

水温予測への統計的制御理論の適用

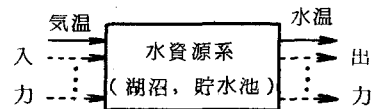
豊田工業高等専門学校 正会員 ○大 野 俊 夫

豊田工業高等専門学校 正会員 渡 辺 興 作

1. はしがき

河川、湖沼、貯水池などの水資源系の水温は上下水道、かんがいなど多くの分野に影響を与える。たとえば飲料水の立場からは9～12℃が最もよく、5℃以下になれば健康上有害であり、15℃以上になるとまづい。また水温は水稻の発育には大きい要素であり、農業用貯水池では水温を考慮してできるだけ温い表層水を取水して利用している。従って、その水温予測は興味ある問題である。

本報告では、水資源系を一つのシステムとして、その温度に関する動特性の一表現であるインパルス応答モデルのパラメータを、観測データの時系列を基にして推定しシステムの特性を検討するとともに水温予測をおこなった。水温予測をおこなうのにインパルス応答モデルは有用であることが予想されたので、正確には水温予測は多入力で単出力のシステムの同定問題であるが簡単化して、システムへの入力は気温であるとし水温をシステムの出力とした場合がこの問題の第1近似であると考えてシステムのインパルス応答を観測データをベースにして推定した。



図一 水資源系の入力と出力

ここに同定とは、対象としているシステムのある種の挙動に等価なシステム（数学モデル）を入力と出力のデータ時系列をベースにして決定することである。同定に用いる気温およびシステムの水温を数日間にわたって記録すると、これらの観測データはランダムに変動しノイズを含んでいることは明らかである。それゆえノイズを考慮した統計的自動制御理論を適用し、システムのインパルス応答を電子計算機を使って推定した。シミュレーション・スタディの段階、室内での水槽を利用した模型による基礎的段階の実験を実施した結果について報告する。

2. 水資源系の水温に関する同定

水資源系（湖沼、貯水池、河川など）は地球という広大な自然システムの中のサブシステムとして環境との間で、あるいはサブシステム相互間でたえず物質とエネルギーなどを交換している。この水資源系というシステムは物質とエネルギーを一時的に貯えることができるので、システムの内部状態の変数である水位、水質、水温などは現在の入力ばかりではなく過去の入力の影響をも受け入出力の間で遅れを生じる。ここにこれらの量の予測という問題が生じる理由がある。

システムの同定の目的はシステムを望ましい状態にするためのシステムの設計、操作を行うことであるのでモデリングの良否は制御系の設計、操作によって判断されねばならないが、本報告ではまずシステムの現象解析の立場に立ってインパルス応答モデルによって水資源系の水温に関する同定をおこなった。自然システムの中に人工システムが建設されると、それらは互いに相互作用しあうことを考慮すれば、自然界の種々のシステムの同定は全システムの挙動を検討するとき不可欠であろう。

水資源系の水位にも関係する河川の流出解析⁽¹⁾⁽²⁾ および水質に関する解析⁽³⁾ は研究が活発におこなわれ、多くの成果が得られているが水資源系の水温に関する動特性の報告はなされていないと思われる。そこで水資源系の水温に関する動特性をインパルス応答の形で推定するための基礎実験を以下にのべるような同定原理にもとずいておこなった。

2-1: 水資源系の水温のモデリング

現実のシステムのモデルをつくる正統的な方法は、システムの物理的、化学的、生物学的知識をベースにして理論的にモデルを構成してゆくことである。しかし現実の大きな規模のシステムでは、理論的展開に先だって、まず観測データの時系列よりシステムの動特性の1つの表現であるインパルス応答を求め、システムの動特性モデルをうるのが適切なアプローチであろう。このような手法をとるのは、現実の水資源系はある与えた環境におくことは物理的にはほとんど不可能であり、動特性を測定するための試験信号を加え応答を測る方法は水温に関してはできないので、特に試験入力を加えず実際のシステムの観測データから対象の動特性を推定せざるをえないからである。

