

重回帰モデルによる非線形降雨流出の解析

農林省農業土木試験場

白石英彦

正員 大西亮一

伊藤喜一

I 序 論

近年になって水資源の合理的な利用計画の必要性がさげられ、農業水利計画においても還元水の利用（反復利用）を加えた広域水利計画の立案と、合理的な水管理方法の確立が性急な課題となっている。筆者らは、この問題に対して、システム解析の手法を導入する研究を進めている。

我が国において、非線形降雨流出の解析に、高次のモーメント項を含む応答関数を用いる方法が、吉川・日野・鋤柄⁷⁾によって提案されて以来、四ヶ所・田中・戸原と筆者ら³⁾によって同様の解析結果が報告された。これらの結果は、高次のモーメント項を含むWiener表示の積分方程式の解き方と、降雨流出の解析への適用方法を論じたものである。しかし、流出核の物理的な意味や適用限界については、ほとんど論じられていない。筆者らは、この問題に対して重回帰分析を用いる場合の種々の問題点について検討した。重回帰分析では、2次の項を含む場合には直接偏回帰係数（流出核にあたる）を求めることができない。このために、奥野⁴⁾らは2次の説明変数には平均からの差を用いて説明変数間の独立性を確保しようとしている。この考えを筆者らは流出解析に適用してみた。一方、筆者らは、まず線形解析を行い、つづいて残差を2次の項で説明する方法を提案している。本論文では、日野・砂田の流出核のわかっている模擬データを用いて検討した結果を報告する。

つぎに、筆者らの方法では、まず線形解析を行うので、その適用限界が問題となる。そこで、重回帰分析の手法を用いて線形解析の適用限界を示し、解析方法の改良をはかったので、その結果もあわせて報告する。

II 解析方法

1. 基礎式

降雨流出は流域をブラックボックスと考えると、入力〔降雨量 $x(t) \{=A \cdot R_r(t)\}$ 〕と出力〔河川流量 $y(t)$ 〕の応答関数として表示できる。入力～出力の応答関数をWienerの一般的な表示で表すと次のようになる。⁶⁾

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t-\tau_i) \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2 \cdot \dots \cdot d\tau_n \quad (1)$$

ここに、 A ：流域面積、 $R_r(t)$ ：降雨強度、 h_n ： n 次の流出核である。(1)式の2項までとれば次式となる。

$$y(t) = h_0 + \int_{-\infty}^t h_1(\tau_1) \cdot x(t-\tau_1) \cdot d\tau_1 + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t h_2(\tau_1, \tau_2) \cdot x(t-\tau_1) \cdot x(t-\tau_2) \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2 \quad (2)$$

降雨流出の解析は(2)式の流出核 $h_1(\tau_1)$ 、 $h_2(\tau_1, \tau_2)$ を多くの実測のデータから決定することである。この流出核が求められれば、降雨量から河川流量を予測することができる。

2. 重回帰モデルによる解法

a 重回帰モデルの作成

(2)式の積分方程式の解法の一つとして重回帰分析がある。(2)式を重回帰モデルで示せば次のようになる。

$$y(t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p_1} \beta_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{p_2} \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \epsilon \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 β_i : 線形偏回帰係数、 α_{ij} : 2 次の偏回帰係数、 $x_i = x\{t - (i-1) \cdot \Delta t\}$ 、 ϵ : 誤差である。偏回帰係数 β_i, α_{ij} の最良不偏推定値を b_i, a_{ij} とすれば、推定流量 $Y(t)$ は次式となる。

$$Y(t) = b_0 + \sum_{i=1}^{p_1} b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{p_2} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \quad \dots\dots\dots (4)$$

(4)式における偏回帰係数 b_i, a_{ij} は(2)式の流出核 $h_1(\tau_1), h_2(\tau_1, \tau_2)$ に相当する。 b_i, a_{ij} の計算は理論的には残差 e の2乗和を Q として

$$Q = \sum_{t=1}^n e^2 = \sum_{t=1}^n \{y(t) - Y(t)\}^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

