

掃流砂量の理論的研究

中央大学理工学部 正会員 林 泰造
中央大学大学院 学生員○高羽秀紀

1. まえがき

掃流砂量公式は数多く存在する。わが国ではこのうちで特に Einstein の式¹⁾, Meyer-Peter の式²⁾, 篠原・椿の式³⁾, 佐藤・吉川・芦田の式⁴⁾, 芦田・道上の式⁵⁾などが, 使用されてきたように思われる。上記の諸式のうち, Einstein 公式と佐藤・吉川・芦田公式は, 河床砂礫の移動確率をとり込んでつくられた理論で, 確率統計論的な取り扱いをしているという点で他の3公式とは傾向を異にする。

Einstein の理論は, 今日の Stochastic hydraulics の先驅をなした歴史的な論文ともいえるが, 今ではその理論にあらが見えない訳でもない。

このたび, 筆者等は, Einstein 公式を再検討して同公式の理論的改良を行ったのでその研究を報告する。

2. Einstein の公式の review と問題点

Einstein は本来混合粒径の場合を取り扱っているのであるが, ここでは説明の簡単化のため, 一様粒径の場合に引き直して, review を行う。

Einstein は, まず, 河床の動的平衡状態においては, 河床面上の砂粒数は時間的に変らないことを表わす砂粒数の平衡条件式から, 次式を導いた。

$$P_a / (1 - P_a) = \alpha_* \Phi \dots\dots\dots (1)$$

ただし,

P_a : t_{ex} 時間中に1つの砂粒が動き出す確率

t_{ex} : 1つの砂粒を同様な砂粒で置き換えるに要する時間 (exchange time) $t_{ex} \sim \sqrt{d/(s-1)g} \dots (1 \cdot a)$

$\Phi = q_B / [(s-1)gd^3]^{1/2}$: 無次元掃流砂量 $\dots\dots\dots (1 \cdot b)$

q_B : 単位河幅当りの掃流砂量

s : 砂粒の比重

d : 砂粒の径

つぎに, 河床面上の砂粒に作用する揚力 L は, 時間的に変動しているとして

$$L = L_0 \cdot |1 + \eta| \dots\dots\dots (2)$$

と考え, この L が砂粒に作用する重力 W を上まわったときに, 砂粒は移動すると考えた (図 - 1)。ただし

L_0 : 揚力 L の時間的平均値

このことから明らかなように,

$$W/L < 1 \dots\dots\dots (3)$$

のときに河床物質が移動する。いま,

$$\left. \begin{aligned} W &\propto (s-1) \rho g d^3 \\ L_0 &\propto \rho U_*^2 d^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

ただし, U_* : 摩擦速度, と考えられるから,

$$\frac{W}{L} = \frac{B\psi}{|1 + \eta|} \dots\dots\dots (3 \cdot b)$$

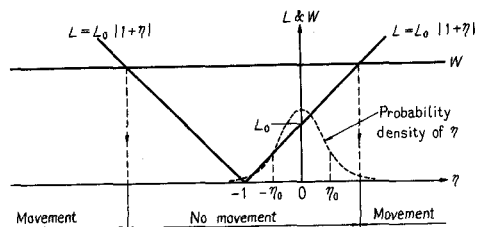


図 - 1. 砂粒に作用する揚力と重量

となる。ただし、

$$\psi = \frac{(s-1)gd}{U_*^2} = \frac{1}{\tau_{*ef}} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot c)$$

τ_{*ef} : 無次元有効掃流力, B : 無次元定数

よって, (3) 式はつぎのように書き直される。

$$|1+\eta| > B\psi \quad \dots\dots\dots (4)$$

そこで, P_a は (4) 式となる確率を意味しているともいえる。

いま, η は Gauss 分布をなすものとし、

η_0 : η の標準偏差

とする。また、

$$\eta_* = \eta / \eta_0$$

とおくと, 図 - 1 は η_* によって, 図 - 2 のように書き直される。ただし、

$$B_* = B / \eta_0 \quad \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

よって、

$$P_a = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta_{*2}}^{\eta_{*1}} e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-B_*\psi - \frac{1}{\eta_0}}^{B_*\psi - \frac{1}{\eta_0}} e^{-t^2} dt \quad \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