ここではシステムの同定といえば観測データをベースにしてシステムの数学モデルを確定的なものにすること(モデリング)をいう。同定問題の大部分の方法は、あらかじめ数学モデルの構造を定めておきモデルに含まれるパラメータを推定するものである。⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 本研究でも式(1)のような線形推定のモデルの構造を定めておき、モデルに含まれる未知パラメータ $q(m \cdot \Delta T)$, ($m=0, 1, 2, \dots, k$) を最小2乗法で推定する。⁽⁷⁾⁽⁸⁾

$$y(n) = \sum_{m=0}^k q(m \cdot \Delta T) \cdot x(n-m \cdot \Delta T) \cdot \Delta T + Z(n) \quad (1)$$

ここに、 $x(n)$ は時刻 n における水資源系に接する気温(システムへの入力信号)、 $y(n)$ は水資源系の水溫(システムの出力信号)、 $q(m)$ はシステムのインパルス応答で、 k は $q(m)$ を完全に特性づけるために必要なデータ・サンプリング時間 ΔT の数、 $Z(n)$ はレムナント(remnant)と称する出力成分で入力 $x(n)$ と線形相関のない雑音である。

2-2: インパルス応答 $q(m)$ の最小2乗推定

式(1)を連立方程式にして $q(m)$ を定めることは可能であるが、相関関数を使って $Z(n)$ の影響を平均化し、 $x(m)$ による応答成分のみ抽出するいわゆる相関関数による同定法は式(2)の Wiener-Hopf の積分方程式を変形した $k+1$ 元連立一次方程式から求めた $q(m)$ の方がより有効である。

$$\hat{\rho}_{xy}(n) = \sum_{m=0}^k \hat{q}(m \cdot \Delta T) \cdot \hat{\rho}_{xx}(n-m \cdot \Delta T) \cdot \Delta T \quad (n=0, 1, \dots, k) \quad (2)$$

ここで、 $\hat{\rho}_{xy}(n)$ は式(3)で定義される入出力信号の相互相関関数、 $\hat{\rho}_{xx}(n)$ は式(4)で定義される入力信号の自己相関関数、 $\hat{q}$ はシステムのインパルス応答の推定値で、 N は観測データの数である。

$$\hat{\rho}_{xy}(n) = \sum_{m=0}^N x(m \cdot \Delta T) \cdot y(n-m \cdot \Delta T) / (N+1) \quad (3)$$

$$\hat{\rho}_{xx}(n) = \sum_{m=0}^N x(m \cdot \Delta T) \cdot x(n-m \cdot \Delta T) / (N+1) \quad (4)$$

式(2)は式(1)での $Z(n)$ の2乗平均値を最小にするように $q(m)$ を決定するという汎関数の極値問題の解で $k+1$ 元連立一次方程式になっている。⁽⁴⁾⁽⁵⁾ この方程式を解いて $q(m)$ を定めた段階でシステムの同定は終了し、システムの数学モデルがえられたことになる。

3. 水槽模型による実験

以上にのべた方法および現実の水資源系への実際への適用性を確かめるため、図-2に示すような簡単な模型による実験を行った。すなわち水資源系の模型である水槽の水溫およびそれに接する部分の気温を5日間わたって2素子温度記録計で記録した。水槽の材質は硬質塩化ビニール製で $30 \text{ cm} \times 38 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$ で水は水道水を 3.5 kg 入れた。水深は 2.8 cm となった。使用したサーミ

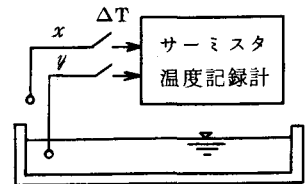


図-2 実験用水槽による実験

スタ温度計の精度は $\pm 0.2^{\circ}\text{C}$ である。感熱部の熱容量は小さくこれによる誤差は無視できる。また実験記録中減少した水は、同じ室内においた水を追加し一定の水量で測定をおこなった。

