

「ボルテラ汎関数級数による 河川出水動特性の解析 および 予測」

東北電力株式会社 総合研究所

○ 畠 山 隆

電力中央研究所 エネルギー 環境技術研究所

北 見 恒 雄

電力中央研究所 電力技術研究所

江 口 正 義

1. 概要

河川の短期降雨出水計算は、従来様々なモデルをあてはめて解析が行なわれて来た。

しかしながら、これらの手法において河川出水の全体現象が不明にもかかわらず、比較的自由度の低い特殊な構造を有するモデルを適用するため、モデルの構造の不適合性から生ずる計算誤差が予想され、あるいは様々な経験的な判断、処理を必要としたり、自動計算不能と思われる試行錯誤を必要とする等、河川を管理する現場に信頼性のある実用的な河川出水監視システムとして供するには問題があつた。

このためモデルの構造を仮定する必要がなく、経験熟練等を必要としない信頼性のある実用的な計算方法と言う観点から河川系を入出力関係だけから把握する観点にたち、それを非線形連続汎関数とみなしそのボルテラ汎関数級数の適用を試みた。

そして、河川出水現象をボルテラ汎関数級数で表現することの妥当性を確認するため、2つの異なる年月の1時間毎の降雨量データ(mm/h)および出水量データ(m³/sec)に適用し、河川の特性を決定しこの決定された特性で、種々他年月の出水予測シミュレーションを行なつたところ、良好な結果が得られ、また河川流域出水特性の季節的変動等興味ある情報が得られた。

2. 検討手法

(1) 河川出水現象の汎関数表現

河川の出水現象は、遠方よりの地下水脈あるいは非常な地層深部の浸透水による定常的な出水を除外すれば、比較的短時間過去の降雨が原因で生ずる現象である。

すなわち、上記の定常的な出水を除外した河川の出水量は、河川流域の季節的変動あるいは経年的変化がなければ、面としての河川流域の降雨量入力時系列が与えられれば一意的に決定されるものと考えられる。

ここで、降雨量の空間的分布が、流域内の複数個所の降雨量の単純平均値により表現できると仮定すると、前述の考察により河川出水量 $Q(t)$ (m³/sec)は、単純平均により得られた雨量 $r(t)$ (mm/h)の連続汎関数として(1)式のようにボルテラ級数表示される。

$$Q(t) = H[r(\tau); \tau \leq t] = \int_{-\infty}^t h_1(t-\tau) r(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h_2(t-\tau_1, t-\tau_2) r(\tau_1) r(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \quad (1)$$

ここで、 H は河川出水特性を表す汎関数、 $h_1, h_2, \dots$ は拡張された荷重関数、 ℓ は河川の記憶時間。

なお、(1)式において、定常流分に対応する定数項は省略した。

(2) 拡張荷重関数の直交関数展開表現

河川の降雨出水関係式として(1)のボルテラ級数表現を導入し、この報告においては、ボルテラ級数のそれぞれ、1、2、3、4次までをとった各級数により河川出水特性を表現することを試みた。

その表現式において、未知関数である拡張荷重関数、 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4 を決定するためこれらを既知の最初の4個の正規直交関数系で展開し、未知関数を未知展開係数、 a_i 、 a_{ij} 、 a_{ijk} 、 a_{ijkl} おきかえた。

すなわち、正規直交関数系を $\{F_i(t); i = 0, 1, 2, 3\}$ とした時、

$$h_1(t) = \sum_{i=0}^3 a_i F_i(t) \quad (2)$$

$$h_2(t_1, t_2) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} F_i(t_1) F_j(t_2) \quad (3)$$

$$h_3(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i,j,k=0}^3 a_{ijk} F_i(t_1) F_j(t_2) F_k(t_3) \quad (4)$$

$$h_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sum_{i,j,k,l=0}^3 a_{ijkl} F_i(t_1) F_j(t_2) F_k(t_3) F_l(t_4) \quad (5)$$

