利水用貯水池の取水機能の信頼性評価に関するマルコフ連鎖理論の応用

名古屋工業大学　正会員　長尾正志

1. 貯水池機能の評価に関する研究動向と本研究のねらい

水資源の高率運用に対して、現段階で最も確実な技術手法は貯水池であり、将来もこの優位は変わらないであろう。しかもダムサイト適地は益々減少してくるであろうし、水没地住民の反対などにより、新規開発は益々困難の度を高めると考えられる。したがって、自然湖沼の利用をも含めて、現有貯水池への期待は増すことはあっても減ずることはあるまい。しかし、51年9月の台風17号に伴う長雨に対して各地のダムで経験されたように、わが国のような限られた容量の貯水池に過度の期待を持つことも妥当ではない。そこで、貯水池のもつ利水機能に関する有効・適切な評価法を確立すること、およびその成果として利水機能の最大限の発揮が強く要請されている。以下、こうした面からの最近の研究動向を概観してみる。

1. 1　最近の研究動向

理論的解析法と数値実験的手法に大別して記述する。

a．理論的解析法

貯水池による利水機能の評価は、旧くはいわゆる mass curve analysis に始まるといえる。[1] しかし、この当初の目的は、貯水池建設のための設定容量の既往流入量資料に対する安全・危険の判別であり、累加流入量・累加需要量の両曲線の間の max range を選定するもので、将来に対する安全の度合の評価とは云い難い。この手法は、既往流量資料より確率分布特性を抽出・適用という形で Hazen の確率的評価に継承された。[2]

この古典的解法は、近年になり待ち行列理論や在庫問題といった数学的手段の活用により一層の発展を遂げた。その先駆的業績はMoranに負う所が大で、[3),4] 以後、貯水池の利水機能の数学的表式化がかなり厳密な形で可能になったと言える。

彼の研究は在庫問題による流量時系列の離散的取扱いより始まり、連続量としての解析にまで及んでいる。[5] その成果は、Prabhu[6]、Majumdar[7] などに受け継がれ、より精緻な理論体系を構成しつつある。ところで、この場合、貯水池系への入力である流入量時系列には定常独立が前提であった。

一方、待ち行列理論の貯水池問題への応用はLangbein[8]に始まるといわれ、彼はprobability rooting といわれる手法で、貯水量方程式の数値的解法を示した。その後 Fiering[9]らによって後述するsimulation への道が開かれることになる。最近では、Takács[10]により、Ballot theorem（投票定理）の応用として、最大貯水量の分布や再帰時間分布などの有用な性質が導出されているが、入力には相互交換可能なランダム変数の仮定を要する。

このように、上記の理論はいずれも流入量時系列の独立性が前提であった。そこで、マルコフ従属として自己相関性の導入を試みた研究がPrabhu[11], Lloyd[12], Gani[13),14] らによって続けられ、数学的にはかなりの程度にまで進展しているが、実際問題の適用には未だしの感が強い。

b．数値実験的手法

前述の数学者による理論的手法に対して、応用を重視する立場から統計的数値実験，いわゆる simulation technique ，が近年盛んになりつつある。対象は単数のみならず複数の貯水池系に及び、種々の流量時系列、貯水池容量、操作規則、目標放流量による影響が検討されている。

研究には二つの側面があり、一つは流量時系列のモデル化に関するもので、具体的には資料の統計的特性を利用した模擬発生手法の研究である。他方は流入より貯留を経て放流に至る貯水池の変換機能のモデル化である。いずれも電子計算機の演算能力に即応した莫大な programming という形を採ることが多い。

総合的にいうと、両者の特徴としては、理論解析には、かなり単純化の制約を伴うが、普遍性があるのに

比して、統計実験ではむしろ個別的な検討に有用性を発揮する。

最近では、両者はむしろ相い補うべきものとして併用が奨励されているが[15),16)]、現実には計算機の乱用ともいうべき傾向も強く、Moran が当初意図した貯水池利水機能解明への各種要因の関連性の解析的明確化が見失われ勝ちのように思える。そこで、この観点に立ち帰って考察すれば、現在莫大な数値シミュレーションを要したかなりの部分が理論解析で代行でき、それにはマルコフ連鎖理論が本質的な役割を果すことを季節性、予測の有無を考慮して具体的に示すことが、本研究の目的である。