3-1: データの長さおよびサンプリング時間

観測データのもっている本来の性質を失なうことなく、システムの現象を正確に把握するためにデータのサンプリング時間 ΔT およびデータ長 N をつぎのように決めた。⁽⁴⁾記録されるであろうデータが不規則ではあるが大体1日を周期として変化していることは推察できるので、その周期を T_0 、振幅を x_0 とすると入力の基本波成分は式(5)と表わされる(図-3)。

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (\omega = 2\pi/T_0) \quad (5)$$

その自己相関関数 $\hat{\phi}_{xx}(n)$ は、

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{xx}(n) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_0 \sin(\omega t + \theta) \cdot x_0 \sin(\omega(t+n) + \theta) dt \\ &= \frac{x_0^2}{2} \cos \omega n - \left(\frac{x_0^2}{2T} \frac{\sin(2\omega T) \cdot \cos(\omega n + 2\theta)}{\omega} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

となる。 T が有限な場合にはカッコ内の誤差が入ってくるのでこれを ϵ とかくと、 $\epsilon \leq x_0^2/2\omega T$ となるすなわち、 $\hat{\phi}_{xx}(n)$ の1周期 $2\pi/\omega$ ごとに $1/\omega T$ の相対誤差が入ってくるので、これを5%以下にするためのデータ長 T を求めると、 $1/\omega T \leq 0.05$ であればよいので、 $T \geq 1/(2\pi/T_0) \cdot 0.05 = 3.3 T_0$ となる。したがって概周期 T_0 の4倍以上の時間長があればよいことになる。そこで $T = 5$ 日とした。

データ・サンプリング時間 ΔT は、システムの時定数 T_d の数分の1にとれば十分であるので、システムの T_d を1~2時間と予想して $\Delta T = 30$ 分としたので観測データ数は $N = 240$ となった。

3-2: システムの観測時系列

図-3に $\Delta T = 30$ 分で $N = 240$ とした実験室内の水槽の気温、水温の観測時系列を示す。記録温度計は、あらかじめ標準温度計で校正し $\pm 0.2^{\circ}\text{C}$ 以内に読みとれることを確認してから使用した。この図よりわかることは、気温は大体1日を周期とする基本波成分に不規則成分が重なって変動し、これに少し遅れて水温が追従して変動していることである。このことはシステムがエネルギーを貯えることができるということの現れであり、システムの規模によって若干の差はあっても同様の結果が得られることであろう。5日間の平均の気温および水温はそれぞれ 19.9°C と 17.4°C でこの値をほぼ中心に $\pm 2 \sim 3^{\circ}\text{C}$ の振幅で変動しているので、 $\hat{\phi}_{xx}(0)$ の値は式(6)より大体3程度になることになる(図-4)。