正規直交関数系としては、河川の流下時間に対応する遅れ時間因数NDと、河川流域系の現象の変化速度に関連する時間スケール因数STCを含むラグール正規直交系とした。

これは、基本系

$$f_i(t) = t^i \times \text{EXP}(-(t - ND)/STC), i = 0, 1, 2, 3$$

をシュミットの直交化法で正規直交化したものである。

(3) 未知定数(未知展開係数)および最適因数(ND、STCの最適値)の決定

(1)式の4次までの項をとり、(2)、(3)、(4)、(5)を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} Q(t) = & \sum_{i=0}^3 a_i \int_{t-\ell}^t F_i(t-\tau) r(\tau) d\tau \\ & + \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} \int_{t-\ell}^t \int_{t-\ell}^t F_i(t-\tau_1) F_j(t-\tau_2) r(\tau_1) r(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \sum_{i,j,k=0}^3 a_{ijk} \int_{t-\ell}^t \int_{t-\ell}^t \int_{t-\ell}^t F_i(t-\tau_1) F_j(t-\tau_2) F_k(t-\tau_3) r(\tau_1) r(\tau_2) r(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + \sum_{i,j,k,l=0}^3 a_{ijkl} \int_{t-\ell}^t \int_{t-\ell}^t \int_{t-\ell}^t \int_{t-\ell}^t F_i(t-\tau_1) F_j(t-\tau_2) F_k(t-\tau_3) F_l(t-\tau_4) r(\tau_1) r(\tau_2) r(\tau_3) r(\tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式において $F_i(t)$ は既知関数であるので、雨量データが与えられれば積分計算が実行できて未知係数に関する一次式が得られる。

この計算を各時刻 t について行なえば、最終的に多元連立一次方程式が得られる。

本報告においては、未知定数より一次式の数を多くとり、最小二乗法により未知定数を決定した。NDおよびSTCについては、おのおのある範囲で変化させそのおのおのの組合せに対して最小二乗法を適用し、得られた平均二乗誤差が最小になるもので、その最適値とした。

未知定数は、この最適値に対して最小二乗法により決定した。

なお、河川の記憶時間 ℓ についても、試行錯誤により平均二乗誤差を指標に決定すべきであったが、出水の減少状態を視察的に検討し100時間と固定し全体の試算を行なった。

(4) 解析データ

解析したデータは、福島県某河川流域(図-1参照)で当流域は第4紀火山岩の礫層で比較的浸透効果が大い地域である。

流域面積は、ほぼ800km²で、降雨データは、図-1中で×印で示されている三個所の自動雨量測定点から得られる1時間毎のデータを単純平均して得られる雨量 $r(t)$ (mm/h)、出水量は、○印で示される点の1時間毎の出水量 $Q(t)$ (m³/sec)で、これは、水位を水量に変換したものである。対象ケースとしては、A年度の6月、8月、10月(A年度は昭和30年度の某年である。)、B年度(A年度の3年後)の7月、C年度(A年度の8年後)の8月の出水例である。

ただし、係数決定の対象はA年6月と8月で、この2ケースより求められた係数により、他年月の出水予測シミュレーションを行なった。

3. 解析結果

(1) 未知係数、最適因数および次数の決定

NDとSTCの最適値は、モデル決定の際の平均二乗誤差を最小にするものであるが、さらに級数の次数を考慮すると平均二乗誤差は、三個の変数の影響を受ける。

そこで、一応STCと級数次数の区別をつけず、NDの変化による平均二乗誤差の変化状態を集約した結果が表-1で、2次までとったボルテラ級数の平均二乗誤差のNDによる変化状態を集約した結果が表-2である。

表-1、2よりNDの最適値は、1～3時間と得られこれよりND=2(時間)と決定した。

ND=2に対する、STCを変化させた時の平均二乗誤差の変化状態を集約した表-3よりSTCの最適値として、20(時間)と決定した。

これら最適因数のもとに、A年6月の係数を決定した結果例が表-4である。

なお、最適級数次数は次数の増加に伴ない、平均二乗誤差は単調に減少するので、後述のシミュレーション結果の状況により検討を行ない、ボルテラ級数の適切な次数を2次と結論した。

(2) 出水予測シミュレーション

図-2にA年6月の係数でA年10月を予測シミュレーションした結果を、図-3、4に、A年8月の係数で、それぞれB年7月、C年8月を予測シミュレーションした結果を示す。