1.2 取水機能の信頼性評価

以後の説明の便宜上、利水用貯水池のシステムとしての表現とその信頼性評価の目標を述べる。

a．利水用貯水池のシステム概念

ごく概括的に利水用の貯水池を1つのシステムと考えると、それは図1.2－1のように表現できる。

すなわち、入力は流入量、直接出力は取水量で、通常両者は流量の形で計量される。システムの変換機能は、流水制御施設に対応し、直接出力と併行して、貯水量という形で間接的な出力を発生する。以上が一般に貯水池操作といわれるものであるが、この変換作用に影響を与える主な環境要因は、有効貯水容量、操作規則、目標取水量である。

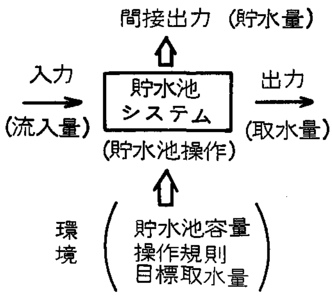

図1.2－1　利水用貯水池のシステム概念

以上の概念を、既設の利水用貯水池の操作方針としてブロック図に表現したものが、図1.2－2である。図中破線は、省略される場合もあるが理想的には必要な手順を示す。

すなわち、この場合の入力情報は流入量であるが、それは降水量さらにその根元となる気象原因にまで遡る。一方、その時点までの水需要に対する需要予測を通じて操作規則、目標取水量が設定され、これが既設の貯水池容量と共に貯水池操作を規定する。操作結果として取水量と貯水量が時々刻々に選ばれることになる。

この際、貯水量には貯水可能か否かの判定が要求され、不可なら無効放流が不可避となる。取水量については目標値の充足、あるいはそれが無理ならば目標に最も近いかどうかが判定材料となり、これらの総合として取水量が決定される。もちろん、現実の取水量が目標値を必ず充足するわけではないから、その充足の度合、信頼性、が評価され、このような出力情報が、操作規則、目標取水量の再検討という形でfeed－backして活用されることになる。

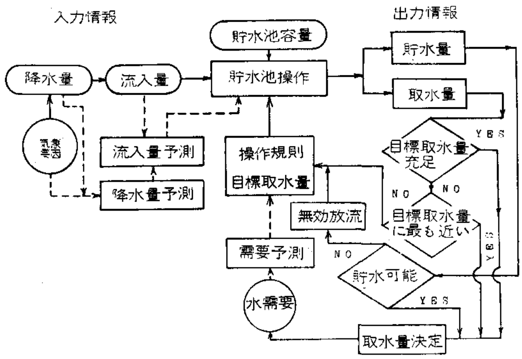

図1.2－2　利水用貯水池の操作方針のブロック図

b．信頼性評価の目標

さて、取水量の信頼性評価には、現実問題として2つの目標が考えられる。詳細は後述するとし、相違の概要を説明しておく。

ⅰ）年間定常操作

経年平均的な意味で、年間での貯水池取水量の信頼性評価、および合理的な取水操作方法の設定問題である。数学的な表現をすれば、これには取水量時系列の定常分布が重要な役割を果す。

ⅱ）異常渇水時操作

水不足の事態が発生し将来さらに深刻になることが予想された場合に、将来のある時点での水供給の可能性評価および渇水被害を最小限に抑制するための操作方法の選定を考える問題である。数学的には、初期状態が既知の場合の取水量系列の過渡状態の分布特性が重要となる。

2. 取水機能の確率在庫モデルによる表現

2.1 モデル化に先行する単純化

すでに、1.1で述べたように、現在の理論的解析の手法は貯水量系列を確率的変動を伴う入力を受ける在庫モデルに定式化することに始まる。しかも理論が実用化しうるのは、入力時系列が定常かつ独立の場合である。もちろん、現実の流入量時系列では、この仮定が成立つとは限らないから、このためのデータ処理法が問題となる。これについては若干の考察を行なってきたのでその見解を要約しておく。

2.1.1 流量時系列の定常化・独立化

i）定常化と季節分割[17)]

まず定常化を考えると、その季節内では流量時系列が同一の確率分布とみなせるように、1年間を幾つかの季節区間に分割する必要がある。もちろん、季節分岐点は絶対的に確定するものではなく、年間相対的なものであろう。これには定説はないであろうが、一方法として、水文量は1年周期が卓越することから、流量時系列を年間移動平均（月流量なら12カ月移動平均）したものと原時系列との交切時点の経年平均が重要な目安になると考えている。

ii）独立系列化と単位期間[18)]

