

せん断流モデルによる河川蛇行の研究

中央大学理工学部 正会員 工博 林 泰造

中央大学大学院後期博士課程 工修○尾崎幸男
学生員

1. まえがき

著者等は数年にわたって、線形河床安定理論の立場から河川の蛇行の成因とその卓越波長について研究を行ってきた。

河床安定理論にはポテンシャル流モデルとせん断流モデルとがあることは周知のとおりであるが、著者等は前報¹⁾において、水深方向に平均化したせん断流モデルを用い、水流は準定常で河床面の变形のみ非定常と考え数式の簡単化を行うことによってせん断流モデルの特徴を明らかにした。前報によると、せん断流モデルにおいては、移動床河床面の不安定要因がすでに基礎方程式自体に内在しており、ポテンシャル流モデルによる研究で導入されるような artificial な仮定を用いずとも河床の不安定機構を説明することができることを示した。これにより、直線水路の蛇行の成因は基本的にはある程度明らかになったと思う。

しかし、そこに未だ残されている問題は蛇行波長であった。前報の理論においては、単列の卓越蛇行波長が実際の河川の蛇行波長に比べてかなり小さいものとなったので、実際現象を説明するために、このような交互砂州は複列交互砂州が統合されてできたものと考えて“統合波長”(図-1)という仮定的概念を加えて説明したのである。

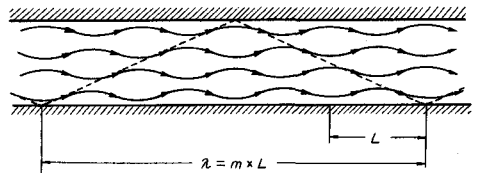


図-1 複列蛇行と“統合蛇行波長”

ところがその後、このような“統合波長”の形成という考え方には無理があるといういくつかの批判が寄せられ、それらに答えうるだけの確証を挙げ得ないままになっていたが、今回は一応“統合波長”の仮定の維持に固執せずに、改めてもう一度基礎方程式に立帰ってさらに細かに種々の検討を行い、特に蛇行波長に及ぼすいろいろな基本的因子の影響について研究した。本報はそのような研究の報告である。

2. 基礎方程式

移動床広矩形断面水路を考え、流下主流方向に x 軸、これに直交して流れの横断方向に y 軸、そして鉛直方向に z 軸をとる。

u 、 v および q を x 、 y および流線 s 軸方向の流速成分とすれば、流線 s 軸は (1) 式で表わされる。

$$dx/u = dy/v \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、流線の曲率 K は次式で表わされる。

$$K = -\frac{d^2y}{dx^2} / \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

いま、流線が曲率をもって蛇行しているとき、流体には流線 s 軸と直交する法線 n 軸方向に遠心力が働く。ここで、流体の単位質量当りに作用する遠心力を a_n とおけば a_n は (3) 式で表わされる。

$$a_n = Kq^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ 。

(2) 式から、この遠心力は、流線 s が y 軸の正の方向に凸の場合には、

$$d^2y/dx^2 < 0, \quad a_n > 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

また逆の場合すなわち流線 s が y 軸の正の方向に凹のときには、

$$d^2y/dx^2 > 0, \quad a_n < 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

となることが認められる。

この遠心力を基礎方程式に取り込むため、 x 、 y 成分を求めると次式のようなになる。

$$a_x = -a_n \cdot v/q, \quad a_y = a_n \cdot u/q \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、流線の式は(1)式から

$$dy/dx = v/u \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、 $v \ll u$ と考えられるので曲率 K を v/u について線形化すると(8)式が得られる。

$$K = -\frac{d}{dx} \left(\frac{v}{u} \right) / \left\{ 1 + \left(\frac{v}{u} \right)^2 \right\}^{1/2} \cong -\frac{d}{dx} \left(\frac{v}{u} \right) \cong -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{u} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

故に、曲率 K を線形化したときの遠心力とその成分は

$$a_n \cong -q^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{u} \right), \quad a_x \cong qv \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{u} \right), \quad a_y \cong -qu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{u} \right) \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。

このようにして流線の蛇行、すなわち遠心力の効果を考慮し、水流は準定常と仮定して運動方程式をたてると、 x 、 y 軸方向についてそれぞれ(10)、(11)式のようなになる。

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \left(I_0 - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\tau_x}{\rho h} + a_x \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{dv}{dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{\tau_y}{\rho h} + a_y \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 g ：重力加速度、 I_0 ：等流時の河床勾配、 h ：局所水深、 η ：河床に与えるじょう乱、 τ_x, τ_y ： x 、 y 方向の河床せん断力。