この式を, (1) 式に代入することにより, Einstein の掃流砂量式と知られる次式をうる。

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-B_*\psi - \frac{1}{\eta_0}}^{B_*\psi - \frac{1}{\eta_0}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{1 + \alpha_* \phi} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし, α_* : 定数

Einstein は, 実験値との比較などから, 定数値を, つぎのように定めている。

$$1/\eta_0 = 2.0, \quad B_* = 0.143, \quad \alpha_* = 43.5 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Einstein の理論構成における一つの難点は, (1) 式の誘導に当りそれに用いている砂粒の移動距離についてのつぎの考え方の中に存する。Einstein は, “砂粒の 1 回の移動距離 l は、

$$l = \alpha d \quad \dots\dots\dots (7)$$

で表われ, 河床面の安定度によりこのような跳躍が 1 回だけで砂粒が先ず止るとは限らない。(止るまでにこの跳躍を何回と繰り返す)”と考えた。そこで, そのような継続移動距離の確率平均値 l_m を求めることが必要であり, このため, 若干の計算の後、

$$l_m = \alpha d / (1 - P_a) \quad \dots\dots\dots (8)$$

という関係式を求め, これを (1) 式の誘導の際に用いている。(8) 式においては、

$$\alpha = \text{const.}$$

としており, これは (5) 式の α_* に変形されてゆくのである。しかし, l が単に粒径 d のみによって定まるものであって, 底面付近の流速 U_* や上向きの跳び出し初速度 w_0 には依ら

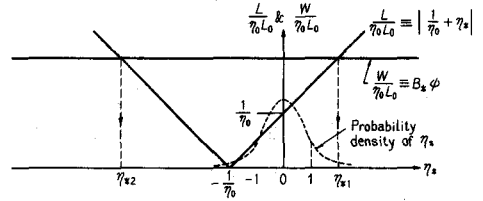


図 - 2. $L/\eta_0 L_0$ と $W/\eta_0 L_0$

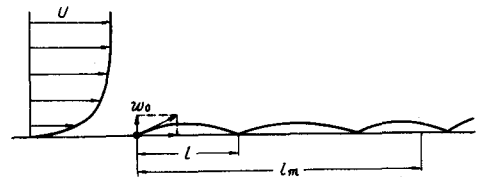


図 - 3. 砂粒の運動 (鉛直寸法は誇張されている)。

ないとするこの考え方は理論上理解し難い点である。

佐藤・吉川・芦田公式においては、このような不完全な点を改良するため、 l が入ってくる(8)式の関係(したがって(1)式の関係)を用いずに、その代りとして新たに掃流運動の平衡条件から“砂粒に作用する揚力が砂粒に与える鉛直方向力積は、重力が鉛直下方に与える力積に等しい”とするつぎのような力積方程式を用いている。

$$\delta t' r \int_{p_c}^{\infty} f(p) dp = c h_b (s-1) \rho g \delta t \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

ここに、 p ：砂粒に作用する揚圧力、 p_c ：限界揚圧力、 δt ：微小時間、 $\delta t'$ ：揚圧力が有効に作用する時間、 r ：河床単位面積中揚圧力が有効に作用する面積、 $f(p)$ ： p の生起確率密度関数で正規分布曲線、 c ：掃流層内の砂の体積濃度、 h_b ：掃流層厚さ。

この(8-a)式により、掃流層内の砂の濃度 c を求め、

$$q_B = \bar{c} u_b h_b \quad \dots\dots\dots (9)$$

の関係から、 q_B についての最終的な形の式を求めている。ただし、 u_b ：掃流層内の流速。

筆者等は、Einstein理論の改良に当っては、初め佐藤・吉川・芦田公式における改良方法から着想を得たが筆者等の理論は、結論的にいえば、筆者等の理論と佐藤・吉川・芦田理論との主な相違点は(8-a)式に関しての考え方の相違に存する(後式(15)式および(24)式)。

3. 筆者等の理論

(a) 理論構成上の基本的考え方

底面上から跳び出した砂粒子は、再び底面上に戻るものと、底面には戻らず水流に浮遊して流送されるものと2つに分れる(図-4)。この前者の集合が掃流砂量を構成するものとする。そうすると、単位河幅当りの掃流砂量(体積割合)は、つぎの式で計算される。