として $\partial Q / \partial b_0 = 0, \partial Q / \partial b_1 = 0, \dots\dots$ 、として正規方程式をつくり、マトリックスの掃出し法で計算すればよい。筆者はこれを直接法とよぶ。しかしながら、この場合は次の2点が問題となる。⁴⁾ その1は、2次の項は直接解析できないので、 $Z_{ij} = x_i \cdot x_j$ のように別の変数として用いなければならない。また、その2は、1次の説明変数 x_i と2次の説明変数 Z_{ij} の間に高い相関があるために、線形解析のみで求めた線形偏回帰係数と、線形と2次の項を一諸にして求めた線形偏回帰係数とが一致せず解析できない。この2点の問題は数学的に明らかとなっているので、この解法には奥野らの方法と、筆者らの方法とがある。

b 奥野らの方法⁴⁾

奥野らの方法は、2次の項を含む重回帰分析を行う場合には、(3)式の代りに次のように重回帰モデルを作成する。

$$y(t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{p_1} \beta_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{p_2} \alpha'_{ij} \cdot Z'_{ij} + \epsilon \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $Z'_{ij} = (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})$ である。 β_i, α'_{ij} の最良不偏推定値を b_i, a'_{ij} とすれば推定流量 $Y(t)$ は次式となる。

$$Y(t) = b_0 + \sum_{i=1}^{p_1} b_i \cdot x_i + \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{p_2} a'_{ij} \cdot Z'_{ij} \quad \dots\dots\dots (7)$$

b_i, a'_{ij} の計算は(5)式と同様に残差 e の2乗和 Q を最小にするように決定すればよい。

c 筆者らの方法³⁾

筆者らはまず線形モデルとして次のようにする。

$$y(t) = \beta_{01} + \sum_{i=1}^{p_1} \beta_i \cdot x_i + \epsilon_1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

β_{01}, β_i の最小2乗推定値を b_{01}, b_i とすれば線形推定流量 $Y_1(t)$ は次式となる。

$$Y_1(t) = b_{01} + \sum_{i=1}^{p_1} b_i \cdot x_i \quad \dots\dots\dots (9)$$

次に2次の項は、実測値と線形推定流量 $Y_1(t)$ の残差 e_1 を説明するように2次の回帰モデルを次のようにする。

$$\begin{aligned} e_1(t) &= y(t) - Y_1(t) \\ &= \beta_{02} + \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{p_2} \alpha_{ij} \cdot Z_{ij} + \epsilon_2 \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

β_{02}, α_{ij} の最小 2 乗推定値を b_{02}, a_{ij} とすれば 2 次の推定流量 $Y_2(t)$ は次式となる。

$$Y_2(t) = b_{02} + \sum_{i=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{p_2} a_{ij} \cdot Z_{ij} \quad \dots\dots\dots (11)$$

よって(4)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_1(t) + Y_2(t) \quad \dots\dots\dots (12) \\ b_0 &= b_{01} + b_{02} \end{aligned}$$

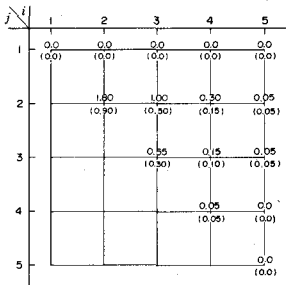


Fig. 1 モデルの 2 次の流出核
{|} () は非線形性が弱い場合{|}

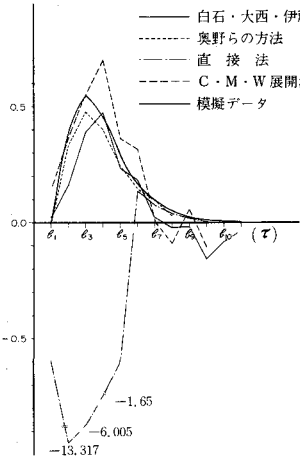


Fig. 2(a) 線形流出核
(非線形性が強い場合)

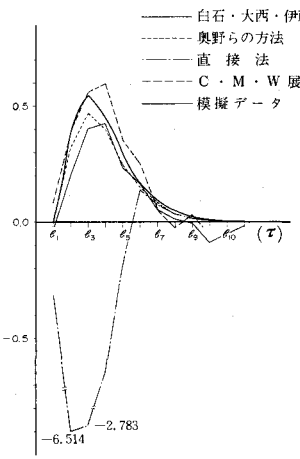


Fig. 2(b) 線形流出核
(非線形性が弱い場合)