また、水流および流砂の連続の方程式は(12)および(13)式に示されるようである。

$$\frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 q_{sx}, q_{sy} ： x 、 y 方向の流砂量で容積単位、 λ ：河床砂の空隙率。

以上の(10)～(13)式が以後用いる基礎方程式である。

3. 河床せん断力、流砂量と基礎方程式の線型無次元化

(a) 河床せん断力

前報においては、流線に沿った河床せん断力を次式で表わした。

$$\tau = (1/2) f \rho q^2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 f ：摩擦抵抗係数。さらに、せん断流モデルの特徴を明らかにする目的から理論の簡単化を図るため、平均水深を D 、平均流速を U として、等流時河床勾配 I_0 を用い、

$$f = 2 \frac{\tau}{\rho q^2} = 2 \frac{\rho g D I_0}{\rho U^2} = 2 \frac{I_0}{F^2} \equiv f_0 = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (15)$$

と仮定した。ここに、 $F = U / \sqrt{gD}$ ：水流のFroude数、 f_0 ：等流時の摩擦抵抗係数。

この場合の摩擦抵抗係数は流速分布が対数則に従うとしたときには(16)式で見積もることができる。

$$f_0 = 2 \left(\frac{U_*}{U} \right)^2 = 2 \left(6.0 + 2.5 \ln \frac{D}{k_s} \right)^{-2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $U_* = \sqrt{g D I_0}$ 、 k_s ：砂粒粗度長。

このように前報では f を定数として取扱ったが、 f は一般に水流のReynolds数と相対粗度 k_s/h の関数

であり、Reynolds 数が大きいときにはほぼ相対粗度 k_s/h のみの関数となり、

$$f = f(k_s/h) \quad \dots\dots\dots (17)$$

である。従って、水深 h が変化すれば当然 f の値も変化するから、前報の仮定 ($f=f_0 = \text{const.}$) は厳密には正しくなかった。このため本報においては次のように改める。

まず、主流方向の河床せん断力は

$$\tau_x = f \frac{1}{2} \rho u^2 = \rho g h I_f \quad \dots\dots\dots (18)$$

と表わされる。ここに、 I_f : 摩擦勾配。

つぎに、河床の微小じょう乱の影響を受けた流速 u も初期の段階においては対数則で表わせると考えてよいから、(16) 式と同様にこの場合の摩擦抵抗係数は

$$f = 2 \left(\frac{u_*}{u} \right)^2 = 2 \left(6.0 + 2.5 \ln \frac{h}{k_s} \right)^{-2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

と表わされる。ここに、 $u_* = \sqrt{g h I_f}$ 。

ここで、局所水深 h は平均水深 D の近傍の値をとるから (19) 式を D のまわりに Taylor 展開すると

$$f = 2 \left(6.0 + 2.5 \ln \frac{D}{k_s} \right)^{-2} \left[1 - 5 \left(6.0 + 2.5 \ln \frac{D}{k_s} \right)^{-1} \cdot \frac{h-D}{D} + O \{ (h-D)^2 \} \right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

が得られる。この式に (16) 式を代入すると、局所摩擦抵抗係数 f は (21) 式となる。

$$f = f_0 \left[1 - 5 \sqrt{f_0/2} \frac{h-D}{D} + O \{ (h-D)^2 \} \right] \quad \dots\dots\dots (21)$$

この f を用い、同式中の $O \{ (h-D)^2 \}$ 以上の高次の微小項を無視すると、河床せん断力は次式で表示されることになる。

$$\tau_x = \rho \frac{1}{2} f_0 \left(1 - \alpha_f \frac{h-D}{D} \right) u^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 $\alpha_f \equiv 5 \sqrt{f_0/2} = 5 k_b^{1/2} / F$ 。

また、 y 方向のせん断力は次式で表わす。

$$\tau_y = (v/u) \tau_x \quad \dots\dots\dots (23)$$

(b) 流砂量

流砂量式には Einstein の掃流砂関数を用いる。

$$\phi_s = f(\tau_*) \cong 40 \tau_*^3 \quad (\text{ただし, } \tau_* \gg \tau_{*c}) \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $f(\tau_*)$: Einstein の掃流砂関数、

$$\phi_s = \frac{q_{sx} \cdot s}{\sqrt{g(s-1)} W_f d^{3/2}}, \quad \tau_* = \frac{\tau_x}{\rho g (s-1) d} : \text{無次元掃流力,}$$

$$W_f = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{g d^3 (s-1)}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{g d^3 (s-1)}} : \text{無次元沈降速度,}$$

d : 砂の粒径, ν : 水の動粘性係数, s : 砂の比重。

y 方向の流砂量は次式で表わす。

$$q_{sy} = (v/u) q_{sx} \quad \dots\dots\dots (25)$$

(c) 基礎方程式の線型無次元化

(10) ~ (13) 式に (22), (23), (24) および (25) 式を代入し、

$$\left. \begin{aligned} U &= U + u', & v &= v', & \text{河床じょう乱 } \eta &= \eta' \\ \text{水面変動 } \xi &= \xi', & \text{局所水深 } h &= D + \xi' - \eta' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

