

乱流拡散における Lagrange 相関と Euler 相関

東京工業大学 工学部 工博 日野 幹雄

国立公衆衛生院研修生 工修 池田 信巳

東京都庁 伊藤 雄二

要旨: 乱流拡散におけるシミュレーションの必要性和そのいくつかの方法について述べたのち, Euler スペクトルをもとにした粒子の Lagrange 的挙動を追跡する二方法を詳述する。このシミュレーションの結果, Lagrange 相関と流下座標系からみた Euler 相関とはほぼ相等しいことを示し; また, この方法による one-particle および two-particle diffusion のシミュレーションの結果を示す。

1. 乱流拡散のシミュレーションの必要性

1921 年 Taylor により乱流拡散が理論の対象になって以来, 種々の拡散の問題が論じられて来た。例えば, Taylor 流の one-particle analysis と Richardson 流の neighbour diffusion あるいは two-particle analysis の二つの立場; 濃度変動についての Gifford その他による fluctuating plume model や小倉の解析; Lagrange 相関と Euler 相関あるいはそれらの macro-, micro-scales の関係; 乱流拡散に対する密度・温度成層の効果; 乱流拡散における流速分布のシア効果; さらに最近では相変化の考慮やエロロジの立場からの理論等々を挙げることができる。

乱流拡散には, いわゆる乱流統計理論から粒子の分散その他粒子の変位のモーメントを確率的に取扱う場合と, Fick の拡散方程式の数学的解を求める決定論的立場がある。多くの場合, 我々は両者の立場を相補的に使って問題の解決に当たっている。しかし, この2つの立場は必ずしも密接なものではない。ところで, 最近水域とくに海洋での拡散が問題とされることが多くなって来た。海洋は拡散能や拡散速度が大気の場合に比べて低く, かつわれわれの感知基準時間や測定時間内の濃度の変化が小さいために瞬間濃度分布が問題とされることが多い。瞬間パッチの拡散は, 遷移確率に基づく Joseph-Sendner-Okubo の拡散方程式の解として求められる。この式の解には Joseph-Sendner の解 (1958), Ozmidov の解 (1958), Okubo の解 (1962) 等々 5 ~ 6 個の解が求められている。Okubo によれば, これらの解は拡散方程式の係数 (分散速度 $\approx$ 拡散係数) の関数形の仮定により, “拡散速度” 形の解と “エネルギー逸散率パラメーター” 形の解の2群に分類できる。これらの解を海洋における拡散実験 (染料流し) と比較すると一長一短でいずれの場合にも良く当てはまる式はないし, なによりも実験データの質も量も十分というわけではない。また, 方程式中の係数 (分散速度, 拡散係数) を two-particle analysis の理論と結び付けようという試みもあるが十分にはいかないようである。

最近, 日野 (1974) は乱流拡散の計測における濃度変動に関して “particle history tracing” 理論を提案したが, これを具体的に計算するには Lagrange 相互時空相関関数の知識を必要とする。単純な Lagrange 自己相関の測定も容易でない現在, これを実験的に求めることはかなり困難である。

海洋拡散の瞬間パッチや濃度変動計測の問題の解決には, 信頼性の高い拡散および Lagrange 相互時空相関のデータを必要とする。Euler 相関や Euler スペクトルについては測定が比較的容易になって来ており, かつ理論も確立されているので, これをもとにした Lagrange 場のシミュレーションが可能になれば, 上記の問題にも有用であろう。本研究は FFT (Fast Fourier Transform) を応用してこのシミュレーションを行った第一ステップの報告である。

II. 乱流拡散のシミュレーションの種々の方法

i) 単純なランダム・ウォーク: 乱流拡散の最も単純なものは, 乱数を次々に発生させてこれを乱流速度成分とみなして拡散のシミュレーションを行う方法である (Bugliarello 1965)。しかし, この方法では分子拡散や Taylor 理論における第二領域, すなわち $K = \frac{1}{2} \frac{d\overline{V^2}}{dt} = \text{const.}$ となる領域のシミュレーションに