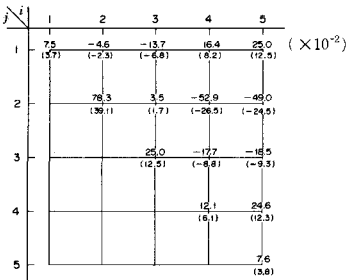


Fig. 3 筆者らの方法による 2 次の
偏回帰係数
{|} () は非線形性が弱い場合{|}

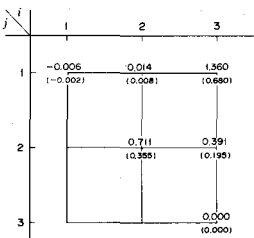


Fig. 4 奥野らの方法による 2 次の
偏回帰係数
{|} () は非線形性が弱い場合{|}

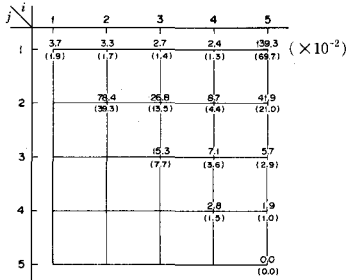


Fig. 5 直接法による 2 次の
偏回帰係数
{|} () は非線形性が弱い場合{|}

III 模擬データを用いた解析方法の検討

1. 模擬データ

模擬河川流量データは、次式を用いて作成する。

$$\begin{aligned} y(t) &= \bar{y} + \sum_{\tau=0}^{LAG1} K_1(\tau_1) \cdot x(t - \tau_1) \\ &+ \sum_{\tau_1=0}^{LAG2} \sum_{\tau_2=0}^{LAG2} K_2(\tau_1, \tau_2) \cdot x(t - \tau_1) \cdot x(t - \tau_2) - K \sum_{\tau_2=0}^{LAG2} K_2(\tau_2, \tau_2) \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

x は正規乱数の絶対値, $LAG1 = 10$ 日, $LAG2 = 5$ 日を, $K_1(\tau_1) = \tau_1^2 e^{-\tau_1}$, $K_2(\tau_1, \tau_2)$ は Fig.1 を用いた。

2. 解析結果

線形流出核と 2 次の流出核を Fig.2 ~ Fig.5 に示す。しかし, 日野・砂田のデータと, 筆者らの解析に少し差があるので, 絶対比較することができないが傾向を比較することができる。また, 比較のために日野・砂田が求めた O·M·W 展開法の結果を示す。予測値を Fig.6 に示す。直接法は模擬データとまったく異なるので, ここでは省略した。

3. 考察

線形偏回帰係数を見ると, 直接法では b_5 までがとんでもない値となっている。これは, 2 次の時間遅れが 5 であることを考えれば, 1 次と 2 次の項が相関が高い影響と考えられる。奥野らの方法と筆者らの方法は, 線形偏回帰係数では傾向をよく示している。

予測値についてみると, 奥野らの方法より筆者らの方法の方が模擬データに近い。この原因は不明であるが, 計算誤差と説明変数が多くなるためではないかと考えている。筆者らの方法で, 2 次の偏回帰係数に負の値がでるが, この原因は不明である。これについては何んらかのフィルターが必要ではないかと考えている。

IV 河川の流出解析

1. 解析データ

河川の流出解析は, 阿武隈川の支川で赤岩地点の河川流量 (流域面積 61.0 km^2) と平野の降雨データを用いた。データは, 昭和 39 年 ~ 42 年の 4 年間を用いた。

2. 規定降雨 ($F \cdot M \cdot R = \text{fixed maximum rain-fall}$) と

規定流量 ($F \cdot M \cdot D = \text{fixed maximum discharge}$)

(8) 式の重回帰モデルが偏回帰係数 B_i の最小 2 乗推定値 b_i を求める場合に, ある降雨量 R_F の値以下の降雨のみを用いることにすると, この R_F を規定降雨とよぶ。また, ある河川流量 Y_F 以下の河川流量のみを用いる場合の Y_F を規定流量とよぶ。

3. 解析誤差の評価

降雨流出の解析誤差は重回帰分析で用いられる重相関係数 R と分散比 F を用いて評価する。まず, 重相関係数は次のようになる。

$$R = \frac{\sum_{t=1}^n \{y(t) - \bar{y}\} \cdot \{Y(t) - \bar{Y}\}}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \{y(t) - \bar{y}\}^2 \cdot \sum_{t=1}^n \{Y(t) - \bar{Y}\}^2}} \quad \dots\dots\dots (14)$$