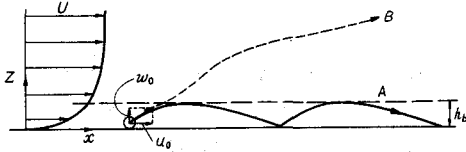


図-4. 砂粒の掃流と浮遊(AとB)

$$q_B = \bar{c} u_b h_b \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 h_b ：砂粒の跳び上り高さの平均値(すなわち、掃流層の厚さ)、 u_b ：同層内の平均流速、 $\bar{c}$ ：同層内の砂の平均濃度。ところで、(10)式中の $\bar{c}$ は、つぎのように表わすことができる。

$$\bar{c} = n_b P_a \frac{T}{t_{ex}} V / h_b \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 n_b ：河床面単位面積中に存在する砂粒数(個/area)、 P_a ： t_{ex} 時間中に砂粒が動き出す確率(既述)、 V ：砂粒1個当りの平均体積(Vol./個)、 T ：1個の砂粒が跳び出して再び河床上に沈降するまでの時間すなわち砂粒の水流中滞留時間。(11)式はまたつぎのように考えれば理解しやすい。いま掃流層内の濃度 $\bar{c}$ について、次のような非定常問題を考えてみる。

$$t = 0 \quad \text{で} \quad \bar{c} = 0$$

$t > 0$ で 河床単位面積から単位時間当りに、 VP_a / t_{ex} の砂粒が上方に放出され、放出された砂粒はそれぞれ T 時間後に河床上に沈降する。

そうすると、 $t=0$ 以後に河床単位面積から上方に発する砂の累積体積 Σ_1 と、逆に上方から河床単位面積内に帰着する砂の累積体積 Σ_2 は図-5に示すようになり、初めの T 時間の間は、掃流層中に存在する

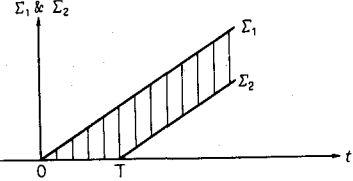


図-5

砂の体積 ($=\Sigma_1 - \Sigma_2$) は、増加してゆくが、 $t > T$ では定常的になる。ところで、 Σ_1 および Σ_2 は、

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= (n_b V P_a / t_{ex}) \cdot t \\ \Sigma_2 &= \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t \leq T \\ (n_b V P_a / t_{ex}) \cdot (t - T) & \text{for } t \geq T \end{cases}\end{aligned}$$

よって、 $t \geq T$ においては、

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = (n_b V P_a / t_{ex}) T$$

の定常値となり、従って濃度は定常的に

$$\bar{c} = n_b V \frac{P_a}{t_{ex}} T / h_b$$

となる。これが (11) 式である。

このようにして得られる $\bar{c}$ の表現式を (10) 式に代入すると、

$$q_B = n_b \frac{V}{t_{ex}} P_a T u_b \quad \dots\dots\dots (12)$$

をうる。但し、 P_a は Einstein の式 (4・b) と同じであり、また、

$$u_b \sim u_{*ef} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$u_{*ef} = \sqrt{\tau_{ef} / \rho} \quad \dots\dots\dots (14)$$

また、 τ_{ef} : 有効河床剪断力

であって、これらは予め与えうる値であるので、結局 (12) 式の T がわかれば、 q_B の計算式が定まることになる。そこで、 T についての計算を次に行う。

(b) 砂粒の浮上滞留時間 T

1 つの砂粒が河床から跳び出してからの運動 (図 - 4) について考える。跳び出した瞬間を、 $t = 0$ とする。 $t = -0$ までは河床上に静止したものとす。この砂粒についての鉛直方向の運動方程式は、

$$m \frac{dw}{dt} = -W - R \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

- $m = (\pi/6) s \rho d^3$: 砂粒の質量
- $W = (\pi/6) (s-1) \rho g d^3$: 砂粒の水中重量
- R : 砂粒に作用する流体抵抗の z 方向成分
- w : 砂粒移動速度の鉛直方向成分