において方程式を微小変動量 (プライムの付いた量) について線形化をしたのち、座標軸、時間並びに微

小変動量を平均水深 D と平均流速 U とで無次元化を行い、無次元化する前と同じ記号 (たとえば $x/D \rightarrow x$, $u'/U \rightarrow u'$, ...) を用いると以下の線形化された無次元方程式 (27) ~ (30) 式をうる。

$$F^2 \frac{\partial u'}{\partial x} + 2 I_0 u' + \frac{\partial \xi'}{\partial x} - (1 + \alpha_f) I_0 \xi' + (1 + \alpha_f) I_0 \eta' = 0 \quad (27)$$

$$2 F^2 \frac{\partial v'}{\partial x} + I_0 v' + \frac{\partial \xi'}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \xi'}{\partial x} - \frac{\partial \eta'}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + 6 A_s \frac{\partial u'}{\partial x} - 3 \alpha_f A_s \frac{\partial \xi'}{\partial x} + 3 \alpha_f A_s \frac{\alpha \eta'}{\partial x} + A_s \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

ここに、(28) 式の左辺第 1 項の係数 $2 = 1 + \alpha_c$, $\alpha_c (= 1)$: 流線が曲率をもつことによる遠心力が水流に与える影響を示す。また

$$A_s \equiv 40 \tau_{*0}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{s-1} W_f}{(1-\lambda)^s} \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{F}, \quad \tau_{*0} = \frac{D I_0}{(s-1) d}$$

4. 3次元河床波の安定限界

河床面に与える微小じょう乱 η' とそれに伴う変動量 u' , ξ' , v' を次式で表わす。

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{2} \{ \hat{\eta}(y) e^{ik(x-ct)} + \text{Conjugate} \} \\ u' &= \frac{1}{2} \{ \hat{u}(y) e^{ik(x-ct)+i\varphi_1} + \text{Conjugate} \} \\ \xi' &= \frac{1}{2} \{ \hat{\xi}(y) e^{ik(x-ct)+i\varphi_2} + \text{Conjugate} \} \\ v' &= \frac{1}{2} \{ \hat{v}(y) e^{ik(x-ct)+i\varphi_3} + \text{Conjugate} \} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ここに、 $\hat{\eta}$, $\hat{u}$, $\hat{\xi}$ および $\hat{v}$ は y だけの関数で実数とする。また φ_1 , φ_2 , φ_3 は u' , ξ' , v' がそれぞれ η' に対してもつ位相差で前報で示したように基礎方程式自体にすでに内在している、 k は x 方向の無次元波数で $2\pi D/L$, L はじょう乱の波長、 C は複素位相速度 $C = C_r + iC_i$ で、実数部 C_r は河床じょう乱の移動速度を表わし、虚数部 C_i はその不安定性を示す。なお、Conjugate と記したものは右辺第 1 項の共役複素数の意味で例えば η' 式においては $\hat{\eta}(y) e^{-ik(x-ct)}$, $C^* = C_r - iC_i$ を表わす。

さて、問題は境界条件から決まる固有値 C を求めることである。そこで (31) 式を (27), (29), (30) 式および (28) 式に代入するとそれぞれ (32), (33) 式を得る。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \frac{d\hat{v}}{dy} \quad (32)$$

$$\{ ik(1 + \alpha_c) F^2 + I_0 \} e^{i\varphi_3} \hat{v} + e^{i\varphi_2} \frac{d\hat{\xi}}{dy} = 0 \quad (33)$$

ここに、 $a_{11} = \{ ik F^2 + 2 I_0 \} e^{i\varphi_1}$, $a_{12} = \{ ik - (1 + \alpha_f) I_0 \} e^{i\varphi_2}$, $a_{13} = (1 + \alpha_f) I_0$,
 $a_{21} = ik e^{i\varphi_1}$, $a_{22} = ik e^{i\varphi_2}$, $a_{23} = -ik$, $a_{31} = 6 ik A_s e^{i\varphi_1}$, $a_{32} = -3 ik \alpha_f A_s e^{i\varphi_2}$,
 $a_{33} = -ik C + 3 ik \alpha_f A_s$, $b_1 = 0$, $b_2 = -e^{i\varphi_3}$, $b_3 = -A_s e^{i\varphi_3}$ 。