分散比 F は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{V_R}{V_E} \\ V_R &= \frac{1}{k} \sum_{t=1}^n \{Y(t) - \bar{Y}\}^2 \\ V_E &= \frac{1}{n-k-1} \sum_{t=1}^n \{y(t) - Y(t)\}^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに, $\bar{y}$: 河川流量の平均値, $\bar{Y}$: 推定流量の平均値である。

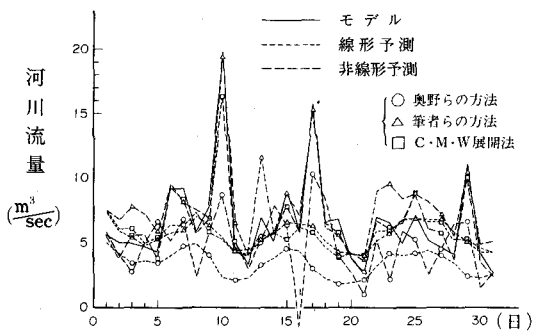


Fig. 6 (a) 模擬データと推定値の比較
(非線形性が強い場合)

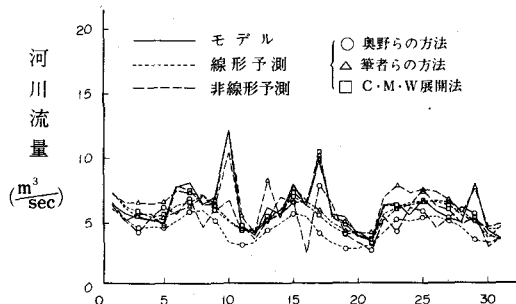


Fig. 6 (b) 模擬データと推定値の比較
(非線形性が弱い場合)

4. 解析結果

阿武隈川の解析結果として、Fig 7 ~ Fig 11 に示す。Fig 7 ~ Fig 8 の結果から、 $F \cdot M \cdot R$ と $F \cdot M \cdot D$ を変化させた場合の流出特性の変化がよくわかる。次に、Fig 8 の $F \cdot M \cdot D$ の変化に対する流出予測に対する重相関係数と分散比 F が最大となる値を Fig 9 から見ると、 $F \cdot M \cdot D$ が $30 \text{ m}^3/\text{sec}$ に当る。この値を筆者らは線形解析の限界と考え、 $F \cdot M \cdot D$ $30 \text{ m}^3/\text{sec}$ に対する偏回帰係数を線形の流出核とする。次に、この線形偏回帰係数を用いて求めた線形推定値との誤差から、2次の偏回帰係数を求めたものが Fig 10 である。実測値と推定値を Fig 11 に示す。

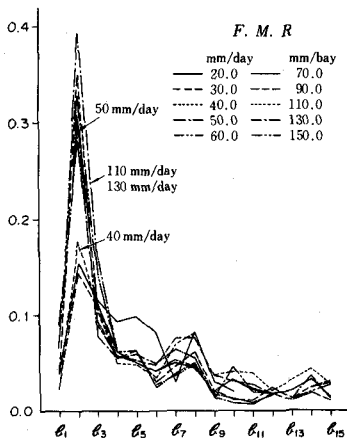


Fig. 7 線形偏回帰係数
($F \cdot M \cdot R$ の変化)

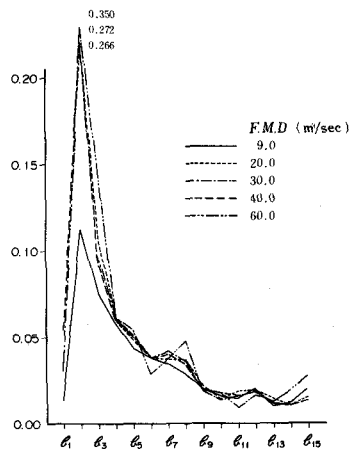


Fig. 8 線形偏回帰係数
($F \cdot M \cdot D$ の変化)

5. 考察

阿武隈川の解析結果を示したが、他の地区の流出解析でも同様な結果を得ることができた。いま、 $F \cdot M \cdot R$ と $F \cdot M \cdot D$ の変化に対する流出特性の変化に対して、線形偏回帰係数 Fig 7, 8 のように変化する。これが、降雨流出の非線形性を表わしているものとする。これらの結果から、最良の線形偏回帰係数として $F \cdot M \cdot D$ が $30 \text{ m}^3/\text{sec}$ に対す