である。砂粒に作用している揚力 L は、砂粒が河床を離れると消失するはずであるので、(15) 式の右辺には、 L は入らない。

R の表現式としては、ここでは近似的に Stokes の式

$$R = 3\pi \mu dw \quad \dots\dots\dots (16)$$

を用いることとする。ここに、 μ : 水の粘性係数。

(16) 式を (15) 式に代入し、また m 、 W の式も代入すると、(15) 式の積分から次式をうる。

$$w = (\bar{w}_0 + w_f) e^{-(18\nu/sd^2)t} - w_f \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 $\bar{w}_0$: 砂粒のとび出しの初期速度の鉛直方向成分

$$w_f = (s-1)gd^2/18\nu : \text{砂粒の沈降速度} \dots (18)$$

そこで、鉛直成分初速度 $\bar{w}_0$ とび出した砂粒が、上方に上り切る時間 t_1 (図-6) は、(17) 式から $w=0$ となる時間を求めることにより、

$$t_1 = \frac{s w_f}{(s-1)g} \ln \left(\frac{\bar{w}_0}{w_f} + 1 \right) = \zeta \frac{s w_f}{(s-1)g} \dots (19)$$

ただし、

$$\zeta = \ln \left[(\bar{w}_0 / w_f) + 1 \right] \dots (20)$$

また、この間の上昇距離を、 h_b とすると、

$$h_b = \int_0^{t_1} w \, dt = \frac{s w_f \bar{w}_0}{(s-1)g} \left(1 - \zeta \frac{w_f}{\bar{w}_0} \right) \sim \frac{s w_f \bar{w}_0}{(s-1)g} \dots (21)$$

となる。つぎに h_b の高さを砂粒が落下するに要する時間を、 t_2 とすると、再び (17) 式の積分から次式をうる。

$$h_b = w_f t_2 - \frac{s(\bar{w}_0 + w_f) w_f}{(s-1)g} \left[1 - e^{-\frac{(s-1)g}{s w_f} t_2} \right] \sim w_f t_2 \dots (22)$$

そこで、(19) 式と (21) 式とを (22) 式に代入して、同式から t_2 を求めると、

$$t_2 = \frac{s w_f}{(s-1)g} \left(\frac{\bar{w}_0}{w_f} + \zeta \right) \dots (22 \cdot a)$$

をうる。従って、砂粒が水流中に滞留している時間 T は

$$T = t_1 + t_2 = \frac{s \bar{w}_0}{(s-1)g} \left(1 + 2\zeta \frac{w_f}{\bar{w}_0} \right) \sim \frac{s \bar{w}_0}{(s-1)g} \dots (23)$$

となる。この式により T が定められたように見えるが、同式中には、初速度 $\bar{w}_0$ が入っており、これを正しく求めることが必要である。そこでつぎに $\bar{w}_0$ の計算を示す。

(c) 跳び出しの鉛直方向成分初速度の確率平均値 $\bar{w}_0$ の計算

河床上にある砂粒には、揚力 L が作用しているが、これが砂粒の水中自重 W より大きくなったときに砂粒は浮き上がる(すなわち、跳び出す)。その時の初速度 w_0 は、

$$m \, dw/dt = L - W \quad (\text{但し、} L > W \text{ に対して}) \dots (23 \cdot a)$$

を書き直した力積方程式、

$$m \, w_0 = \int_0^{\tau} (L - W) \, dt \sim (L - W) \tau \dots (24)$$

から計算される。ここに、 τ : 揚力 L の作用時間。

(24) 式は、とび出しの極く初期 ($0 < t \leq \tau$) の運動を、対象としたものであるため、未だ流体抵抗 R は入らない。 $t > \tau$ となると砂粒は、河底を離れ、ために河床に砂粒があったときに働いていた L は消失する。その代りに砂粒の運動に対する流体抵抗としての R が利くようになり、現象は (24) 式で表わされるものから (15) 式で表わされるものに移行する。

(24) 式の τ としては、exchange time t_{ex} と取る。すなわち、

$$\tau = t_{ex} \dots (24 \cdot a)$$

そこで (24) 式から、次式をうる。

$$w_0 = \frac{t_{ex}}{(\pi/6) s \rho d^3} (L - W) \dots (25)$$

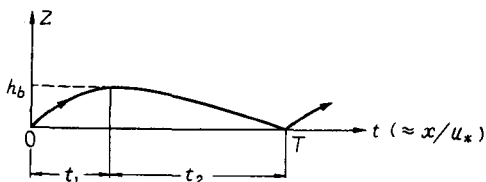


図-6. 1回の移動における粒子の経路

揚力 L については、Einstein と全く同じ考え方をすると、(3・a) から (4・a) までの諸式を用いて、 $L-W$ は、次のように書き表わされる。

$$L-W = \frac{\pi}{6} (s-1) \rho g d^3 \frac{1}{B_* \Psi} \left[\left| \frac{1}{\eta_0} + \eta_* \right| - B_* \Psi \right] \quad \dots\dots\dots (26)$$