(3) 解析結果要約

- a NDは1～3時間と定性的に妥当な範囲に求まり、STCについては、解析ケースによらず15～20時間とほぼ固定的に求まった。
- b 級数次数については2次で充分で、1次のボルテラ級数表現すなわち線形表現より、2次のボルテラ級数表現を行なった方が、飛躍的に計算精度が向上することが判明した。(図-2、3、4)
また、低出水と高出水時の河川出水特性をボルテラ級数により、統一的に表現できることが判明した。
- c 本研究の対象流域においては、集中降雨のような、降雨の地域分布の明白な偏りがなければ、流域内の複数個所の降雨量の単純平均で、充分にその特性を表わすことができることが判明した。
- d 河川出水特性は、乾期、雨期又は月毎で出水特性が変動することを示唆する予測シミュレーション結果が得られ、
 - (a) 6月と10月は、等しい出水特性(図-2)
 - (b) 8月は6月と比較し、出水しない特性
 - (c) 年度が隔つていても(8年)、同じ月なら(8月)、等しい出水特性(図-4)
 - (d) 8月は7月より出水しない特性(図-3)
 - (e) 出水のしやすさを順序づけると
(6月)=(10月)>(7月)>(8月)の特徴がうかがわれた。

出水ケース	NDの変化 平均二乗誤差 の増減	ND=4→ND=3		ND=3→ND=2		ND=2→ND=1		ND=1→ND=0	
		減	増	減	増	減	増	減	増
A 年 6 月 出水		24	0	19	5	14	10	3	19
A 年 8 月 出水		24	0	17	7	15	9	2	22
A 年 10 月 出水		12	12	8	16	4	20	7	17
計		58	12	44	28	33	39	12	58

表-1. NDの変化による平均二乗誤差の増減（級数次数，STCの区別をつけない）

出水ケース	NDの変化 平均二乗誤差 の増減	ND=4→ND=3		ND=3→ND=2		ND=2→ND=1		ND=1→ND=0	
		減	増	減	増	減	増	減	増
A 年 6 月 出水		6	0	6	0	6	0	1	5
A 年 8 月 出水		6	0	6	0	6	0	1	5
A 年 10 月 出水		4	2	0	6	0	6	1	5
計		16	2	12	6	12	6	3	15

表-2. NDの変化による平均二乗誤差の増減（2次までの級数のみに着目，STCに区別をつけない）

出水 ケース	時定数 (STC:時間)	級数次数			
		1 次	2 次	3 次	4 次
昭和 A 年 6 月 出水	5	0.1378E04	0.1085E04	0.8651E03	0.4860E03
	10	0.8937E03	0.3470E03	0.1605E03	0.8383E02
	15	0.8091E03	0.1718E03	0.6551E02	0.1932E02
	20	0.7788E03	0.1383E03	0.7608E02	0.1426E02
	30	0.7569E03	0.1512E03	0.7247E02	0.1419E02
	40	0.7501E03	0.1695E03	0.7348E02	0.1689E02
昭和 A 年 8 月 出水	5	0.2803E04	0.1337E04	0.4824E03	0.1060E03
	10	0.1944E04	0.3057E03	0.3952E02	0.1064E02
	15	0.1762E04	0.1668E03	0.4763E02	0.7079E01
	20	0.1789E04	0.1567E03	0.4273E02	0.6751E01
	30	0.1825E04	0.1639E03	0.3311E02	0.9716E01
	40	0.1832E04	0.1715E03	0.3375E02	0.1143E02
昭和 A 年 10 月 出水	5	0.2616E04	0.1067E04	0.7319E03	0.5207E03
	10	0.2086E04	0.2450E03	0.5004E02	0.1259E02
	15	0.2167E04	0.1462E03	0.2520E02	0.1140E02
	20	0.2192E04	0.1273E03	0.2127E02	0.1089E02
	30	0.2201E04	0.1470E03	0.2150E02	0.1104E02
	40	0.2201E04	0.1618E03	0.2147E02	0.1096E02

表-3. ND=2に固定し，STCを変化させた時の平均二乗誤差の変化状態

FIRST ORDER APPROXIMATION PARAMETERS

C(1),1=1,2,...,4
0.1372650D 02 -0.1164512D 00 0.2626527D 01 0.3899551D 01

MEAN SQUARE ERROR EE= 0.1789D 04

SECOND ORDER APPROXIMATION PARAMETERS

C(1),1=1,2,...,14
0.2162013D 01 -0.2126479D 00 -0.3237335D 01 -0.4955594D 01 0.3540833D 00
0.8411412D 00 0.1178730D 01 0.9101252D 00 -0.1410833D 00 0.2608389D 00
0.1342487D 00 -0.1114254D -01 0.5353039D 00 -0.1839474D 00