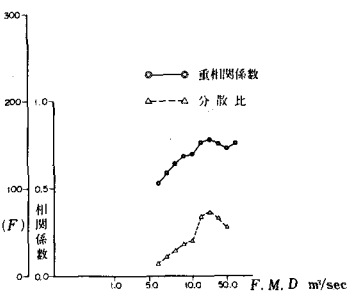


Fig. 9 重相関係数

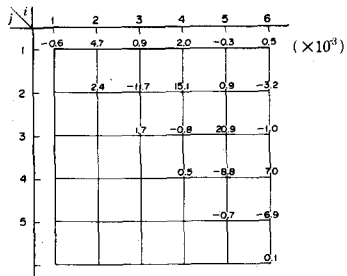


Fig. 10 2次の偏回帰係数

る値を与えたが、果たして線形流出の限界であろうかという疑問が生ずる。そこで、模擬データに対する検討をした結果、Fig 12 に示す値が得られた。（モデルの1次と2次の偏回帰係数はすべて正）この結果では、Fig 9 とは異なり、重相関係数とF値のピークは始めにくる。このため筆者らは、降雨流出は、初期には地面の状態等により非線形流出を示し、ある降雨付近から線形流出となり、次に降雨強度が強くなって地表流出等が生ずると非線形流出となるのではないかと考えられる。このために、 $F \cdot M \cdot D$ を用いて重相関係数が最大となる値を線形降雨流出の1つの限界値と考えられる。

V 結 論

重回帰分析を用いた解析では直接法は使用できない。また奥野の方法は、いま一步検討を要する。筆者らの方法が有効である。しかし、2次の偏回帰係数については、いま少し検討を要する。

次に、実際の降雨流出の解析には、 $F \cdot M \cdot D$ と重相関係数を用いる方法が有効である。

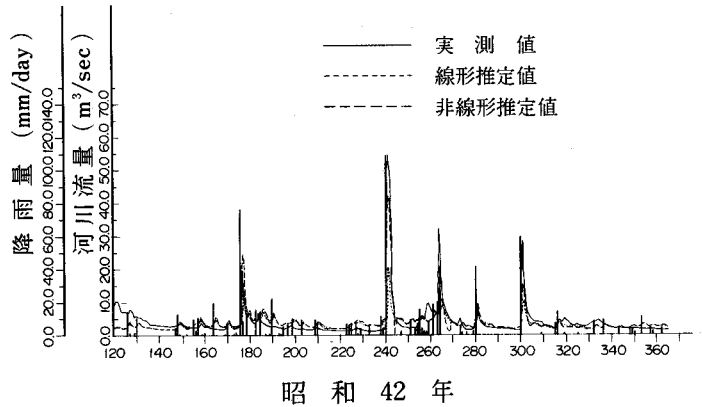


Fig. 11 実測値と推定値の比較

謝 辞

本研究は土木学会、確率統計水文学研究小委員会（委員長 東工大 日野幹雄教授）の活動の一環として行ったもので、日野教授を始め委員の方々から有益な討議と御指導を賜った。また、解析には農林省の各調査事務所が収集された貴重なデータを用いた。ここに、深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 吉川・日野・鋤柄(1971)「 $C \cdot M \cdot W$ 展開法による非線形流出の解析」 第15回水理講演会講演集 P.55~60
- 2) 四ヶ所・田中・戸原(1974)「非線形システムモデルによる流出解析」 農土論集, 50 P.20~23
- 3) 白石・大西・伊藤(1976)「重回帰式による非線形降雨流出の解析法—重回帰式による水系解析の方法(I)—」 農土論集, 63 P.43~49
- 4) 奥野・久米・芳賀・吉沢(1971)「多変量解析法」 日科技連 P.152~157
- 5) 日野・砂田(1976)「統計確率水文学研究小委員会資料」
- 6) 日野幹雄(1972)「水理学・水文学におけるシステム解析」 水工シリーズ, 72-A-3 土木学会
- 7) 農林水産技術会議事務局(1968)「農林水産試験研究のための統計的方法」 農林統計協会 P.291

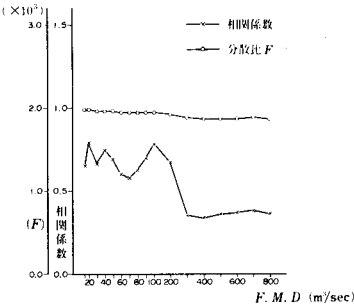


Fig. 12 重相関係数とF値