但し、上式は、 $L > W$ の場合、従って

$$\left| \frac{1}{\eta_0} + \eta_* \right| > B_* \Psi \quad \dots\dots\dots (27)$$

の場合に対するものである。 $L < W$ の場合には、砂粒は動かないから、掃流砂量の計算には考える必要はない。(26) 式を (25) 式に代入することにより、

$$w_0 = \frac{(s-1)}{s} \frac{g t_{ex}}{B_*} \frac{1}{\Psi} \left[\left| \frac{1}{\eta_0} + \eta_* \right| - B_* \Psi \right] \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。ところで、図 - 7 から明らかなように、

右方の分枝に対して

$$\left| \frac{1}{\eta_0} + \eta_* \right| - B_* \Psi = \eta_* - \eta_{*1} \quad \dots\dots\dots (29 \cdot a)$$

左方の分枝に対して

$$\left| \frac{1}{\eta_0} + \eta_* \right| - B_* \Psi = \eta_{*2} - \eta_* \quad \dots\dots\dots (29 \cdot b)$$

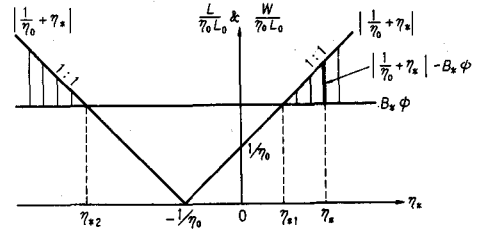


図 - 7

となる。そこで、いま、Einstein と同じように、 η_* は確率的に変動し標準偏差 1 の確率正規分布をするとすれば、

(28) 式で与えられる w_0 の確率平均値 (期待値) $\bar{w}_0$ は、次式で表わされる。

$$\bar{w}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta_{*1}}^{\infty} w_0 e^{-\eta_*^2} d\eta_* + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\eta_{*2}} w_0 e^{-\eta_*^2} d\eta_*$$

これに、(28) 式および (29・a,b) 式を代入すると、

$$\bar{w}_0 = \frac{s-1}{s} g t_{ex} \frac{1}{B_*} \tau_{*ef} I \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。ただし、

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} e^{-\eta_{*1}^2} + \frac{1}{2} e^{-\eta_{*2}^2} - \eta_{*1} \int_{\eta_{*1}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \eta_{*2} \int_{-\infty}^{\eta_{*2}} e^{-t^2} dt \right\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

である。(30) 式が $\bar{w}_0$ の計算式となる。

(d) 掃流砂量の計算式

(30) 式の $\bar{w}_0$ を (23) 式に代入して T が判る。この T の表現式と (4・b) 式の P_a の式とを (12) 式に代入することにより、 q_B を与える次式をうる。

$$\frac{q_B}{\sqrt{(s-1) g d^3}} \sim \frac{n_b V}{d} \frac{1}{B_*} P_a I \tau_{*ef}^{3/2} \quad \dots\dots\dots (32)$$

これが掃流砂量式であるが、(12) 式右辺分母に入っていた t_{ex} は、 T を通じて $\bar{w}_0$ の項から入ってきた t_{ex} と消し合って、上式中には t_{ex} (あるいは τ) は残らない。これは本理論として非常にうまくいっていて、Einstein が導入した P_a の概念 (“ t_{ex} 時間当り” のとび出し確率) のしからしめるところである。

つぎに、上式中の n_b と V については、その定義から

$$n_b \sim 1 / \frac{\pi}{4} d^2, \quad V = \frac{\pi}{6} d^3$$

であるから、これらを上式に代入すると、

$$\frac{q_B}{\sqrt{(s-1)gd^3}} \sim \frac{2}{3B_*} P_a I \tau_{*ef}^{3/2} \dots\dots\dots (33)$$

