

2 次の流出核の一計算手法について

東京工業大学 日野 幹雄
同 上 ○ 渡岡 和夫

I. 序 文

降雨-流出系における非線形性の問題は、水文現象の確率性や非定常性などの問題とともに、重要な課題であり、我が国の河川がおおむね強い非線形性を示すことから見ても、その機構の解明ということの持つ意義にはきわめて大きいものがある。非線形流出系の解析は、これまで、貯留関数法などに代表されるような Parametric Hydrology の他に、客観的な方法として、いわゆる Dynamic Hydrology と Stochastic Hydrology の2つの方向からなされている。流出現象の非線形性は、本質的には系の物理過程を支配する基礎方程式が非線形であることに起因しているので、現象の解明という点からは、前者の立場の方法論的な有効性が予想されるが、実際には、基礎方程式が非線形であるということ自体が解析上の大きな難点となし、また、流域系全体を包括的に理解することが困難であるという弱点もある。一方、最近になって、後者の立場から、Wiener の確率的非線形理論（直交汎関数展開法¹⁾）を応用する試みがいくつかなされるようになっており、非線形流出核を求めることにより、主として流出予測の面での予測精度の向上に成果を上げている。しかし、これらの試みは、およそ系を black box としてとらえており、その点、系の物理構造と流出の非線形性とを結びつけることが困難であるし、また、データに依存した方法であることから一般性に欠けるといふ難点もある。（なお、Volterra Series あるいは Wiener Series による非線形流出系のデータ解析法にはいくつかの方法があり、これについては前に論じた³⁾）

以上のように、これらの二つの立場にはそれぞれに長所・欠点があるが、筆者らは、かねてより、これらは統一されるべきものと考えている。そこで、ここでは、同じく Wiener の理論を用いてではあるが、全くの確率論的手法で系を black box と見立てて解析するのではなく、現象を支配する基礎方程式をもとにし、それとの関連から理論的に非線形核を導出する方法を提示することを試み、その途中結果を報告した。

II. 流出系への直交汎関数展開法の適用

1) 流出系のモデル

本論文で対象とする流出モデルは、以下に示すようなものである。

- a. 降雨変動は、定常確率過程でかつ正規ホワイトノイズとする。
- b. 降雨は、空間的に一様とする。
- c. 流出は、表面流出のみを考え、基礎方程式としては、次の2) に示すものを用いる。
- d. パラメータは、所与の定数であって、時間不変。
- e. 流域は、勾配一定の理想的流域を考える。

上記 a ~ e のうち、a, d は、直交汎関数展開法を適用するにあたって必要とされる条件である。（ただし、パラメータは、場所の関数であってもよいが、ここでは簡単のため空間的にも一定とした。）

2) 基礎方程式

流体運動の基礎方程式としては、連続式(1)と、運動方程式の代わりに抵抗則(2)を用いるものとする。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = I(t) \quad (1) \quad u = \alpha h^m \quad (2)$$

$$q = u h = \alpha h^{m+1} \quad (3)$$

ここに、 $h(x, t)$: 水深 $q(x, t)$: 単位幅当りの流量 $I(t)$: 降雨強度 $u(x, t)$: 平均流速
 α, m : パラメーター

式(3)は、次の形で書く方が一般性を持つ。

$$q = a h + b h^2 + c h^3 + \dots \quad (4)$$

従って、式(1), (4)を1つにまとめると次式となる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (a + 2 b h + 3 c h^2 + \dots) \frac{\partial h}{\partial x} = r(t) \quad (5)$$

※ ここでは、出力変数として水深 h をとっている。周知のように、実際の単位図法などによる予測の問題では出力変数に流量を用いているが、本論文では、そのような、practicalな面での取り扱い云々ではなく、流出系の非線形性自体の内部構造を問題にしているので、どちらを出力変数にとるかということは、2 次的な問題にすぎない。そこで、ここでは、実際の解析上での簡便さから比較して、水深 h にとった方が、式がやや簡単な形になるということから、出力変数として水深 h を採用した。

3) 核関数に関する関係式の導出

まず、入力 $r(t)$ を次のようにおく。

$$r(t) = \bar{R} + R(t) \quad (6)$$

ここで、 $\bar{R}$ 、 $R(t)$ は式(7)(8)の様な性質を持つ変数である。

$$E[r(t)] = \bar{R} \quad (7) \quad E[R(t_1)R(t_2)] = k \delta(t_1 - t_2) \quad (8)$$

($\bar{R}$ 、 $R(t)$ は、必ずしも $\bar{R} > R(t)$ であることを要しない。)

一方、出力 $h(x, t)$ は、入力 $r(t)$ に応じて定常な確率変数となるが、それを直交汎関数展開表示すると、

$$h(x, t) = K_0(x) + \int_{-\infty}^t K_1(x; t - \sigma) R_1(\sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_2(x; t - \sigma_1, t - \sigma_2) R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \dots \quad (9)$$