この (32), (33) 式から $\hat{v}(y)$ に関する微分方程式 (34) 式を導き、それを境界条件: $y = 0$ および B/D で $\hat{v} = 0$ の許に解くと (36) 式が得られる。

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} + r^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

ただし,

$$r^2 = \{ ik(1+\alpha_c)F^2 + I_0 \} e^{-i\varphi_2 + i\varphi_3} A_0 / A_1, \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

(34) 式から

$$\hat{v} = v_0 \sin \frac{m\pi D}{B} y \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに, v_0 は v' の振幅で先の仮定により実数である。 $m = 1, 2, \dots\dots$ 。ところで, (36) 式が成り立つためには

$$r^2 = \left(\frac{m\pi D}{B} \right)^2 \equiv \beta^2 \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる必要がある。この条件から複素位相速度 C が決定される。(35), (37) 式から次式をうる。

$$C = C_r + iC_i = A_r \frac{N_r + iN_i}{D_r + iD_i} = A_r \frac{l_1 k + l_2 k^3 + i(l_3 - l_4 k^2)}{l_5 k + l_6 k^3 + i(-l_7 - l_8 k^2)} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここに,

$$\begin{aligned} l_1 &= (1 + 3\alpha_f)F^2\beta^2, \quad l_2 = 3(1 + \alpha_c)(2 + \alpha_f)F^2, \quad l_3 = (3 - \alpha_f)I_0\beta^2, \quad l_4 = 3(2 + \alpha_f)I_0, \\ l_5 &= F^2\beta^2 + (3 + \alpha_f)I_0, \quad l_6 = (1 + \alpha_c)(1 - F^2)F^2, \quad l_7 = 2I_0\beta^2, \\ l_8 &= \{ (1 - F^2) - (1 + \alpha_c)(3 + \alpha_f)F^2 \} I_0. \end{aligned}$$

前報はせん断流モデルの特徴を明らかにする目的でできるだけの簡単化を行ったため, そこで取扱った内容は $\alpha_c \rightarrow 0$, $\alpha_f \rightarrow 0$ とした場合のものに相当する。

さて, 複素位相速度 C において, 河床面の不安定性に関係するのは虚数部 C_i である。したがって, 河床の安定限界曲線 $F = F_c$ (河床面が中立, $C_i = 0$) は (38) 式から求まり次式で与えられる。

$$\phi_N(k, \beta, F, f_0) = N_1 D_r - N_2 D_i = A_1 k^4 - A_2 k^2 - A_3 = 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここに,

$$A_1 = l_4 l_6 - l_2 l_8, \quad A_2 = l_1 l_6 + l_3 l_6 + l_2 l_7 - l_4 l_5, \quad A_3 = l_1 l_7 + l_3 l_5.$$

(39) 式から求まった結果を図-2 に示す。(等流時の摩擦抵抗係数には移動床での平均的な値 $f_0 = 0.02$ をとった。ただし, $I_0 = (1/2)f_0 F^2$)

図-2(a) は α_c (遠心力からでてきた係数で 1.0 である) と α_f (局所摩擦抵抗の水深による変化からできたパラメーター) の安定限界に及ぼす効果を表わしている。また図-2(b) は $\alpha_c \neq 0$, $\alpha_f \neq 0$ の限界曲線と実験値²⁾⁻⁹⁾との比較を示す。

河床面の不安定領域は

$$F < F_c \text{ のとき } C_i > 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

で与えられるから, 実験値はすべて不安定領域にあることがわかる。 α_c , α_f を考慮することによって前報の結果よりも安定限界曲線としての精度が上がったように思われる。

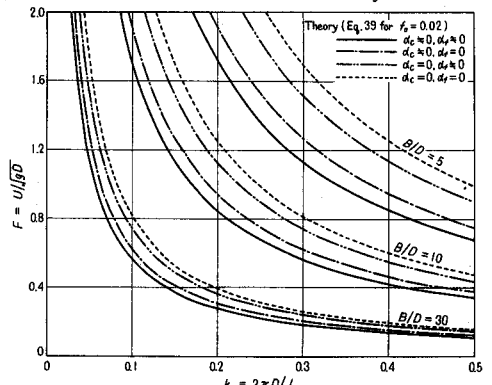


図-2(a) 安定限界曲線 ($F = F_c$)