となる。図-8は無次元基本関数 P_a , I , および $P_a I$ を τ_{*ef} に対して図示したものである。ただし, P_a , I には既述のように2つのパラメータ B_* および η_0 が含まれているので, これらの値を与える必要がある。そこで本計算においてはすべて Einstein が用いた値

$$B_* = 0.143, \quad \eta_0 = 1/2 \dots\dots\dots (34)$$

をそのまま採用した。

図-9は無次元関数 $P_a I$, $\tau_{*ef}^{3/2}$ および $P_a I \tau_{*ef}^{3/2}$ を τ_{*ef} について図示したもので, これからつぎのことが認められる。

i) 掃流砂量式の基本骨組を一応 $q_B \propto A \tau_{*ef}^{3/2}$ と考えると, $P_a I$ は A に当るもので, これを multiplier 関数を考える。

ii) $\tau_{*ef} \geq 0.3$ のとき

$P_a I$ は τ_{*ef} の値の変化に殆ど無関係, よって

$$q_B \propto \tau_{*ef}^{3/2}$$

iii) $\tau_{*ef} \leq 0.3$ のとき

$P_a I$ は τ_{*ef} の値の減少とともに急速に減少し, このため q_B は $3/2$ 乗の直線から急速に偏移してゆく。

(34) 式の定数の値を (33) 式に代入すると

$$\frac{q_B}{\sqrt{(s-1)gd^3}} \sim 4.62 P_a I \tau_{*ef}^{3/2} \dots\dots\dots (35)$$

となるが, この係数を少し補正して

$$\frac{q_B}{\sqrt{(s-1)gd^3}} = 5.6 P_a I \tau_{*ef}^{3/2} \dots\dots\dots (36)$$

とすると次節に示すように実験値と非常に良く一致する式をうる。この(36)式を本研究の流砂量式とする。

式(35)の係数4.62は $n_b V / d B_*$ からでてきたもので, 単位面積当りに存在する砂粒数 n_b は, 砂粒を一様径の球と考えて $n_b = 1 / \frac{\pi}{4} d^2$ として計算したものであるが, 実際には砂粒は球形ではなく, ためにもっと packing の状態は良くなり, n_b の値は実際にはもう数割程度大きい筈である。そのことを考え合わせると, 実験と一致する式が何らの新しい実験係数的な値の導入なしに, 理論だけから導かれたことは驚くべきだと思う。

4. 理論と実験の比較

図-10は, Gilbert の実験および佐藤・吉川・芦田の実験における無次元掃流砂量を, 無次元河床剪断力に対して図示したものであり, 同図には本理論式(36)式および Einstein の(5)式も同時に記入してある。(36)式と(5)式はともに τ_{*ef} (無次元有効河床剪断力) についての式であるので, 実験値の ϕ は, 理論との比較のためには正しくは τ_{*ef} に対してプロットすべきものであるが, 近似的に, τ_* に対して図示した。しかし, τ_* が限界掃流力(無次元)の

$$\tau_{*cr} = 0.03 \sim 0.06 \dots\dots\dots (36)$$

付近(図の左下方部分の領域)では, 河床波が発生するとは考えられないので, この範囲では,

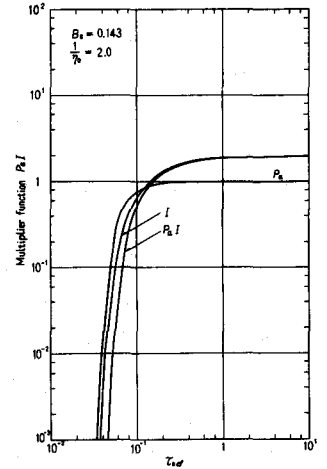


図-8. 無次元基本関数 P_a , I および $P_a I$

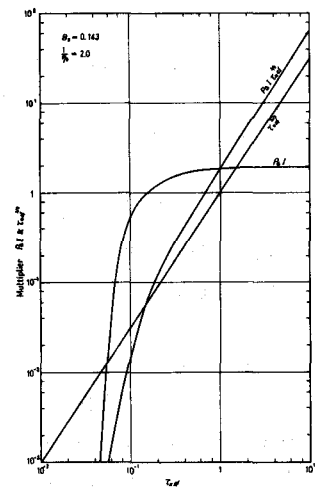


図-9. Multiplier $P_a I$ と $\tau_{*ef}^{3/2}$

$$\tau_{*ef} \cong \tau_*$$

と考えてよいであろう。また同図の右上部分の実験値は、平坦河床に対するものであるので、やはりその部分でも、 $\tau_{*cr} \cong \tau_*$ と考えてよいであろう。結局、もし横軸を τ_* から τ_{*ef} に書き直しても、左下と右上部分の実験値はほとんど動かず、中央部の実験値だけが、多少左方にシフトするだけになると思われる。