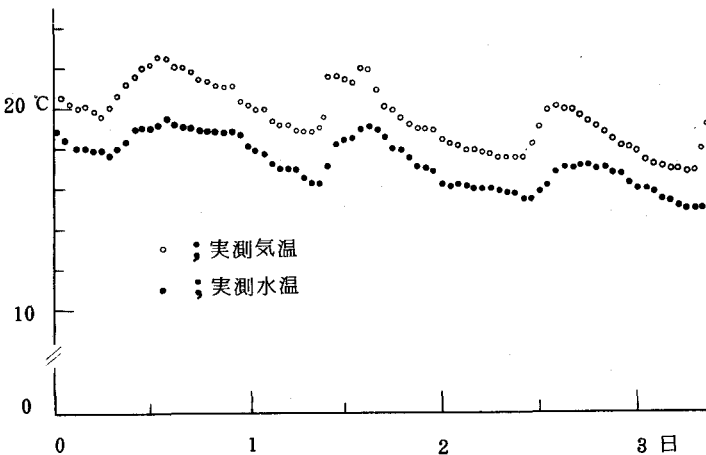


図-3 実験用水槽の気温、水温の観測時系列

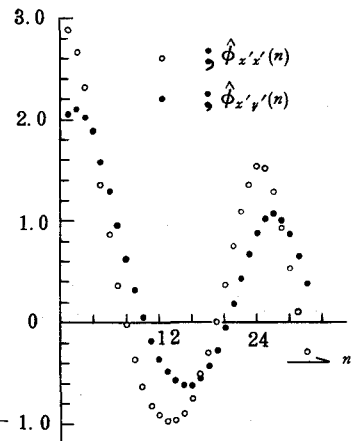


図-4 気温、水温の相関関数

図-4に平均値からの変動分の気温の自己相関関数 $\hat{\rho}_{xx}$ 、および平均値からの変動分の気温-水温の相互相関関数 $\hat{\rho}_{xy}$ をそれぞれ式(3)(4)によって計算した結果をプロットした。これから、気温は1日を周期とする成分をはっきり示していることは物理的に説明のつくことで、 $\hat{\rho}_{xy}$ が $\hat{\rho}_{xx}$ に比べて2時間程おくれで最大になるのは、水温が気温より遅れて周期変動していることに対応している。

3-3: 相関関数による同定

式(2)で気温 x の自己相関関数 $\hat{\rho}_{xx}(n)$ と気温 x と水温 y の相互相関関数 $\hat{\rho}_{xy}(n)$ を形式的に計算したものをを使って連立一次方程式を解くと、掃出し法のピボットがゼロになるなど問題がある。それは気温の変動が小さければ小さいほどその傾向は大きく式(2)での同定はできなくなる。

実際のデータ処理では、入力、出力ともつぎのような入出力の平均値からの変動分についての相関関数を使う。 $x'(t) = x(t) - \overline{x(t)}$ および $y'(t) = y(t) - \overline{y(t)}$ についての対応した相関関数をそれぞれ $\hat{\rho}_{x'x'}$ および $\hat{\rho}_{x'y'}$ とすれば式(2)はつぎのように変形される。

$$\hat{\rho}_{x'y'}(n) = \sum_{m=0}^k \hat{g}(m \cdot \Delta T) \cdot \hat{\rho}_{x'x'}(n - m \cdot \Delta T) \cdot \Delta T \quad (n = 0, 1, \dots, k) \quad (7)$$

$$\overline{y(t)} / \overline{x(t)} = \sum_{m=0}^k \hat{g}(m \cdot \Delta T) \cdot \Delta T \quad (8)$$

式(2)を解く代わりに入出力のそれぞれの平均値からの変動分についての同様の $k+1$ 元連立一次方程式を解き $\hat{g}(m \cdot \Delta T)$ を決定すれば上記のような問題は少なくなるが式(8)の条件が必要である。式(7)を解く方法としては自己相関関数の対称性より $\hat{\rho}_{xx}(n) = \hat{\rho}_{xx}(-n)$ であるので方程式の係数行列は対称行列となるのでこれらの条件のときは有利である平方根法で式(7)を解いた。ここに k の値は、あらかじめシステムの時定数はわからないので $k=7$ から19までそれぞれについて式(7)を解いて $\hat{g}$ を推定した結果の一部を図-5に示す。これらの $\hat{g}$ はいずれも式(8)を満足しなくてはならないので、式(8)の右辺の値をそれぞれの k の値について計算してみると $k=6, 9, 15$ のときそれぞれ0.774, 0.797, 0.850, となり式(8)の左辺の値0.876に最も近い $k=15$ を決めた。ここで k の値をこれ以上に大きくとっても式(8)の右辺の値はほとんど増加せず、パラメータのみふえて k の値を大きくする利点はない。

4. 水槽模型のシステムの水温同定結果

水槽実験の観測データより推定されたシステムのインパルス応答 $\hat{g}$ の形は一次おくれ系のそれに近く、その時定数 T_a は75分ぐらいになる。よってこのシステムの応答 $\hat{g}(t)$ が減衰してゼロになるまでの時間(整定時間)を T_0 とすると $T_0 \sim 4 \cdot T_a = 300$ 分となる。図-5をみるとこの時間を経過する付近で $\hat{g}$ はほとんどゼロとなっている。