5. 卓越蛇行波長

この節では、前報の統合波長という考え方をを用いず、本研究で取り入れた遠心力と局所摩擦抵抗の単列蛇行波長に及ぼす影響を調べ、さらに実際河川で認められている蛇行波長と河幅の関係式

$$L/B = 7 \sim 15 \quad \dots\dots\dots (41)$$

及び実験値との比較を行う。

河床じょう乱の初期における増幅率 kC_i は(38)式から求められて次式となる。

$$\begin{aligned} kC_i &= A_9 \frac{(N_i D_r - N_r D_i)k}{D_r^2 + D_i^2} \\ &= A_9 \frac{-A_1 k^6 + A_2 k^4 + A_3 k^2}{A_4 k^6 + A_5 k^4 + A_6 k^2 + A_7} \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

ここに、 $A_4 = l_6^2$, $A_5 = 2l_5 l_6 + l_8^2$, $A_6 = l_5^2 + l_7 l_8$, $A_7 = l_7^2$ 。

卓越波長(ただし、モード $m=1$ の単列蛇行)は、増幅率を最大にする波長と考えられるから $\partial kC_i / \partial k = 0$ の条件を用いると(43)式が得られる。

$$\phi_D(k, \beta, F, f_0) = E_1 k^9 + E_2 k^6 + E_3 k^4 + E_4 k^2 + E_5 = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

ここに、

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 A_5 + A_2 A_4, \quad E_2 = 2(A_1 A_6 + A_3 A_4), \quad E_3 = 3A_1 A_7 + A_3 A_5 - A_2 A_6, \\ E_4 &= -2A_2 A_7, \quad E_5 = -A_3 A_7. \end{aligned}$$

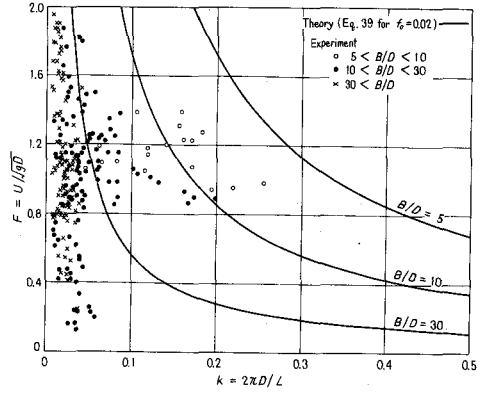


図-2(b) 実験値との比較

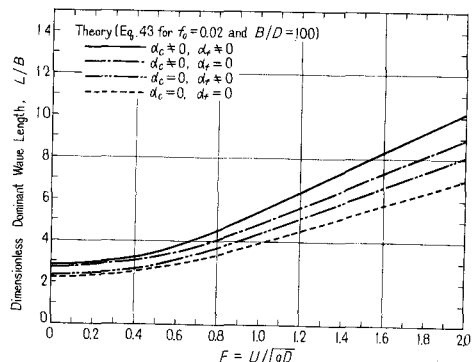
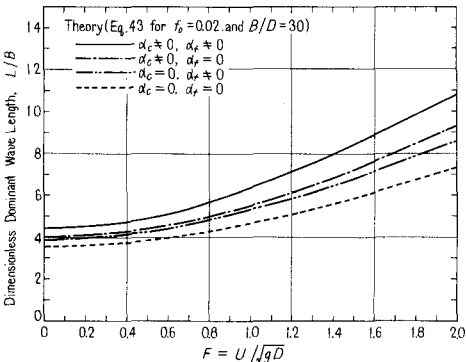
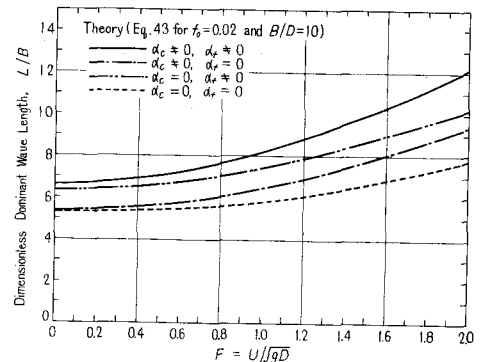
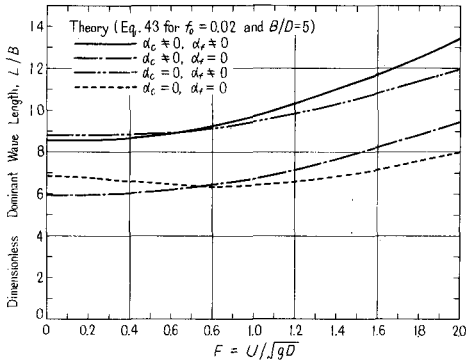