止まってしまう。

- ii) 乱子モデル (ラグランジュ・シミュレーション) : Weizsäcker (1948) により提案され, 井上(栄) (1952) により発展させられた乱子仮説を用いる方法である。トレーサー粒子は流体とともに運動し, その速度変動はラグランジュ的にみた乱子の作用により決る。慣性領域でのラグランジュ・スペクトルは -2 乗則で与えられる。

$$S_L(\omega) \propto \omega^{-2}$$

したがって, 乱子のラグランジュ・スペクトルをシミュレートするような random 変動を作りそれによりトレーサー粒子を追跡すれば良い。これには2つの方法がある。

- 各階級乱子の生成・活動と消滅を直接的にシミュレートする方法 — この方法は日野 (1963) により提案され, 林・岩崎 (1974) もシミュレーションに用いている。
 - 確率過程理論・不規則振動理論・通信理論における入力・変換器・出力の関係を応用する方法 — 乱数を入力とし, 所定のスペクトルをもつ出力を作り出す変換器を設計する方法である。水理学関係では不規則波浪の発生にしばしば利用される。
- iii) Euler スペクトルから乱れの場合を作る方法 — 乱れの場合の Euler スペクトルは Lagrange スペクトルに較べて測定が容易であり, また Kolmogorov の $-5/3$ 乗則の成立は十分立証されているので, この Fourier 変換により乱流場全体を造り出しその中に粒子を放出し, これを追跡する方法である。
- iv) Euler スペクトルから任意の時刻・場所の乱流速度を求める方法 — 前述の方法では, 粒子の軌跡上にない多くの点の乱流場を計算しなければならないので, 放出粒子を追跡しつつ粒子が新たに到達した点での乱流速度のみを計算しつつ, 拡散をシミュレートする方法である (Kraichnan, 1970)。

III. Euler 場による拡散のシミュレーション

a) 粒子の追跡法

いま, 簡単のために y -方向の乱流変動のみを考える。時刻 t における粒子の y -方向の移動を $Y(t)$ とする。この点での乱流流速変動は Euler 表示によれば

$$v_E(Y, t) \quad (1)$$

と書かれ, Lagrange 表示によれば Y_0 を放出点の y 座標として

$$v_L(Y_0, t) \quad (2)$$

と書かれる。もちろん, 両者は数値的には相等しい。すなわち,

$$v_E(Y, t) = v_L(Y_0, t) \quad (3)$$

ただし,

$$Y(t) = \int_0^t v_L(Y_0, \tau) d\tau \quad (4)$$

式(3), (4)より次のような関係が得られる。

$$\frac{dY(t)}{dt} = v_L(Y_0, t) \quad (5)$$

すなわち,

$$\frac{dY(t)}{dt} = v_E(Y, t) \quad (6)$$

もし, 考慮しているすべての t, y の領域について $v_E(Y, t)$ が与えられていれば, すなわち乱流場の空間的・時間的流速変動成分が求められているとすれば, 式(6)は普通の数値積分法, 例えば Runge-Kutta-Gill 法で解くことができる。新たな乱流場を作り同様な粒子追跡を多数行い, その統計的平均より拡散のシミュレーションができる。

b) Euler スペクトルからの乱流場の作成

乱流場を時間的・空間的に Fourier 成分に分解して, 流速の Euler 的角周波数スペクトル $S_E(k, \omega)$ が定義

される（応用水理学下・Ⅱ参照）。

$$\bar{v}^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} S(k, \omega) dk d\omega \quad (7)$$

ここに、 k ：波数、 ω ：角周波数。

$v_E(Y, t)$ の時間・空間 Fourier 変換を $F(k, \omega)$ とすれば、スペクトル $S_E(k, \omega)$ は

$$S_E(k, \omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} \frac{|F(k, \omega)|^2}{T \cdot L} \quad (8)$$