ここに、 $K_0, K_1, K_2, \dots$: 非確率的核関数で、特に次の性質がある。

$$K_0(x) = E[h(x, t)] \quad (10) \quad K_1(x; t_1, t_2) = K_2(x; t_2, t_1) \text{ [対称性]} \quad (11)$$

$R_1, R_2, \dots$; 式(12)で定義される、確率変数の Hermite 多項式表示で、式(13)に示すような直交性を有する。

$$\left\{ \begin{aligned} R_0 &= 1, R_1(t) = R(t), R_2(t_1, t_2) = R_1(t_1)R_2(t_2) - k \delta(t_1 - t_2) \\ R_3(t_1, t_2, t_3) &= R_1(t_1)R_1(t_2)R_1(t_3) - k R_1(t_1) \delta(t_2 - t_3) - k R_1(t_2) \delta(t_1 - t_3) \\ &\quad - k R_1(t_3) \delta(t_1 - t_2) \\ R_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= R_1(t_1)R_1(t_2)R_1(t_3)R_1(t_4) - k \sum R_1(t_i)R_1(t_j) \delta(t_k - t_l) \\ &\quad + k^2 \sum \delta(t_i - t_j) \delta(t_k - t_l) \\ E[R_m \cdot R_n] &= 0 \quad ; m \neq n \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right. \quad (12) \quad (13)$$

式(12)で、summation Σ は、 i, j, k, l の全ての組み合わせのうち、互いに他と異なる項を生成するものの全ての和を意味する。

次に、抵抗則(4)は第2項までとるものとし、式(9)を2次の項までで打ち切り式(5)に代入する。そして式(13)の関係を利用して整理すると、式(14)~(16)に示すような、核関数 K_0, K_1, K_2 を決定する連立微積分方程式を得る。

$$\left\{ \begin{aligned} &[a + 2 b K_0(x)] \frac{d}{dx} K_0(x) + b k \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x; t - \tau)\}^2 d\tau + 2 b k^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_2(x; t - \tau_1, t - \tau_2)\}^2 d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{R} \quad (14) \\
&K_1(x; 0) \delta(t-\tau) + \frac{\partial K_1(x; t-\tau)}{\partial t} + a \frac{\partial K_1(x; t-\tau)}{\partial x} + 2b \frac{\partial}{\partial x} \{K_d(x) K_1(x; t-\tau)\} \\
&\quad + 4bk \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x; t-\tau) K_2(x; t-\tau, t-\sigma)\} d\sigma = \delta(t-\tau) \quad (15) \\
&K_2(x; 0, t-\tau_2) \delta(t-\tau_1) + K_2(x; t-\tau_1, 0) \delta(t-\tau_2) + \frac{\partial K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial t} \\
&\quad + a \frac{\partial K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial x} + 2b \frac{\partial}{\partial x} \{K_d(x) K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2)\} + b \frac{\partial}{\partial x} \{K_1(x; t-\tau_1) \\
&\quad K_1(x; t-\tau_2)\} + 4bk \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \{K_2(x; t-\sigma, t-\tau_1) K_2(x; t-\sigma, t-\tau_2)\} d\sigma = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

式(14)~(16)によれば以下のようなことが分かる。

- 1) 核の決定に関連してくるパラメーターは、抵抗則の中のパラメーター a , b と、入力 $R(t)$ の有する情報 $\bar{R}$, k 値とである。(ここで、 k 値は、式(8)の定義を見ても分かるように、 $k = \int_{-\infty}^{\infty} E[R(t)R(t-\sigma)] d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} C_{ii}(\sigma) d\sigma$ であり、従ってそれは、 $R(t)$ の変動レベルの大きさを表わしている。) 従って、応答核を、その流域の特性のみによって決定されるものとするのは問題があると言える。
- 2) 非線形性を有する系での各次の応答核は、それぞれ独立に決定されず、互いに他との連関を持っている。換言すれば、各次の応答核間には interaction が存在する。しかし、線形の場合には、これらの interaction はなくなり、 K_0 , K_1 は独立に決定される。

III. 流出核の具体的算定

前節で導出した、式(14)~(16)は、非線形の連立微積分方程式であり、これを、何らの近似も行わずに解くことは困難で、最終的には電子計算機による数値解に頼らざるを得ない。しかし、直接、数値的に解くには、式(15)(16)が 0 関数を含んでいることから問題がある。筆者らは、その点を避ける一方法として、式(14)~(16)を周波数空間に写像して解く方法を既に提示している。⁴⁾ 本論文では、その方法の欠点を補い(後述)、また、先に述べた問題点を避け得る別の方法として、Galerkin 法によって解く方法を示した。