図-3(a) 単列蛇行の卓越波長

(43) 式から卓越波長 $L/B (=2\beta/k)$ を求めると、図-3 のようになる。この場合の計算においても $f_0=0.02$ とした。図-3(a) は α_c, α_f の組合せによる L/B の比較、図-3(b) は $\alpha_c \neq 0, \alpha_f \neq 0$ の場合の L/B と実験^{2)~9)} との比較を示す。また、図-3(c)、図-3(d) は著者別に実験値を整理し直したものである。これらの図によると、 α_c, α_f はいずれも卓越波長を増大させる方向に働いている。理論は実際河川の関係式 (41) 式の下限側を表わしているように思える。また、実験値と比較すると実験値のバラツキが非常に大きいこともあるが、ほぼ満足した結果を得ている。

ところで、理論上 L/B は $F, B/D, f_0$ の関数となっており、ここで注意すべきことは B/D が大きくなると L/B の値が小さくなるということである。これは B/D が大きくなると、単列交互砂州の波長には限界があって、複列交互砂州の形成が始まるということを暗示し

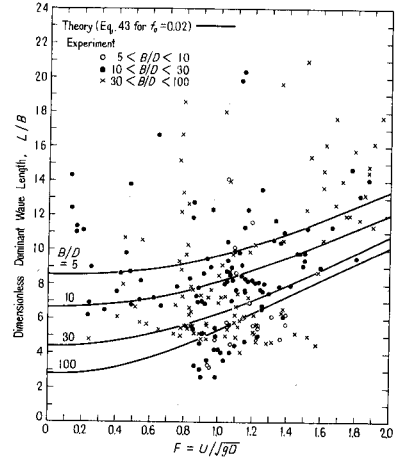


図-3(b) 実験値との比較

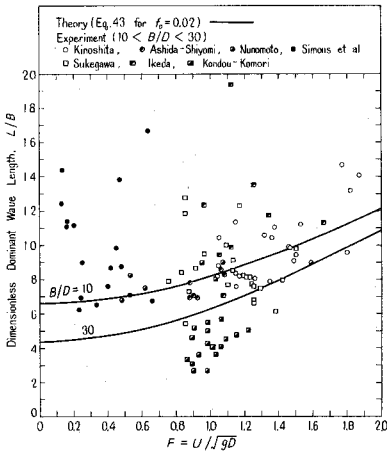


図-3(c) $10 < B/D < 30$

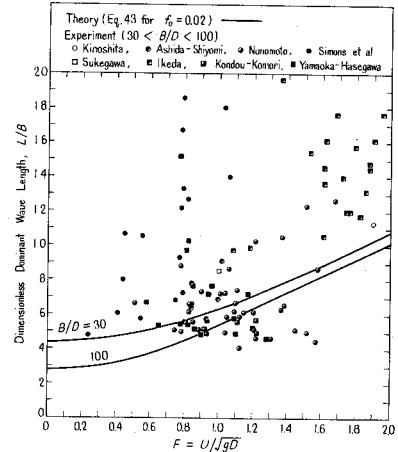


図-3(d) $30 < B/D < 100$

ているのではないかと考えられる。ちなみに、従来提案されている L/B 型以外の蛇行波長式の代表的ものを L/B 型に書き直してみると下の表-1 のようになる。

表-1 蛇行波長式

- | | |
|---|--|
| 1. $L = K_1 Q^{1/2}$ 型 (Ferguson, Inglis, その他) ^{11), 14), 17)} | $\rightarrow L/B = K_1 g^{1/2} D^{1/2} (D/B)^{1/2} F^{1/2}$ |
| 2. $L/d = K_2 (Q^2/gd^5)^{0.257}$ 型 (Charlton-Benson, ¹⁰⁾ 増田等 ¹⁶⁾) | $\rightarrow L/B = K_2 (D/d)^{0.255} (D/B)^{0.496} F^{0.514}$ |
| 3. $L/\sqrt{BD} = K_3 F^{1/2}$ 型 (藤芳, Anderson, 林) ^{13), 15)} | $\rightarrow L/B = K_3 (D/B)^{1/2} F^{1/2}$ |
| 4. $LI_0/D = K_4 F^2$ 型 (Hansen, ¹²⁾ 林・尾崎 ¹⁸⁾) | $\rightarrow L/B = K_4 F^2 (BI_0/D)^{-1} = 2K_4 (Bf_0/D)^{-1}$ |