である。ここに、 $T \cdot L$ はデータの時間的・空間的長さである。

逆にスペクトルから乱流場を再構成するには成分 $F(k, \omega)$ の位相をランダムにとり Fourier 変換を行えば良い。

$$v_E(y, t) = \frac{1}{2\pi} R \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} |F(k, \omega)| e^{i(\omega t + ky + \theta_{\omega k})} d\omega dk \right\} \quad (9)$$

ここに、 $\theta_{\omega k}$ は random な位相角を表わす。

c) 乱流場の計算法

式(6)により、乱流拡散のシミュレーションを行うには、式(9)により粒子の位置 (Y, t) での速度変動を求める必要がある。これにはⅡに述べたように2つの方法がある。

1) FTT (高速フーリエ変換) による方法：1965 に Cooley & Tukey により発表された高速有限フーリエ変換 FFT はデータ数が多くなるにつれて従来の方法より有利となる。実際の計算にはデータ数について若干条件がつくものの、その威力は大変なもので今ではほとんどの計算機に Library program として組み込まれている。

無次元化：いま、時間と長さおよび速度の基本量

$$T_0 = 2\pi/\omega_0, \quad \omega_0 : \text{最小周波数}, \quad L_0 = 2\pi/k_0, \quad k_0 : \text{最小波数}, \quad V_0 = L_0/T_0$$

とし、これらで無次元化した ω, k, t, y を改めて ω, k, t, y 等々と書く。

$$\omega/\omega_0 \rightarrow \omega, \quad k/k_0 \rightarrow k, \quad t/T_0 \rightarrow t, \quad y/L_0 \rightarrow y, \quad v/V_0 \rightarrow v$$

二重 FFT を4回行う：式(9)はこの FFT を2回使って計算される。

$$v(y, t) = \frac{\sqrt{TL}}{2\pi} R \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} V(y, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \quad (10)$$

$$V(y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(k, \omega)|^{1/2} e^{i(ky + \theta_{\omega k})} dk \quad (11)$$

しかし、FFT は普通 $(0, T)$ の区間の積分であるから上式の実際の計算では、 $(-\infty, \infty) \sim (-T, T)$ の区間を区切って二重 FFT を4回行わなければならない。

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \frac{\sqrt{TL}}{2\pi} R \left[\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \cdot dk d\omega + \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} \cdot dk d\omega + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 \cdot dk d\omega + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdot dk d\omega \right] \\ &= \frac{\sqrt{TL}}{2\pi} R \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{S} e^{i(ky + \omega t + \theta_{\omega k})} dk d\omega + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{S} e^{i(-ky + \omega t + \theta_{\omega k})} dk d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{S} e^{i(ky - \omega t + \theta_{\omega k})} dk d\omega + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sqrt{S} e^{i(-ky - \omega t + \theta_{\omega k})} dk d\omega \right] \quad (12) \end{aligned}$$

もし、これを省くと一方向に伝わる波動のみを取扱うことになるので、シミュレートした乱流に癖が生じ、放出粒子は一方に片寄るので注意を要する (Fig. 1)。

FFT を用いるこの方法は、アルゴリズムの関係上、粒子が通過する点ばかりでなくすべての (y, t) の領域の変動速度が求められてしまう。このことは一見無駄のように思えるが、実際に計算を行ってみると FFT の高性能によりこの無駄を補って余りあることがわかる。

乱数 $\theta_{k\omega}$ ：ランダム位相角 $\theta_{k\omega}$ は k と ω ごとに異なる $(0, 2\pi)$ あるいは $(-\pi, \pi)$ の区間の一様乱数を用いる。

ii) 粒子到達点の v_E のみを求める方法 : FFTによる方法の無駄を省くため, またこれによる計算機メモリ数による制約を除くために, 追跡粒子が到達した場所・時刻 (y, t) のみの流速変動値 $v_E(y, t)$ を式(9)より求める。この数値積分には例えばFillonの方法を用いる。必要点のみの v_E を求めるためにメモリー使用上の制約は少なくなるが, 多数回Fillon積分を繰り返すと演算時間が意外に必要となる。