MEAN SQUARE ERROR EE= 0.1567D 03

THIRD ORDER APPROXIMATION PARAMETERS

C(1),1=1,2,...,34
-0.2272630D 01 -0.1239902D 02 -0.2187875D 02 -0.1699364D 02 0.4087456D 00
0.1000636D 01 0.3605002D 01 0.4237973D 01 0.3155890D 01 0.3415112D 01
0.1270748D 01 0.4740648D -02 -0.9748705D 00 -0.2239578D 01 0.2523710D -01
0.8158683D -01 -0.1002998D 00 -0.2025392D 00 -0.2342327D 00 -0.3930865D -01
-0.1877493D -01 -0.5893763D -02 0.1528546D 00 -0.5011309D -01 -0.3852693D -01
-0.2270697D 00 -0.9396628D -01 -0.1087509D 00 -0.2929619D 00 -0.1865915D 00
0.8837104D -01 0.2021562D 00 -0.3086224D -01 -0.1063999D -01

MEAN SQUARE ERROR EE= 0.4273D 02

FOURTH ORDER APPROXIMATION PARAMETERS

C(1),1=1,2,...,69
0.7511484D 02 0.3120467D 03 0.4512647D 03 0.2235759D 03 -0.1293385D 02
-0.6484083D 02 -0.1043085D 03 -0.3753402D 02 -0.1500453D 02 -0.6754951D 02
0.2306165D 02 -0.8892386D 02 -0.5073746D 02 -0.1443997D 02 0.6262800D 00
0.4031508D 01 0.6456254D 01 0.1614176D 01 0.3836604D 01 0.1238631D 02
-0.1284541D 01 0.9810570D 01 0.7365262D 01 0.3180624D 01 -0.2317272D 01
-0.8882005D 00 -0.4661651D 01 0.6778074D 01 -0.1798464D 01 0.9052581D 00
0.6562226D 01 0.3542482D 01 0.4010810D 00 0.4406487D 00 -0.8561870D -02
-0.6398678D -01 -0.1073324D 00 -0.1432607D -01 -0.9628568D -01 -0.3459110D 00
0.1127263D -01 -0.2282079D 00 -0.2152076D 00 -0.1199036D 00 -0.5120416D -01
-0.2056528D 00 0.1282911D 00 -0.4166082D 00 0.3428578D -03 -0.7620430D -01
-0.2967896D 00 -0.2807129D 00 -0.7656775D -01 -0.3408615D -01 0.1032181D 00
0.1054061D 00 0.1335660D 00 -0.3293866D -01 0.1273712D 00 0.2583305D -01
-0.1391297D 00 0.1320194D 00 0.1054662D 00 0.9917457D -01 -0.1767907D 00
-0.1399321D 00 -0.8497205D -01 -0.1718981D -01 0.2978859D -01