これらのことを考慮すると、著者等の理論式は、実験値に非常によく一致しているといえるもののように思われる。

Einstein の理論は、

$$\tau_{*cr} \leq \tau_* \leq 0.3$$

では実験と合っているが、 τ_* がこれより大きくなると、次第に実験から外れて行く。 $\tau_* = \tau_{*cr}$ のときには、 $\phi = 0$ とならねばならないから、何れの理論も、

$$\tau_* = \tau_{*cr} \quad \text{で} \quad \phi = 0$$

であり、そこから曲線が立ち上がる。従ってグラフ上では、 τ_* が小さい間は、何れの理論曲線も大差はなく、かなりよく実験に合うように見える。各理論式間に差が出てくるのは

$$\tau_* \geq 0.3$$

の範囲においてであって、Einstein の理論がこの範囲において実験から、かなり外れるのは、その理論の不完全さを物語っている。

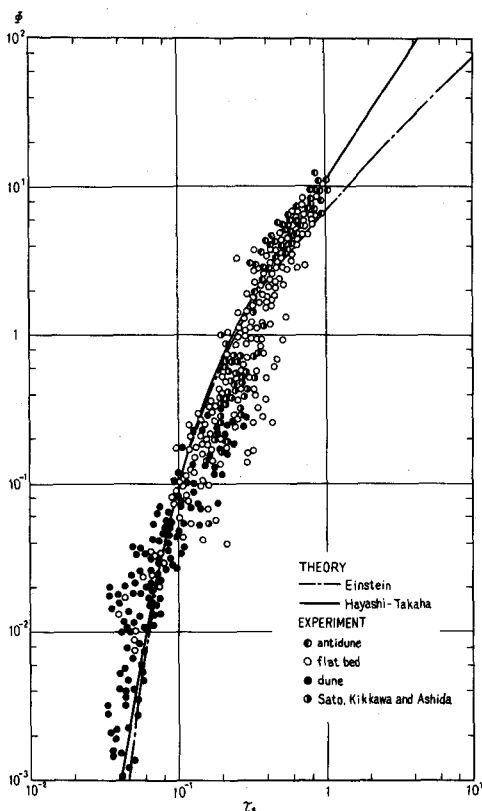


図 - 10. 理論と実験値

4. 結 び

Einstein 公式の改良を行って新しい計算式(35)を導いた。実験との比較は平均河床状態における実験値を多く含んでいる Gilbert および佐藤・吉川・芦田の実験値を使ったので、実験値の τ_* の値をそのまま τ_{*ef} と考えて理論と比較するというやり方をとった。そのようにしてプロットした実験値と理論との一致の度合は非常に良好であるといえると思う。今後、実験値から τ_{*ef} に引き直したものの値との比較を行ってゆきたいと考える。

附 記 式の補足的考察およびその他

(a) $\bar{w}_0$ および h_b の値のオーダー

$$\text{I} \quad R = 200 \text{ cm}, \quad i = 1/1,000$$

$$\text{II} \quad R = 20 \text{ cm}, \quad i = 1/600$$

の2ケースについて $\bar{w}_0$ および h_b の計算を行う。 $\bar{w}_0$ の計算は(30)式 $t_{*x} \cong d/\bar{w}_0$ を代入して得られる次式によった。

$$\bar{w}_0 = \sqrt{\frac{s-1}{s} g d \frac{1}{B_*} \cdot \tau_{*ef} I} = \sqrt{\frac{I}{s B_*} u_{*ef}} \quad \dots\dots\dots (37)$$

また、 h_b の計算は(21)式に上式の $\bar{w}_0$ を代入して得られる式により行った。

$$h_b = \frac{1}{(s-1)g} \sqrt{\frac{sI}{B_*}} w_f u_{*ef} \dots\dots\dots (38)$$