IV. シミュレーションによる拡散の結果

上述の方法により乱流拡散の計算機実験を行った。Euler スペクトルとしてKolmogorov の $-5/3$ 乗則の成立する慣性小領域のみを考慮する。

$$S_E(k, \omega) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} f_E(\omega) \quad (13)$$

Kolmogorov の局所等方性の仮説は, 波数空間についてのものである。慣性領域の周波数空間スペクトルについては, 単純に dimensional analysis を行えば,

$$f_E(\omega) \propto \omega^{-1} \quad (14)$$

となる。しかし, 最近 Tennekes(1975) は平均流のない等方性乱れの周波数スペクトルにおける物理過程として advective spectral broadening を考慮した次式

$$f_E(\omega) = \beta \varepsilon^{2/3} q^{2/3} \omega^{-5/3} \quad (15)$$

(q : 乱れの強さ)を提案している。本報告ではこの Euler 周波数スペクトル形を用いる。したがって, $S_E(k, \omega)$ は

$$S_E(k, \omega) \propto k^{-5/3} \omega^{-5/3} \quad (k_0 \leq k \leq k_d, \omega_0 \leq \omega \leq \omega_d) \quad (14)$$

Fig. 2 は $(t-y)$ 平面上に画かれた乱流場の一つである。Fig. 3 に固定連続源からの Taylor 型拡散 (one-particle analysis) における粒子の拡がり幅 $(\sqrt{Y^2})$ と拡散時間の関係を示す。Taylor の理論によれば

$$\begin{aligned} \sqrt{Y^2} &\simeq \sqrt{v_l^2} T & (T \approx 0) \\ \sqrt{Y^2} &\simeq \sqrt{2 v_l^2 T_*} \cdot \sqrt{T} & (T \gg T_*) \end{aligned} \quad (15)$$

($T_* = \int_0^\infty R_l(\xi) d\xi$) である。Fig. 3 によれば $\sqrt{Y^2} \propto T^n$ のべき数は T の大きい領域では $n = 1/2$ でTaylorの理論と一致し, T の小さい領域では n は1よりやや小さくなっている。これは, スペクトルとして慣

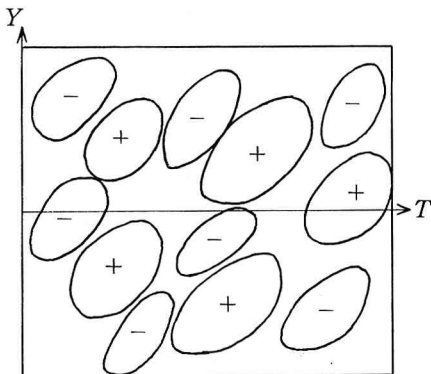
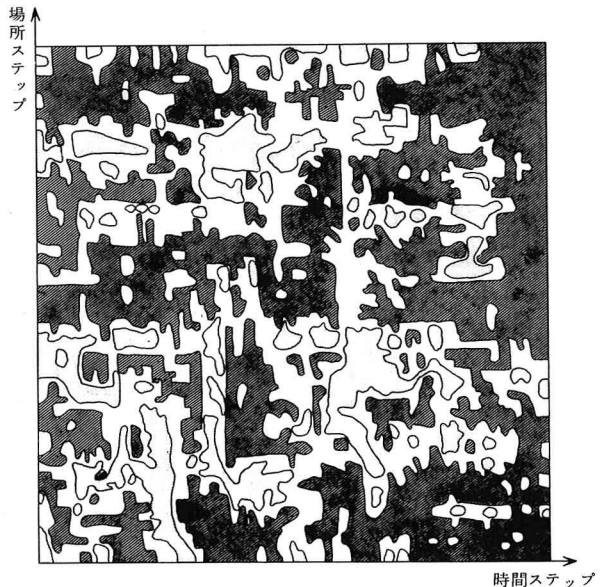