なお、ここで得られる数値解は、個々のケースに対する普通の意味の数値解でなく、現象についての一般解であるということを強調しておく。

1) Galerkin 法の適用

流出核を次のように展開表示する。

$$\begin{cases} K_1(x; t-\tau) = \sum_n W_n(x) \Psi_n(t-\tau) \\ K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} Z_{n_1, n_2}(x) \Psi_{n_1}(t-\tau_1) \Psi_{n_2}(t-\tau_2) \end{cases} \quad (17)$$

ここに、

$$\Psi_n(t-\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}(t-\tau)\right) L_n(t-\tau) \quad L_n; \text{Laguerre 多項式} \quad (18)$$

ここで、直交関数系として Laguerre 多項式を用いたのは、この関数が $(0, \infty)$ において定義されていてさらに、 $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束する性質をもっていることによる。 $\Psi_n(t-\tau)$ は、次のような直交関係を満たす。

$$\int_{-\infty}^t \Psi_m(t-\tau) \Psi_n(t-\tau) d\tau = \delta_{n, m} \quad (19)$$

式(17)を式(14)~(16)に代入し、式(19)の関係を用いて整理すると次式を得る。

$$\begin{cases} \{a + 2bK_0(x)\} \frac{d}{dx} K_0(x) + bk \sum_i \frac{d}{dx} \{W_i(x)\}^2 + 2bk^2 \sum_{i_1, i_2} \frac{d}{dx} \{Z_{i_1, i_2}(x)\}^2 = \bar{R} \\ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} W_i(x) - \sum_{i=n+1}^{\infty} W_i(x) \right\} + \{a + 2bK_0(x)\} \frac{d}{dx} W_n(x) + 2bW_n(x) \frac{d}{dx} K_d(x) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 & + 4bk \sum_i \frac{d}{dx} \{W_i(x) Z_{n,i}(x)\} = \frac{1}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (21) \\
 & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{n_2-1} Z_{n_1, i}(x) - \sum_{i=n_2+1}^{\infty} Z_{n_1, i}(x) + \sum_{i=0}^{n_1-1} Z_{i, n_2}(x) - \sum_{i=n_1+1}^{\infty} Z_{i, n_2}(x) \right\} + \{a + 2bk(x)\} \frac{d}{dx} Z_{n_1, n_2}(x) \\
 & + 2b Z_{n_1, n_2}(x) \frac{d}{dx} K_0(x) + b \frac{d}{dx} \{W_{n_1}(x) W_{n_2}(x)\} + 4bk \sum_i \frac{x}{dx} \{Z_{n_1, n_1}(x) Z_{n_1, n_2}(x)\} = 0 \\
 & (n_1, n_2=0, 1, 2, \dots) \quad (22)
 \end{aligned}$$

以上の手続きにより、式(14)~(16)は、 x を独立変数とする連立常微分方程式(20)~(22)に帰着された。

2) Runge-Kutta-Gill法による数値積分

式(20)~(22)は、非線形連立常微分方程式であるが、以下に示す手順によれば、Runge-Kutta-Gill法によって数値解を求めることが出来る。

式(21), (22)の方程式の数を有限な数($n, n_1, n_2 \leq m$)に打ち切り、マトリックス表示すると、

$$A(x) \frac{d}{dx} f(x) = B \cdot f(x) + d \quad (23)$$

ここに、

$A(x)$: (x) の値によって決まる係数マトリックス

B : 係数マトリックス

$$f(x) = \{K_0(x), W_0(x), \dots, W_m(x), Z_0(x), \dots, Z_{0,m}(x), Z_{1,1}(x), \dots, Z_{1,m}(x), \dots, Z_{m-1,m}(x), \dots, Z_{m,m}(x)\}^T \quad (24)$$

$$d = \left\{ \bar{R}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{m+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{1}{2}(m+1)(m+2)} \right\}^T \quad (25)$$

式(23)の両辺に左から $A^{-1}(x)$ をかけると、

$$\frac{d}{dx} f(x) = A^{-1}(x) (B \cdot f(x) + d) \quad (26)$$

となるから、 $A(x)$ の逆行列の計算を連動させることにより、上式は、Runge-Kutta-Gill法によって数値積分ができて、 $f(x)$ が求まることになる。fig-1に、計算を行うときの大きなフローチャートを示す。