また, w_f は次式で計算した。

$$w_f = (s-1)gd^2/18\nu \quad \text{for } Re_d < 1.0 \quad (\text{Stokes})$$

$$w_f = 0.023[(s-1)^2 g^2/\nu]^{1/3} d \quad \text{for } 1 < Re_d < 1,000 \quad (\text{Allen})$$

計算結果はつぎのようである。

Case I

d (mm)	τ_{*ef}	$\bar{w}_0$ (cm/s)	h_b (mm)
0.2	6.06	31.5	0.20
0.4	3.03	31.5	0.40
1.0	1.21	30.9	1.0

Case II

d (mm)	τ_{*ef}	$\bar{w}_0$ (cm/s)	h_b (mm)
0.2	1.01	12.6	0.08
0.4	0.51	12.1	0.15
1.0	0.20	10.4	0.33

$\bar{w}_0$ は u_{*ef} の 2 ～ 3 倍程度, h_b は粒径程度となっている。(Einstein は $h_b \approx 2d$ と考えていた)。

(b) B_* および η_0 の値

揚力 L は平均値 L_0 の周りに確率正規分布的に変動している。いまその変動値が標準偏差 η_0 の 2 倍となったときの揚力 $L (= L_0 + 2\eta_0)$ が粒子重量にうちかつようになるときの L_0 の値に対する掃流力をもって限界掃流力と定義すると, 図-11 から明確なように

$$\eta_1 = 2\eta_0 = B_*\Psi_{cr} - 1$$

なる関係が成立しなければならない。従って

$$2 = B_*\Psi_{cr} - (1/\eta_0)$$

そこで $1/\eta_0 = 2.0$ とする場合には

$$B_* = 4/\Psi_{cr} = 4\tau_{*cr}$$

τ_{*cr} の大きさは, Shields 公式や岩垣公式で与えられるが, いま, $\tau_{*cr} = 0.03 \sim 0.05$ とすると B_* の値は次のようになる。

τ_{*cr}	B_*
0.03	0.120
0.04	0.160
0.05	0.200

Einstein は 2 つの定数 η_0 と B_* を

$$1/\eta_0 = 2.0, \quad B_* = 0.143$$

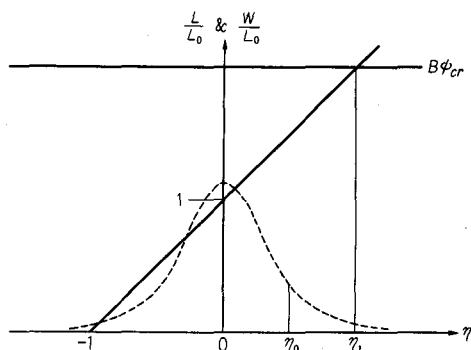


図-11. 無次元限界掃流力のときの η_1

ととって実験と合わせているが、本節のような観点からみても良い所をねらった値であったと思われる。

(c) その他

掃流砂量についていろいろな著者がなした実験の結果(データ集)が最近の山本の論文⁶⁾中に集録されている。今後これに載せられている色々のデータとの比較も行つてゆきたい。

本研究の遂行中、中央大学大学院後期博士課程学生 尾崎幸男君より有益な討議を得た。記して謝意を表する。

引 用 文 献

- 1) Einstein, H. A. : Formulas for the transportation of bed load, Trans. ASCE, Vol. 107, 1942.
- 2) Meyer - Peter, E. and R. Müller : Formulas for bed-load transport, Proc. of the 2nd Congress of the International Association for Hydraulic Research, Stockholm, Sweden, 1948.
- 3) 篠原謹爾・椿東一郎 : On the characteristics of sand waves formed upon the beds of the open channels and rivers, Reports of Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Vol. VII, No. 25, pp. 15-45, 1959.
- 4) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男 : 河床砂礫の掃流運搬に関する研究, 建設省土木研究所報告, 第 98 号, 1958.
- 5) 芦田和男・道上正規 : 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文集 206 号, 1972.
- 6) 山本晃一 : 相似律の観点から見た移動床流れの水理 — Sedimentation に関する基本資料集 —, 土木研究所資料第 1059 号, 建設省土木研究所鹿島試験所, 1975 年 10 月.