独立化は理論的解析に必ずしも不可欠ではないが、実用的な演算を進める上で、止むを得ない条件と考えられる。

一般に時刻 t における流量を x(t) と記すと、t 以前の T 期間にわたる総流量 $X_T(t)$ は、離散的な変量として次式で表現される。

$$X_T(t)=\int_{t-T}^{t} x(s)ds, \quad (t=0, \pm T, \pm 2T, \cdots) \qquad (2.1-1)$$

ここで、総流量時系列が独立であるとは、その自己相関係数

$$\rho_T(\tau)=\frac{E\{X_T(t)\cdot X_T(t+\tau)\}-E\{X_T(t)\}\cdot E\{X_T(t+\tau)\}}{\sqrt{E\{X_T^2(t)\}-E^2\{X_T(t)\}}\sqrt{E\{X_T^2(t+\tau)\}-E^2\{X_T(t+\tau)\}}} \qquad (2.1-2)$$

が、$\tau=T, 2T, \cdots$ に対して、$\rho_T(\tau)\ll 1$ とみなせることである。

ところで、Tを小さくすると、たとえば最小ずれ $\tau=T$ に対して、$X_T(t+\tau)$ は限りなく $X_T(t)$ に近づくから、一般に $\rho_T(\tau)\to 1$ となるはずである。 Tを大きくすると、その間に多数個の降水事象が関与してくることになり、偶発性が増す結果として、$\rho_T(\tau)\to 0$ となることが予想される。したがって、Tをある程度大きく採れば $|\rho_T(\tau)|\ll 1$ がほぼ満足されると考えてよい。このような条件を満足する最小の期間長を単位期間と呼ぶと、当然単位期間は季節によって変化するものである。

著者は、これをWiener流の線型予測理論によって、実用的意味のある予測有意期間として求める手法を提案した。ある河川の例として冬期、春期、梅雨期、台風期でそれぞれ10日、8日、6日、3日を単位期間に採ればよいという結果を得ている。

単位期間の選定は、貯水池による発電計画などで何日平均の流量値を用いるべきかという、最適平均区間の選定[19)]とあい通じる問題であり、もちろん貯水池の調整能力、降水事象の周期性とも関係するが、常識的には5～10日前後を採っておけばよいであろう。

2.1.2 貯水量状態の離散的表現

以上はいわば時間の離散化（lumping）であったが、他に水量の離散化が必要である。具体的には、有効貯水池容量、目標取水量に適当な整数化が要求されるが、たとえばそれぞれに整数 k、m が対応できたとして、その際の問題点を考察する。

a．貯水池容量

貯水量状態の忠実な表現には、kを大きく採った方が有効だが、逆に、後述するように行列演算の次数が

それに応じて増加し、計算は煩雑になる。普通わが国の場合mに比してkはかなり大きく、少なくともmの数倍以上に及ぶであろう。もちろん現実の選定には、単位期間長や目標取水量の大きさとも関連する。

b．目標取水量

目標取水量mの物理的次元は、前記k、$X_{T(t)}$と同じで、たとえばm^3である。k, mは普通ある一定水量を単位として表現されることになるが、理論解析で多用されるのはmを単位とし、k/mを新たに整数化して理論展開を行なうものである。この利点は、形式的には貯水量方程式に関与する特性量が1コ減ることにある。当然k/mの整数化による誤差を伴うし、また季節的に目標放流量を変えようとする場合には適当でない。

2.2 貯水量方程式と確率在庫モデル

まず、貯水池問題と在来の在庫問題との相違に触れておく。すなわち、通常の在庫問題では、出力である需要量が既知分布に従う確率変量または既知確定量で、入力である仕入れ量（発注量）または在庫量が操作変量となる。これに対して、図1.2－2のように、貯水池問題では、需要は既知確定量、流入量が既知分布に従う確率変量、取水量または貯水量が操作変量となる。

2.2.1 貯水量方程式と流量予測

具体的な予測方式を考える前に、貯水量方程式の性質を一般的に考察する。以下の記号を用いる。

k, m：有効貯水池容量、目標取水量（当分これらは一定値としておく）

Z_n：時点nの直前における貯水量（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）

X_n, R_n, E_n：期間（n, n+1）における流入量，取水量，（最大）貯水可能量。ただし、流入量系列$\{X_n\}$は独立、かつつぎの同一分布に従うとする。

$$\Pr\{X_n=j\}=g_j,\qquad (j=0,1,2,\cdots) \tag{2.2-1}$$

一般に、取水量はm, Z_n, X_nの関数であるから$R_n=R_n(m,\ Z_n,\ X_n)$と記すと、貯水可能量は、$E_n=E_n(k,\ Z_n,\ X_n,\ R_n)$と書ける。したがって、n+1時点の貯水量$Z_{n+1}$は、

$$\begin{aligned}Z_{n+1}&=E_n-R_n\\&=E_n(k,\ Z_n,\ X_n,\ R_n(m,\ Z_n,\ X_n))-R_n(m,\ Z_n,\ X_n)\end{aligned} \tag{2.2-2}$$

