1/2)dV/dt$ の変化

(4,4)は安定であるといえよう。参考のためにTable 4-2にはCase (iii) の状態から計算をしてゆく過程におけるスカラー関数 $V(\eta)$ とその導関数の値 (I は(4,6)式の第1項の半分, II は第2項の半分)を示して

各ステップ毎に $V(\eta)$ の値が減少していることがわかる。次に別の面から方程式(4,4)の安定性を考えてみよう。Table 4-2の II は η が0に近づくときより I に近づくようである。またFig.2-8は各ステップ毎に固有値が一定値に近づくことを示していることからいまの場合(4,4)式の行列 A は η が0に近づくにつれ一定値に近づく。これらのことから η が十分0に近いところでは方程式(4,4)は、 $A\eta \gg B$, $A = \text{const.}$ とした線型近似式; $\dot{\eta} = A\eta$ とみなしうる。したがってこのとき系は A の固有値の実数部がすべて負のとき安定となる。⁸⁾ Fig.2-8, Table 3-2, Table 4-1に示す固有値はいずれも相異なる負の実数であることからここでえられた自由表面や2相流境界面の微分方程式は定常状態の近傍で安定であると考えられよう。

つぎにFig.4-2の例で $x=0$ の水位を周期 $T=200$ 秒,振幅5cmで定常状態から変動させてゆく場合の各地点の水位変動の算定結果をFig.4-5~Fig.4-7に示す。時刻 $2T$ 以後は定常振動となり $T \sim 2T$ の変動をくり返す。なお比較のため太実線は当該地点の定常振動のほぼ平均水位(図の横軸)を基準にしていた $x=0$ の水位変動である。文献8)によると行列 A の固有値の実数部がすべて負であり、方程式(4,1)が線型近似できる場合には定常振動解がえられることが証明されているが、この計算例では(4,4)式の A , B が η の関数であることから考えると線型近似できるとはいえ難いが、ここでは図に示すように定常振動解がえられた。

5. むすび 本報では1次元密度流の淡塩境界面を求める問題を基に自由表面, 2相流境界面形状の微分方程式を有限要素法により空間的に離散化し求めた。えられた微分方程式は準一様流仮定や線型近似のできないような水面勾配が

NO.	$I (A\eta, \eta)/2$	$II (B, \eta)/2$	$V(\eta)$
1	-33.20	24.24	59.751
2	-8.22	7.09	19.941
3	-2.56	2.16	9.142
4	-1.60	1.41	4.312
5	-1.07	0.98	1.869
6	-0.64	0.60	0.948
7	-0.342	0.323	0.445
8	-0.170	0.161	0.209
9	-0.081	0.076	0.099
10	-0.038	0.036	0.046
11	-0.0174	0.0165	0.021
12	-0.00804	0.00765	0.009
13	-0.00373	0.00353	0.004
14	-0.00173	0.00160	0.002
15	-0.000809	0.000703	0.001
16	-0.000397	0.000294	0.000
17	-0.000225	0.000117	0.000
18	-0.000161	0.000047	0.000

Table 4-2 dV/dt の各項と $V(\eta)$ の変化

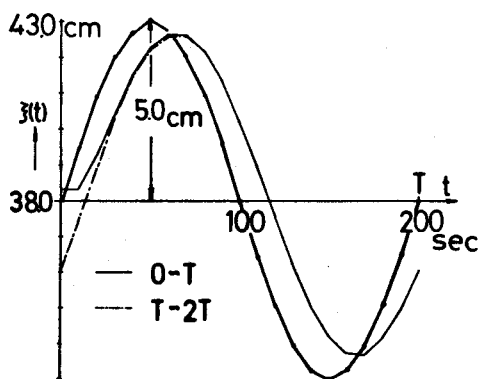


Fig.4-5 $x=11.0$ cmの水面変動

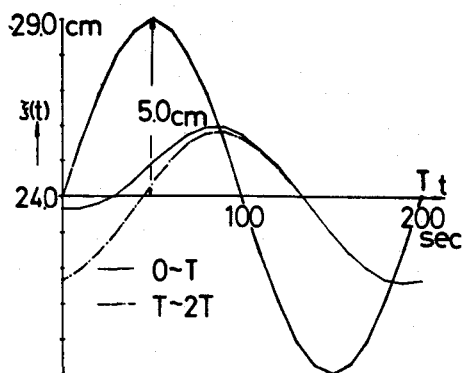


Fig. 4 - 6 $x = 690 \text{ cm}$ の水面変動

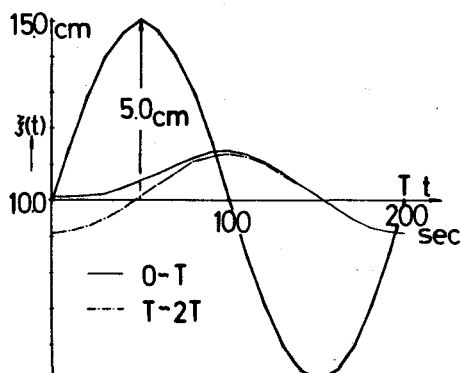


Fig. 4 - 7 $x = 975 \text{ cm}$ の水面変動

急な場合をも含めて、定常状態近傍の非定常変動を記述するものである。この方程式が定常状態の近傍で安定か否かについては Liapunov の安定性理論にしたがい検討を加え、その結果自由表面の方程式も 2 相境界面の方程式もともに相異なる負の実数の固有値をもつこと、自由表面の方程式はかなり凹凸がある形状でも計算でき、安定であるということが粗い議論ではあるが実証できた。精度については形状の変化ごとに行列 G_1 などが変動するので検討が困難となり本報では評価までいたらなかった。また流れの領域が大きく変化するような場合については、原理的には本報の解で計算可能であるが計算過程における要素の三角形の歪みなど計算上の技術的な問題が主体となりここではとり扱わなかった。従来より既に有限要素法によって自由表面や塩境界面形状を定める手法は提案されているがこれら形状の満たす方程式は、具体的な形で明らかではなくその特性も不明であったが、本報によってこれらの点がある程度明らかにされたと考える。

最後に本研究の一部として卒業研究された当時九州大学大学院生（現在運輸省勤務）森下保寿氏に感謝いたします。

参考文献

- 1) Jacob Bear, "Dynamics of Fluids in Porous Media", American Elsevier Publishing Company, Inc. P 526
- 2) 河野伊一郎, 「有限要素法の浸透問題への応用」, 土木学会関西支部講習会テキスト (建設技術者のための有限要素法の基礎と応用)
- 3) 土木学会編「数値解析/流体解析編」, サイエンス社, P 95
- 4) S.P. Neuman, P.A. Witherspoon, "Variational Principles for Confined and Unconfined Flow of Ground Water", Water Resources Research 1970, Vol 6, No 5, P 1376~1382
- 5) O.C. ツィエンキーヴィッツ, Y.K. チューン共著, 吉識雅夫訳「マトリックス有限要素法」, 培風館
- 6) 大橋行三, 「自由地下水面の非定常性について—有限要素法による検討—」, 第 28 回土木学会年次講演会集, P 371
- 7) 藤間聡, 「堤体内の浸透流に関する研究」, 第 29 回土木学会年次講演会集, P 221
- 8) J. ラーサル, S. レフシェッツ著, 山本稔訳「リャプノフの方法による安定性理論」, 産業図書
- 9) 西垣久, 洲之内治男共著「マトリクスとその応用」, コロナ社, P 210
- 10) 伊藤正美著, 「システム制御理論」, 昭晃堂, P 138