MEAN SQUARE ERROR EE= 0.6751D 01

表-4 ND=2、STC=20に対し、A年6月のデータにより求められた未知係数

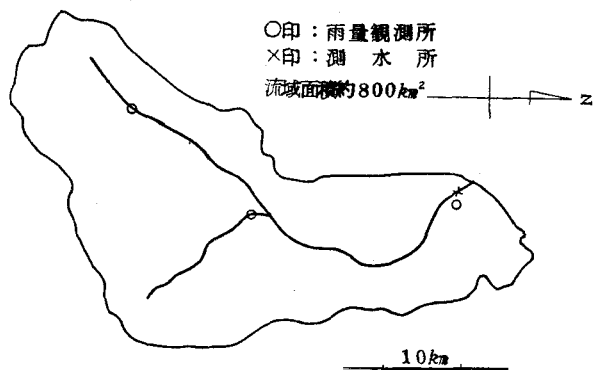


図-1 流域地形図

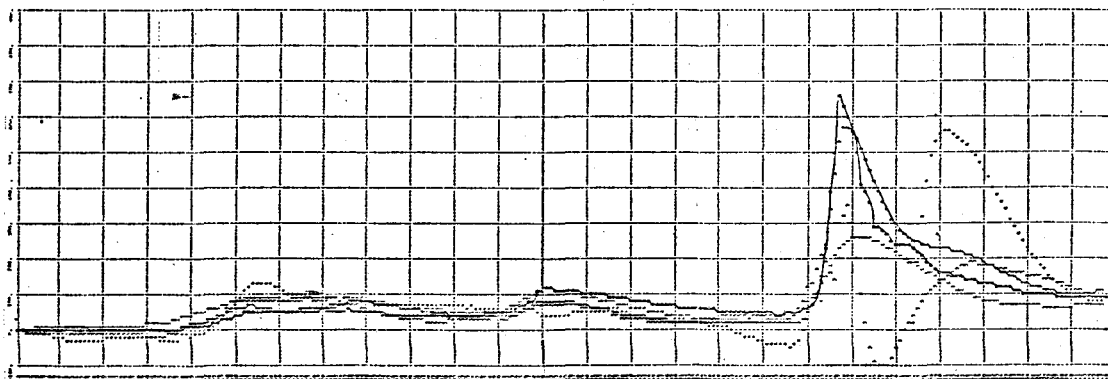


図-2 A年6月の係数($ND=2$, $STC=20$)で、A年10月出水を予測シミュレーション；縦軸：出水量(m^3 /秒)；横軸：時間(時)；D：実測データ(m^3 /秒)；1, 2, 3, 4：おのの, 1, 2, 3, 4次までのボルテラ級数によるシミュレーション結果。

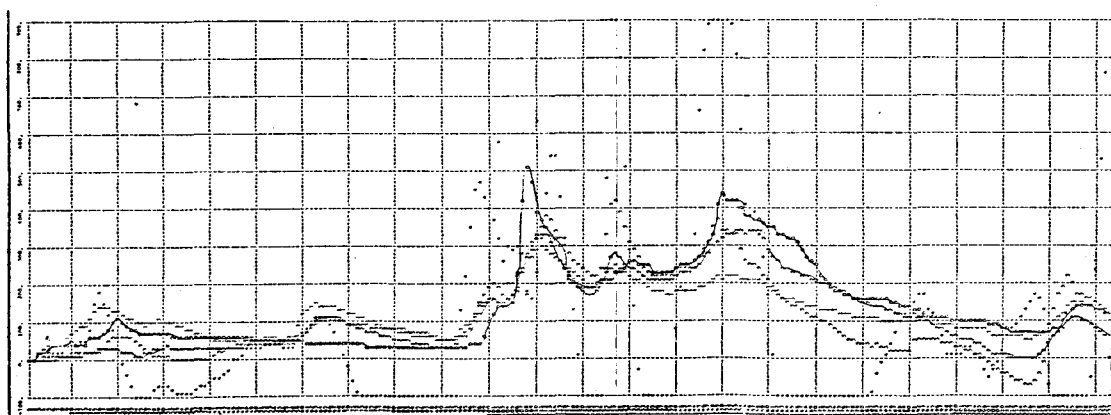


図-3 A年8月の係数($ND=2$, $STC=20$)で、B年7月出水を予測シミュレーション；縦軸：出水量(m^3 /秒)；横軸：時間(時)；D：実測データ(m^3 /秒)；1, 2, 3, 4：おのの, 1, 2, 3, 4次までのボルテラ級数によるシミュレーション結果。

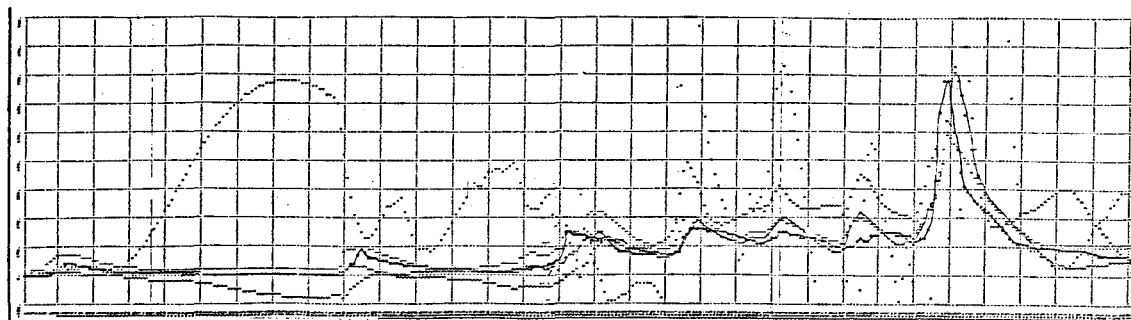


図-4 A年8月の係数($ND=2$, $STC=15$)で、C年8月出水を予測シミュレーション；縦軸：出水量(m^3 /秒)；横軸：時間(時)；D：実測データ(m^3 /秒)；1, 2, 3, 4：おのの, 1, 2, 3, 4次までのボルテラ級数によるシミュレーション結果。