すなわち、Z_{n+1}はk, m, Z_n, X_nの関数である。ここに、k, mは確定値，Z_nとX_nとは独立であるから、Z_{n+1}はZ_nのみに依存し、（n－1）以前の履歴によらない。また、貯水量状態は有限で、さらに、Z_nからZ_{n+1}への移行には、時間的に定常な確率変数X_nのみが関係するから、結局、貯水量系列は有限な（単純）マルコフ連鎖を構成し、しかも、その連鎖は定常である。したがって、後述するように取水量系列の信頼性を、貯水量の状態確率を媒介とし、マルコフ連鎖に関する理論的成果を利用して、評価することができる。

ⅰ）予測不能な場合

これが、いわゆるMoran's modelで、（n, n+1）の期間内で完全に流入水を貯留した後、期末に瞬間的に放流することになる。（図2.2－1）

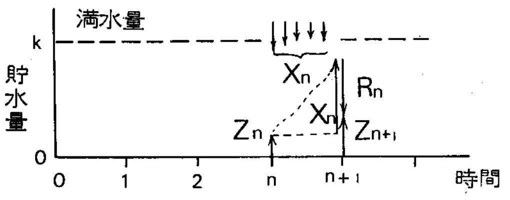

図2.2－1　予測不能の場合の貯水池操作

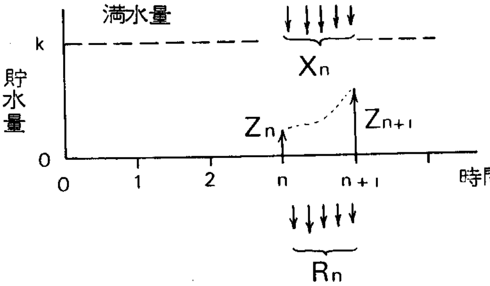

図2.2－2　予測可能な場合の貯水池操作

この場合、取水量、貯水可能量はそれぞれ、

$$R_n = \min(m, Z_n + X_n), \qquad E_n = \min(k, Z_n + X_n) \tag{2.2-3}$$

であるから、貯水量方程式および貯水量状態の存在範囲はつぎのようになる。

$$Z_{n+1} = \min(k, Z_n + X_n) - \min(m, Z_n + X_n) \tag{2.2-4}$$

$$0 \leqq Z_n \leqq k - m \tag{2.2-5}$$

この操作の問題点は、期末に瞬間的に放流・取水すること、およびその結果として n+1 時点では（したがって任意の時点で）貯水池容量に必ずmだけの余裕がでることである。

ii）予測可能な場合

現実の操作では、ある程度の流量予測を平行し、流入量変動を考えながら取水を行ない、貯水池容量を最大限利用しようとする。いま予測が完全に可能な場合を考える。（図2.2−2）

このとき、取水量、貯水可能量は

$$R_n = \min(m, Z_n + X_n), \qquad E_n = \min(k, Z_n + X_n - R_n) \tag{2.2-6}$$

したがって貯水量方程式および貯水量範囲は次式となる。

$$Z_{n+1} = \min\{k, Z_n + X_n - \min(m, Z_n + X_n)\} \tag{2.2-7}$$

$$0 \leqq Z_n \leqq k \tag{2.2-8}$$

実際の貯水池操作は i），ii）の中間状態にあり、したがって予測効果は両者の差として表われることになる。

2.2.2 取水機能の信頼性の表式化

さて、貯水池より取水する場合、必ず目標取水量が満足されるとは限らない。そこで、信頼性を評価する必要が生ずる。一方、取水量不足の内容を大別すると、季節的に流入量分布が偏重し、多雨期での貯水池からの溢流（無効放流）がその後の期間の水不足を惹起する場合と、それ以外のいわば流入量が恒常的に目標に及ばない場合とがある。