表からもわかるように従来の蛇行波長式も L/B 型に直すと、 B/D が大なる程 L/B が小さくなっていくようである。

6. 結 び

本研究では、基礎方程式に遠心力と摩擦抵抗係数の水深による変化を取り込んで、それぞれの単列蛇行の卓越波長に及ぼす効果を明らかにし、前報での統合波長という考え方をいわずにどの程度実験値と実際の河川の蛇行波長式を説明しうるかを検討した。その結果、遠心力、および摩擦抵抗係数の変化を考慮すると卓越波長は増大する。図-3(a)をみると、 B/D の値によって複雑な変化を示しているが、 B/D が小さいほど増加の絶対量は大きい。しかし、波長の伸び率はFroude 数を一定とすればほぼ一定で、たとえば $B/D > 10$ のとき $F = 0.8$ で $\alpha_c \neq 0$ （遠心力による）、 $\alpha_f \neq 0$ （摩擦抵抗の変化による）の場合には約30%~40%増大する。同様に $\alpha_c \neq 0$ 、 $\alpha_f = 0$ では約15%~20%増、 $\alpha_c = 0$ 、 $\alpha_f \neq 0$ では10%~25%増となっている。しかし、 B/D が小さくなり、 $B/D = 5$ 程度となるとFroude 数が小さいところで遠心力は逆の傾向を示すようになっていく。

また、理論（ただし、 $\alpha_c \neq 0$ 、 $\alpha_f \neq 0$ および $f_0 = 0.02$ ）と実験値との比較では、交互砂州の複雑な性質から考えるとき、ほぼ満足に近い結果となっているように思われる。しかし、実際の河川で認められている蛇行波長の関係式(41)式と比較すると、理論は(41)式の下限側を与えるものとなっているが、実際の河川ではこのような線形理論解で与えられるような波長のものが初めに発生し、これが次第に生長して非線形項が利くようになり、波長が伸びて行くことが考えられる。

しかし、卓越波長と B/D との関係については従来提案されている蛇行波長式（表-1）はいずれも B/D が大きくなる程小さくなることを示しているが、本理論もそれらと一致した傾向を示している。

付 記

本研究では、水深方向に平均化してあるモデルのため河床面上と水表面上の流線は同位相として取扱ったが、実際には、両流線間に位相差がある。

底面付近の viscous layer の中では、水流の慣性項より圧力勾配の項の作用が支配的である。このため、viscous layer 内には水路横断方向の水面勾配による横方向流速 $\tilde{v}$ を生じコア領域の v との間に縦方向の二次流を形成する。いま、横断方向の河床せん断力、掃流砂量に関係する横方向の流速はこの $\tilde{v}$ であると考え、これは v に対して位相差が $\pi/2$ となる。このとき、流線は図-5となる。

$$\tilde{v}(kx, y, t) = \alpha v(kx + \frac{\pi}{2}, y, t)$$

ただし、 α ：係数で $0 < \alpha < 1$ と考え、この $\tilde{v}$ に着目することにより本論の横方向の河床せん断力、掃流砂量の式(23),(25)に代えて次式を用いてみる。

$$\tau_y = (\tilde{v}/u) \tau_x = \{\alpha \cdot v(kx + \pi/2, y, t)/u\} \tau_x,$$

$$q_{sy} = (\tilde{v}/u) q_{sx} = \{\alpha \cdot v(kx + \pi/2, y, t)/u\} q_{sx}.$$

途中計算は省略するが、上式を使うと、安定限界曲線は波数に関する5次代数方程式、卓越波長は10次代数方程式で表わされる。結果のみを図-6、図-7に示す。ただし、 $\alpha_c \neq 0$ 、 $\alpha_f \neq 0$ の場合であり、 $\alpha = 0, 0.1, 0.4, 1.0$ とした。これらの図からみられるように、ここで取り入れたような二次流は卓越波長にはあまり関りがあるとは言えないことがわかる。

しかし、この結果で興味を引くことは、 B/D の値が大きい場合と小さい場合では河床面の安定限界および蛇行波長に及ぼす二次流の影響の現れ方が逆転していることである。すなわち、 B/D が小さいときには、上述のような二次流があることによって河床面の不安定領域は広くなり、卓越波長は減少する。この場合の

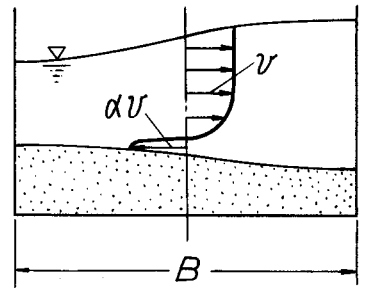


図-4 二次流

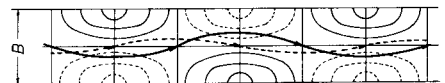


図-5 河床じょう乱および流線（上層（—）
底層（…））

二次流は比較的波長の短いじょう乱をも成長させるものと考えられる。したがって、このことから卓越波長は二次流のために短くなるのであろう。

B/D が大きい場合には、上述と反対の効果が作用するため卓越波長が伸びると思われる。ここで問題は、 B/D と $\tilde{v}$ の関係が未だに明らかになっていないことである。また $\alpha = 0$ のときには、横断方向の流砂量成分と河床せん断力はともに 0 となるが、この場合にも河床面は不安定となり、不安定領域と卓越波長が存在する。