上述の統計的自動制御理論の相関関数法によるシステムの同定の結果(図-5)は一次おくれ系の特徴を示している。このことはある程度は物理的にも予測されたものの詳細なことは不明であった。この同定結果の $\hat{g}$ が正しくシステムの動特性を表わしているかを $\hat{g}$ からつぎの式(9)でステップ応答 $\hat{R}(n)$ を計算し、実験で求

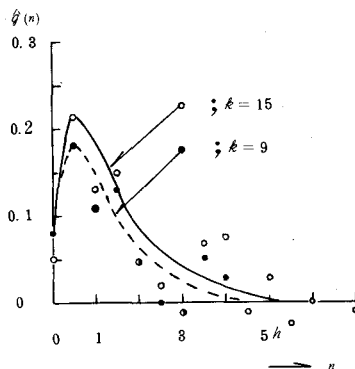


図-5 インパルス応答

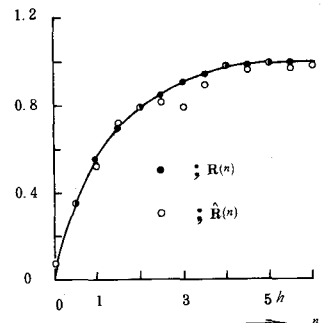


図-6 ステップ応答

めたステップ応答 $R(n)$ と比較検討することにする。

$$\hat{R}(n) = \sum_{i=0}^n \hat{g}(i \cdot \Delta T) \cdot \Delta T \quad (9)$$

システムのステップ応答 $R(n)$ を恒温実験室で測定した。この恒温実験室の気温は $17 \pm 0.2^\circ\text{C}$ に制御されている。この室内へ先の水槽を入れて、そのステップ応答を 5 時間測定記録した。記録開始時の水温は 2.5°C であったので 14.5°C の温度差をシステムに与えたときのステップ応答を記録したことになる。図-6 にその測定したステップ応答 $R(n)$ と相関関数法で同定し推定したステップ応答 $\hat{R}(n)$ をそれぞれ規格化して示した。この図から、今回の同定法は正しくシステムの動特性を推定していることが確認できたといえる。

小規模な水槽の模型での実験であるので、このようにステップ応答を測定し相関関数による同定法のチェックができた。しかし現実の水資源系のシステムにステップ状入力を加えその動特性を測定することは物理的に不可能であるので、相関関数による同定法のようなシステムの観測時系列データのみからシステムを同定する方法が唯一の同定法であるといえるだろう。ただデータの処理量については他の同定法たとえばステップ応答法、周波数応答法などより複雑であるが電子計算機を使用すれば問題は少ないので大規模システムの同定法としてはすぐれていることがわかる。

5. 水温の予測

システムの同定の結果 $\hat{g}$ を使ってシステムの ℓ 単位時間先の未来値 $\hat{y}(n+\ell)$ を現在までの観測気温 $x(n)$, $x(n-1)$, $\dots$, $x(n-k)$ にもとづいて推定する予測器として式(10)を採用してみる。

$$\hat{y}(n+\ell) = x(n) \sum_{m=0}^{\ell-1} \hat{g}(m \cdot \Delta T) \cdot \Delta T + \sum_{m=\ell}^k \hat{g}(m \cdot \Delta T) \cdot x(n+\ell-m\Delta T) \cdot \Delta T \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (10)$$

式(10)で $\ell=0$ のときはフィルタ問題であり式(1)となり、 $\ell \geq 1$ のとき予測問題となっている。式(10)の予測器は気温 x の予測をしないで時刻 n , $n+1$, $\dots$, $n+\ell$ の間は $x(n)$ と一定であるとしたので、 ℓ が大きくなると推定の確度は低くなることが予想される。