ここでは、総括的な取水機能の信頼性を表わす渇水確率、充足確率、および溢流の可能性を表わす溢水確率の評価について考察する。

i）渇水確率、充足確率

取水上の安全性、危険性は目標取水量の充足、非充足（渇水）の事象の確率で表現できる。したがって、（n−1, n）期間の渇水確率 γ_n は、

$$\gamma_n \equiv \Pr\{R_{n-1} < m\} = \Pr\{Z_n = 0\} - \Pr\{R_{n-1} = m\} \tag{2.2-9}$$

となり、さらに若干の演算により、右辺第2項は次式のように書ける。

$$\Pr\{R_{n-1} = m\} = \sum_{i=0}^{m} \Pr\{Z_{n-1} = i\} \cdot g_{m-i} \tag{2.2-10}$$

ここに g_{m-i} は既知であるから、貯水量の状態確率が分れば γ_n は計算できる。なお、貯水量の状態確率は、後述するような過渡分布や定常分布の値として求められる。

ところで、通常の場合mはあまり大きくないから、式（2.2−9）の右辺第2項は第1項に比して無視でき、結局

$$\gamma_n \fallingdotseq \Pr\{Z_n = 0\} \tag{2.2-11}$$

によって、渇水確率が、貯水量の空になる確率で近似されることになる。

また、同様にして、充足確率ω_nが次式で計算できる。

$$\omega_n = 1-\gamma_n \fallingdotseq 1-Pr\{Z_n = 0\} \qquad (2.2-12)$$

ii）溢水確率

同様に考えればよいが予測の可否によって形式が異なる。（n−1，n）期間の溢水確率δ_nは、
まず、予測不能の場合には、

$$\begin{aligned}\delta_n &\equiv Pr\{Z_n = k\} - Pr\{Z_n + X_n = k\}\\ &= Pr\{Z_n = k\} - \sum_{i=0}^{k-m} Pr\{Z_n = i\}\cdot g_{k-i}\end{aligned} \qquad (2.2-13)$$

また、予測可能の場合には、

$$\begin{aligned}\delta_n &\equiv Pr\{Z_n = k\} - Pr\{Z_n + X_n - R_n = k\}\\ &= Pr\{Z_n = k\} - \sum_{i=0}^{k} Pr\{Z_n = i\}\cdot g_{k+m-i}\end{aligned} \qquad (2.2-14)$$

で計算される。

3. 信頼性評価とマルコフ連鎖理論

以上で、取水機能の信頼性は、貯水量の状態確率より算出されるので、以下では貯水量確率の算出を述べる。なお、貯水量方程式を式（2.2−7）とした場合のみを議論しているが、 次元などの若干の修正を行なえば、同様の手法は、式（2.2−4）にも適用し得る。

これまでは、流量分布の定常性を前提としたが、以後、季節性を導入する。年内の任意の季節をs（s= I，II，……，L），s季内の任意時点をn（n=1，2，……，n_s）と記す。 さらに、他の変量にも季節sを示す添字を付す。

3.1 貯水量分布の遷移と推移確率行列

マルコフ連鎖の性質として、s季内の時点nでの貯水量の状態確率ベクトル$\mathbf{p}_{s,n}$ は、初期確率ベクトル$\mathbf{p}_{s,0}$，および推移確率行列$\mathbf{P}_s$ によって、次式で表現される。ただし、ベクトルは行ベクトルを、$\mathbf{P}^n$はP のn回の行列積を意味する。

$$\mathbf{p}_{s,n} = \mathbf{p}_{s,0}\cdot\mathbf{P}_s^{n} \quad (n=1,2,\cdots\cdots,n_s) \qquad (3.1-1)$$

また、推移確率行列は、i行j列の要素をsを略して記すと、つぎのようになる。

$$p_{ij} = G_{m-i}\ (j=0),\ g_{-i+j+m}\ (1\leqq j\leqq k-1),\ h_{k+m-i}\ (j=k) \qquad (3.1-3)$$

ただし、

$$G_j = \sum_{i=0}^{j} g_i,\quad h_j = \sum_{i=j}^{k} g_i \quad (i, j = 0, 1, \cdots\cdots, k_s) \qquad (3.1-4)$$

ところで、式（3.1−3），（3.1−4）は、式（2.2−4）に対しても、 貯水量範囲の上限をk_sよりk_s-m_sに変えることによりそのまま成立つ。 すなわち、流量予測の有無は、貯水池容量の大きさが目標取水量m_sだけ減少することによる渇水確率の増加として評価できる。