今後、上に述べた二次流と B/D との関係の研究を進めることによって複列交互砂州の形成条件を明らかにして行きたい。

参 考 文 献

- 1) 林 泰造・尾崎幸男：河床安定理論の立場からみた河川蛇行の卓越波長について，第20回水理講演会論文集，1976年2月，pp.89-96.
- 2) 木下良作：石狩川河道変遷調査—参考編一，科学技术庁資源局資料，第36号，1961年12月.
- 3) 芦田和男・塩見靖国：水路における砂礫堆の水理特性について，京大防災研究所年報第9号，1966年3月，pp.457-477.
- 4) 布本 博：河川蛇行性の研究，中央大学修士論文，1967年3月.
- 5) Chang, H. Y., Simons, D. B. and Wolhiser, D. A. : Flume experiments on alternating bar formation, J. of WW Div., Proc. ASCE, Feb., 1971, pp.155-165.
- 6) 鮭川 登：直線河道における蛇行現象に関する水理学的研究，科学技术庁資源調査所資料，1971.
- 7) 池田 宏：実験水路における砂礫堆とその形成条件，地理学評論， ㉞ 46-7, 1973.
- 8) 近藤幸雄・小森保数：交互砂州に関する基礎的実験，北海道開発局土木試験所月報， ㉞ 251, 1974年4月.
- 9) 山岡 勲・長谷川和義：自由蛇行流路の流体抵抗について（改訂），文部省科学研究費総合研究(A)最終報告書（研究代表者 岸 力），1975年3月.
- 10) Charlton, F. G. and Benson, R. W. : Effect of Discharge and Sediment Charge on Meandering of Small Streams in Alluvium, Hydraulics Research Station, Wallingford, England, January, 1966, pp.285-290.
- 11) 吉川秀夫：河川工学，朝倉書店，1966年6月，p.136.
- 12) Hansen, E. : On the formation of meanders as a stability problem, Basic Research Progress Report ㉞ 13 Hydraulik Laboratory, Technical University of Denmark, 1967.
- 13) 林 泰造：蛇行論，水工学シリーズ70-16，土木学会水理委員会，1970年8月.
- 14) Graf, W. H. : Hydraulics of Sediment Transport, McGraw-Hill, 1971.

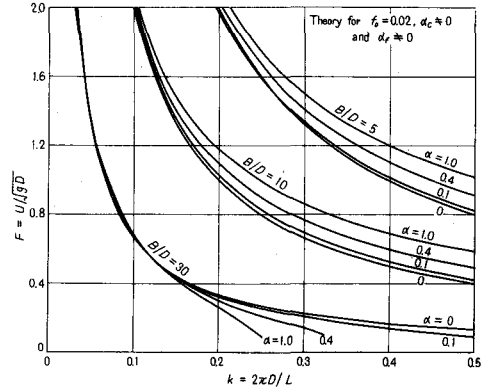


図-6 安定境界

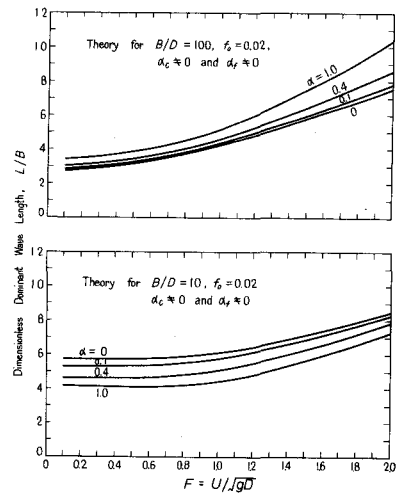


図-7 卓越波長

- 15) 林 泰造 : On the cause of meandering of rivers, IAHR Symp. on River Mechanics, Bangkok, 1973, Vol.1, pp.667-678.
- 16) 増田 隆・上月 武・後藤 哲 : 護岸根固工に関する調査研究, 北海道開発局土木試験所月報 253, 1974 年 6 月.
- 17) 高山茂美 : 河川地形, 共立出版, 1974 年 6 月, pp.220.
- 18) 林 泰造・尾崎幸男 : 河川蛇行の成因と卓越蛇行波長, 第 29 回年次学術講演会概要集 II - 121, 1974 年 10 月, pp.269-270.