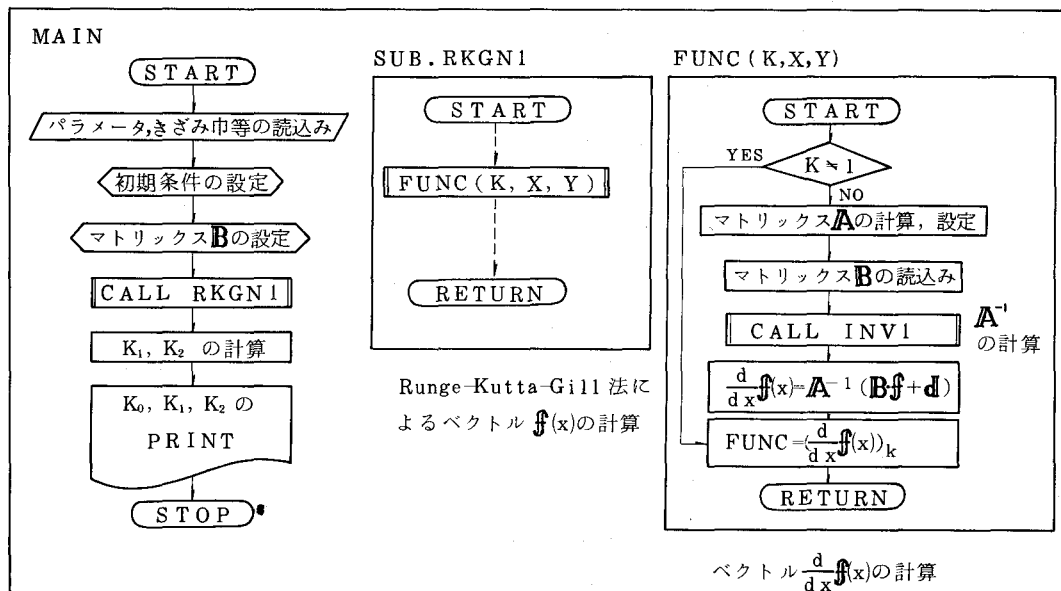


fig. 1 フローチャート

3) 計算例

fig.2, 3に、数値計算の途中結果の一例を示す。ここで、 a 、 b の値は、Manningの平均流速公式でいえば、およそ、 $n=1.5$ 、 $I=1/10$ に対応するようなものを用いている。また、初期条件としては、上流端で水深がゼロ、すなわち、次式で示されるものを用いた。

$$\mathbf{f}(x) = \{0, \dots, 0, \dots, 0\}^T \quad (\text{at } x=0) \quad (27)$$

IV 結 語

本論文で示した方法により、流出系の基礎方程式から理論的に非線形核を導出々来ることが分った。ここで用いたWienerの確率的非線形理論は、既に、乱流の解析にも適用されているが、そこではあまり良い結果が得られていない。それは、流出の問題では2次までの非線形項をとればよいのに比べ、乱流では、energy cascadeを表わすために項数を多くとらねばならないからである。また、式(14)~(16)をGalerkin法によって解く方法は、計算速度、解の発散性、記憶容量等の点で前に報告した方法⁴⁾より有利であると思われる。

fig.2 線形核 (K_1)

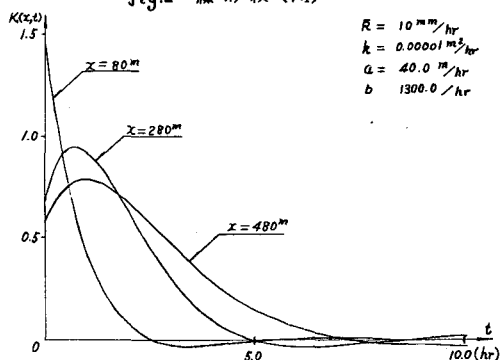
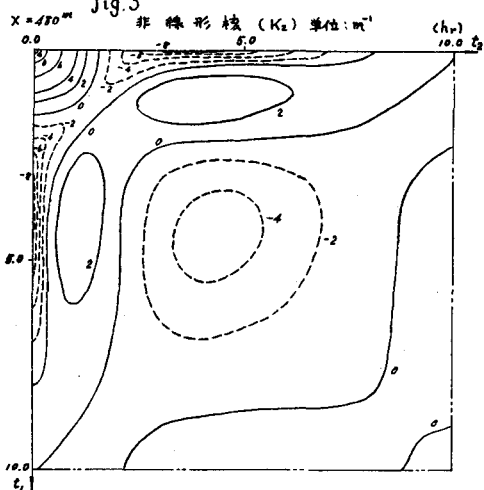


fig.3



—参考文献—

- 1) Wiener, N (1958): Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Press
- 2) 吉川秀夫・日野幹雄・鋤柄徹 (1970): 降雨-流出系における非線形予測の研究, 東京工業大学土木工学科研究報告, №8, p 97 ~ 104
- 3) 日野幹雄 (1975): 非線形流出解析および適応予測, 水工学シリーズ 75-A-8
- 4) 日野・砂田・灘岡 (1976): 非線形流出系の理論解析について, 第20回水理講演会論文集