さて、s季内に限定されていた上述の議論を、季節間の行列演算が可能なように拡張する。たとえば、I季に始まるs季の任意時点nの状態確率ベクトルは、次式で表わされる。

$$\mathbf{p}_{s,n} = \mathbf{p}_{I,0}\cdot\mathbf{P}_{I}^{n_I}\cdot\mathbf{P}_{II}^{n_{II}}\cdots\ \mathbf{P}_{s}^{n} \quad (n=1,2,\cdots\cdots,n_s) \qquad (3.1-5)$$

なお、m_s，k_sを季節ごとに可変とすると、演算には、行列の次数の相違を勘案して、若干の工夫を要する

が、詳細は文献を参照されたい。[18)]

この関係は、異常渇水時操作のように、現時点の貯水量状態が既知で、その後の貯水量状態の出現確率が時間経過とともにどう変るかを推定する場合にも有用となる。[20)]

3.2 貯水量の定常分布と渇水確率

渇水確率は、厳密には前述の式(2.2−9)で、あるいは近似的には式(2.2−11)で計算されるが、その場合問題になるのは、任意時点での貯水量の長時間平均的な確率分布である。これはエルゴード定理により、定常分布に置き換えられる。

一般に流量時系列には年周期が顕著である。そこで、年間の時点を固定し、年ごとの貯水量分布の変化に着目すると、長年の間にはほとんど変化しない定常分布に到達することが予想される。

たとえば、s季の初期での定常分布を行ベクトル $\mathbf{w}_{(s)}$ で表すと、上述の考えより、$\mathbf{w}_{(s)}$は以下のようにして求められる。

$$\mathbf{w}_{(s)} = \mathbf{w}_{(s)} \cdot \mathbf{P}_{(s)}, \qquad \mathbf{P}_{(s)} \equiv \mathbf{P}_s^{n_s} \cdot \mathbf{P}_{s+1}^{n_{s+1}} \cdots \mathbf{P}_L^{n_L} \cdot \mathbf{P}_I^{n_I} \cdots \mathbf{P}_{s-1}^{n_{s-1}} \qquad (3.2-1)$$

また、$\mathbf{w}_{(s)}$が既知となれば、任意時点nにおける貯水量の定常分布は

$$\mathbf{w}_{(s,n)} = \mathbf{w}_{(s)} \cdot \mathbf{P}_s^{n} \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots, n_s) \qquad (3.2-2)$$

によって、先述の初期分布の推移として求めることができる。

結局、渇水確率や溢水確率における貯水量確率 $Pr\{Z_{s,n} = i\}$ は、定常確率ベクトル $\mathbf{w}_{(s,n)}$ の貯水量状態iに対応する要素 $w_{s,n}(i)$ として求められる。たとえば、式(2.2−11)による渇水確率の近似的表現は、次式となる。

$$\gamma_{s,n} = w_{s,n}(0) \qquad (3.2-3)$$

さて、こうした定常分布が存在するためには、一般に既約なマルコフ過程であればよい。すなわち、$\mathbf{P}_{(s)}^{n} = (p_{s,ij}^{(n)})$ と記すと、任意のi，jに対して $p_{s,ij}^{(n)} > 0$ となるnが存在すればよい。[21)] 貯水量の推移確率行列について、既約条件は $g_j > 0$ があらゆるjについて成立つ条件に置換できる。ところで、一般に離散化した流量分布は右方無限の分布と考えてよいから、もし $g_j = 0$ ($j \leqq u-1$) なら、このような流量状態は全く生起しないから、分布を考える流量状態の原点をuだけ正方向に移動すれば、$j = 0, 1, 2, \cdots$の全てのjについて、$g_j > 0$とすることができる。すなわち、常時確保される流量分布は信頼性評価の対象外と考えておくことになる。

図3.2−1は美和ダムでの定常分布の例で、季節を月、1 stepを5日にとり、k=15, m=3(単位は$4\,m^3/sec \times 5\,day$)で予測を実施したときの月始めの貯水量の定常分布を示す。図3.2−2は同様な場合の渇水確率，溢水確率をm=3，5について示したものである。この貯水池は流入量に比して容量が小さく、予測を実施したとしても、冬期に渇水が、融雪期・梅雨期・台風期に溢水がかなり偏重して生ずることが分る。