一つの試算として、 $\ell=0, 1, 2, 3, 4$ 単位時間 ($\Delta T=30$ 分) 先の水温予測を式(10)を使って電子計算機でおこなった結果の一部を図-7 に示し、実測の水温と比較してみる。ただし $k=15$ とした。図で $\ell=0$ の場合は気温 x の予測が正しくできたときの水温予測で、この方式では最良の予測結果を与える限度を示す。 $\ell=1$ の場合は単位時間 $\Delta T=30$ 分としてあるので、現在までの実測の気温 x を使って 30 分後の水温 $\hat{y}$ を予測している。同様にして、 $\ell=2, 3, 4$ の場合はそれぞれ 60 分後、90 分後、120 分後の水温予測をおこなっている。

予測の評価関数として、実測水温 y と式(10)による予測水温 $\hat{y}$ との残差の標準偏差 $S=\sqrt{V}$ を式(11)で計算した。ただし、 $k=15$ 、観測のデータ数 $N=240$ である。

$$V(\ell) = \sum_{n=k+1}^{N-\ell} [y(n+\ell) - \hat{y}(n+\ell)]^2 / (N-k-1) \quad (\ell=0,1,2,\dots) \quad (11)$$

予測時間 ℓ を $0, 1, 2, 3, 4$ 単位時間としたとき、 $S(\ell)$ の値はそれぞれ 0.29 , 0.30 , 0.55 , 0.76°C となった。これから 30 分先の水温は現在までの気温とシステムの動特性 $\hat{g}$ にもとづいて $\pm 0.3^\circ\text{C}$ 程度で予測できるが、2 時間後となると予測精度は半減することがいえる。これは気温の時系列データが周期をもつ確率過程であることを応用すれば気温を予測でき、更に水温予測の精度は向上できる。

6. あとがき

これまで述べた相関関数を用いるシステムの同定法、水温の予測法は Wiener の提示した統計的自動制御理論に基礎をおいているがシステムの特徴をよく表現し、この同定法の現実の水資源系への適用の実用

性について明るい見通しを与えるものである。

このようなシステムの同定問題は実際のシステムを対象とした問題であるので、一般論ではなく具体的なシステムの解析を意図する実践的研究は重要であると考えられる。この立場では理論は対象のシステムを追及するための一手段と考えられる。したがって今回のWiener理論以外の現代制御理論の立場からのアプローチも

実施し比較検討する必要がある。しかし、基本的なシステムの特徴は、同定結果および予測結果の一致などから、Wiener理論では捉えられたものとみてよい。

本報告では、システムを単入力、単出力問題に簡単化し、システム内の状態を水温1つで代表させたが、より大きい規模の水資源系の場合には多入力、多出力の問題となることが予想されるが、熱については線形性は成立つので、同様の拡張した同定法のシステムの動特性への適用については検討中である。

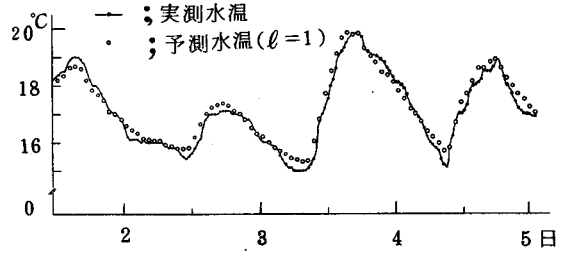


図-7 気温を使った水温予測

参考文献

- 1) 日野幹雄：洪水予測における同定問題と適応制御について，第15回水理講演会講演集，1971．
- 2) 高棹琢馬・池淵周一：分布形線形応答モデルによる長期流出予測，第20回水理講演会論文集，1976．
- 3) 市川 新：水質ハイドログラフに関する研究，第19回水理講演会論文集，1975．
- 4) 磯部 孝編：相関函数およびスペクトル，東京大学出版会，1968．
- 5) 榎本義一・添田 喬・中溝高好・統計的自動制御理論，コロナ社，昭41年．
- 6) W.D.T.Davies：System Identification for Self-Adaptive Control，Wiley-Interscience．1970．
- 7) M.J.Levin：Optimum Estimation of Impulse Response in the Presence of Noise，Trans. IRE，CT-7-1，50/56，1960．
- 8) 鈴木 胖・藤井克彦：プロセス同定問題への最小2乗推定法の応用，計測と制御，第10巻8号，昭和46年．