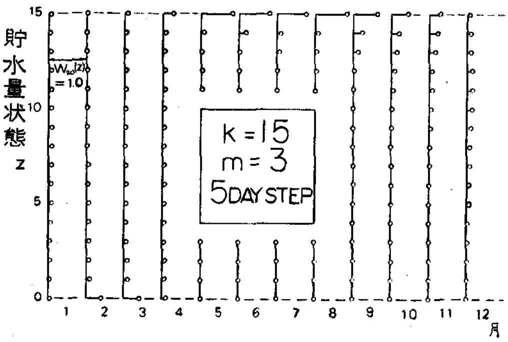

図3.2−1 貯水量の定常分布

(横軸は各貯水量状態に対応した月始めの定常分布の大きさを表示している。)

3.3 初期貯水量と渇水開始時間の確率

ある季節内で、空でない初期貯水量 $Z_0 = i\,(\neq 0)$ より出発して、期間nの後に目標取水量が初めて確保できなくなったとする。これは近似的に$Z_n = 0$を意味する。このような期間長 T_i は次式で定義される確率変

数である。

$$T_i = \min \{ n \mid Z_n = 0 \cap Z_0 = i \} \quad (3.3-1)$$

Ti の確率分布はつぎのように表わせる。

$$\begin{aligned} f_{i0}^{(n)} &\equiv Pr\{T_i = n\} \\ &= Pr\{Z_r > 0 \,(r = 1, 2, \cdots\cdots, n-1) \\ &\cap Z_n = 0 \mid Z_0 = i\} \quad (n \geqq 2) \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

もちろん、上記の事象の中には、溢水が起る場合も含まれている。

Prabhu は、$f_{io}^{(n)}$ を式（2.2−4）より求めている。[22] ここでは式（2.2−7）の解を示す。 まず、n＝1 に対しては、式（3.1−3）より次式が成立つ。

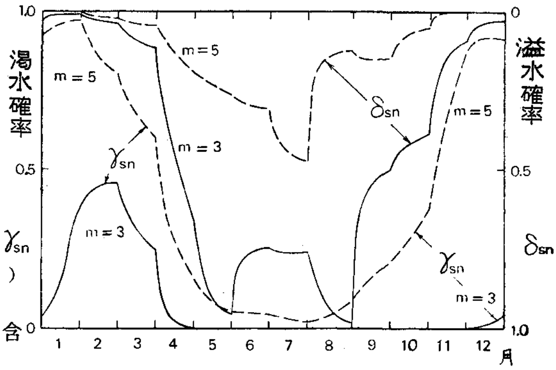

図 3.2－2　渇水確率，溢水確率

$$f_{i0}^{(1)} = p_{i0} = G_{m-i} \quad (1 \leqq i \leqq m),\ 0 \,(m < i \leqq k) \quad (3.3-3)$$

一般には、n＝2 に対して

$$f_{i0}^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} f_{j0}^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{k-1} g_{-i+j+m} \ f_{j0}^{(n-1)} + h_{k+m-i} \ f_{k,0}^{(n-1)} \quad (3.3-4)$$

行列演算で表現すると、上式はつぎのように表わせる。

$$f_{i0}^{(n)} = \gamma_i \cdot \Gamma^{n-2} \cdot \phi \qquad (1 \leqq i \leqq k,\ \ n \geqq 2) \quad (3.3-5)$$

ただし、記号は以下のとおりである。

Γ：推移確率行列 **P** の貯水量 0 の状態に対応する行、列を除いた行列

γ_i ：行列 Γ の第 i 行ベクトル

ϕ：貯水量 0 の行を除いた行列 **P** の貯水量 0 に応ずる列を転置した行ベクトル

したがって、期間 n 以下で渇水の起る確率（非超過確率）$F_i^{(n)}$ は、次式で求められる。

$$F_i^{(n)} = \sum_{u=1}^{n} f_{i0}^{(u)} = p_{i0} + \sum_{u=2}^{n} f_{i0}^{(u)} \quad (3.3-6)$$

さて、以上を季節的に拡張することは容易である。たとえば、Ⅰ季の空でない初期貯水量 i が s 季 n 時点で始めて 0 になる確率は、式（3.1−5）と同様な演算を行なって、つぎのように書くことができる。

$$f_{\mathrm{I},i0}^{(s,n)} = \gamma_{\mathrm{I}i} \cdot \Gamma_{\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{I}}-1} \cdot \Gamma_{\mathrm{II}}^{n_{\mathrm{II}}} \cdots \Gamma_s^{n-1} \cdot \phi_s \quad (3.3-7)$$

上式中の添字Ⅰ，Ⅱ，…，s はそれぞれの季節に対応している。

図 3.3−1 に k＝15，m＝3 で，各月始めを初期時点、初期貯水量を i＝1，4 とした場合の渇水開始時間確率 $f_{io}^{(n)}$ を示す。 ただし 1 step は 5 日である。初期貯水量が小さいとき、冬期では渇水が早く起り、梅雨期・台風期ではなかなか渇水にならないこと、および確率の値が時間経過とともに漸減することが分る。また、初期貯水量が大きくなれば、渇水の出現が遅くなり、最頻値が表われてくる様子が読取れる。

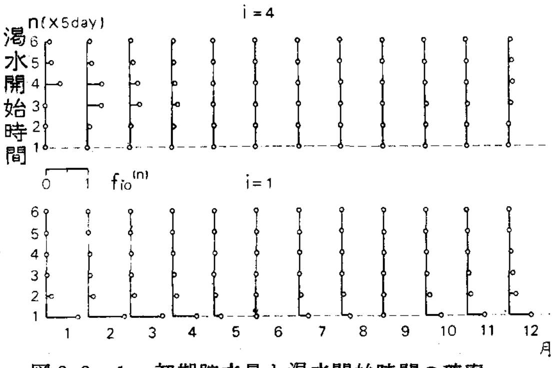

図 3.3－1　初期貯水量と渇水開始時間の確率

なお、本研究の計算には、前名工大生井上蔵久君、および名工大生池田吉隆君の助力を得たことを記して感謝を表しておく。

参考文献

1) Ripple, W. : The capacity of storage reservoirs for water-supply, Proc. ICE, vol.71, pp. 270-278, 1883

2) Hazen, A. : Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal water supply, Trans. ASCE, vol. 77, p.1539, 1914

3) Moran, P. A. P. : A probability theory of dams and storage systems, Aus. Jour. Applied Science, vol. 5, pp.116－124, 1954

4) Moran, P. A. P. : The theory of storage, Methuen, London, 1959

5) Moran, P. A. P. : A probability theory of dams with a continuous release, Quart. Jour. Math. (2), vol. 7, pp.130－137, 1956

6) Prabhu, N. V. : Queues and Inventories, John Wiley & Sons. Inc., 1965

7) Majumdar, K. C. : On some characteristics of storage dam associated with reservoir operations, Jour. of Hydrology, vol. 7, pp.86－97, 1969

8) Langbein, W. B. : Queing theory and water storage, Proc. ASCE, vol. 84, no. HY5, pt.1, pp.1－24, 1958

9) Fiering, M. B. : Queing theory and simulation in reservoir design, Proc. ASCE, vol. 87, no. HY6, pp.39－49, 1961

10) Takacs, L. : Combinatorial methods in the theory of stochastic process, Chap. 6, dam and storage process, John Wiley & Sons, Inc., pp.130－161, 1967

11) Prabhn, N. U. : Time-dependent results in storage theory, Jour. of appl. prob., vol. 1, pp. 1－46, 1964

12) Lloyd, E. H. : Reservoirs with serially correlated inputs, Technometrics, vol. 5, pp.85－93, 1963

13) Gani, J. and Prabhn, N. U. : The time-dependent solution for a storage model with Poisson input, Jour. Math. and Mech., vol. 8, pp.653－664, 1959

14) Khan, M. S. and Gani, J. : Infinite dams with inputs forming a Markov chain, Jour. of appl. prob., vol. 5, pp.72－83, 1968

15) White, J. B. : Stochastic aspects of reservoir storage, Proc. IHS, Fort Collins, Colorado USA, vol. 1, pp.354－360, 1967

16) Phatarfod, R. M. : Some aspects of stochastic reservoir theory, Jour, of Hydrology, vol. 30, pp.199－217, 1976

17) 石原安雄・長尾正志：流出量時系列の季節的特性について、京大防災研年報、第12号B, pp.261－272, 1969

18) 長尾正志：貯水池をもつ河川の渇水確率について、京大防災研年報、第11号B, pp.115－129, 1968

19) 新井義輔・鈴木文夫他：発電計画における基礎流量資料の取扱いについて、電力気象連絡会彙報、第2輯、第4巻第1号、pp.19－30, 1955

20) 山根隆行・長尾正志：確率在庫モデルによる渇水時貯水池操作の一考察、土木学会年次講演概要、pp. 242－243, 1976

21) 松田正一他：ORのための基礎数学4、確率とDP・待合せ理論、丸善、pp.135－141, 1964

22) 前出6)のpp.200－201