Fig. 1 : 癖のある乱流場の模式図



FFTによって求めた変動速度場, 条件 $\omega_d/\omega_0, k_d/k_0 = 30$

- (+)の変動速度場
- (-)の変動速度場
- ほぼ0の変動速度場

Fig. 2 : シミュレートされた乱れの間

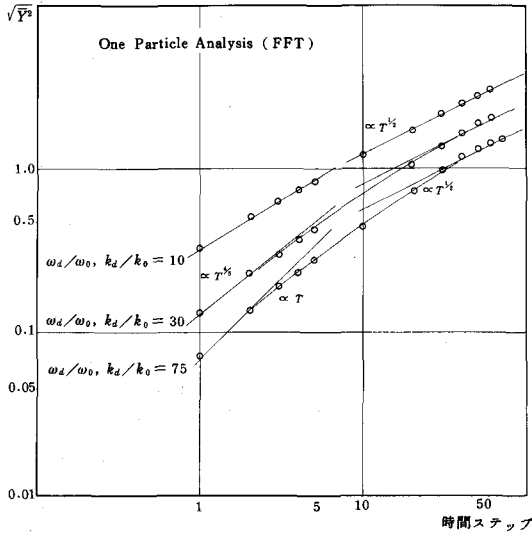


Fig.3 : 固定連続源からの拡散 — (1)
one-particle analysis

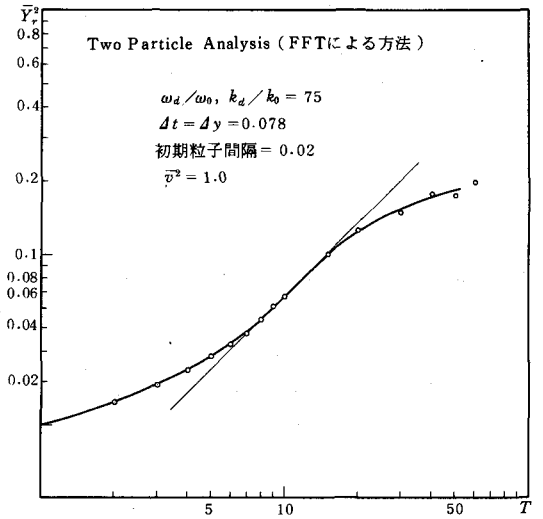


Fig.4 : 固定源よりの拡散 — (2)
相対拡散 (two-particle analysis)

性小領域以外を考慮しなかったためと思われる。Kolmogorov の $-5/3$ 乗則に対応するラグランジュ速度のスペクトルおよび相関関数は¹⁰⁾

$$S_l(w) = C_1 \varepsilon w^{-2} \quad (16)$$

$$R_l(\xi) = 1 - C_1 \varepsilon (\bar{v}_l^2)^{-1} |\xi| \quad (17)$$

である。これより、 $\bar{Y}^2$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{Y}^2 &= 2 \bar{v}_l^2 \int_0^T \int_0^\tau R_l(\xi) d\xi d\tau \\ &= 2 \bar{v}_l^2 \int_0^T \left(\tau - \frac{C_1 \varepsilon}{2 \bar{v}_l^2} \tau^2 \right) d\tau \\ &= \bar{v}_l^2 T_m^2 \left(1 - \frac{1}{3} \hat{T} \right) \hat{T}^2 \\ &\quad (T \leq T_m) \quad (18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}^2 &= 2 \bar{v}_l^2 \left[\int_0^{T_m} \left(\tau - \frac{C_1 \varepsilon}{2 \bar{v}_l^2} \tau^2 \right) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{T_m}^T \left(-\frac{1}{3} \bar{v}_l^2 T_m^2 \right) d\tau \right] \\ &= \bar{v}_l^2 T_m^2 \cdot \hat{T}_m \quad (T \geq T_m) \quad (18b) \end{aligned}$$

ここに、 $\hat{T} = T/T_m$, $T_m = \bar{v}_l^2 / C_1 \varepsilon$ 。

Fig.5 にラグランジュ相関 $R_l(\tau)$ と流下座標系における (このシミュレーションでは $U=0$ であるので特に断る必要もないが) オイラー相関 $R_E(\tau)$ との比較を示す。最近の Shlien & Corrsin (風洞実験) や Riley & Patterson (N-S. Eq によるシミュレーショ

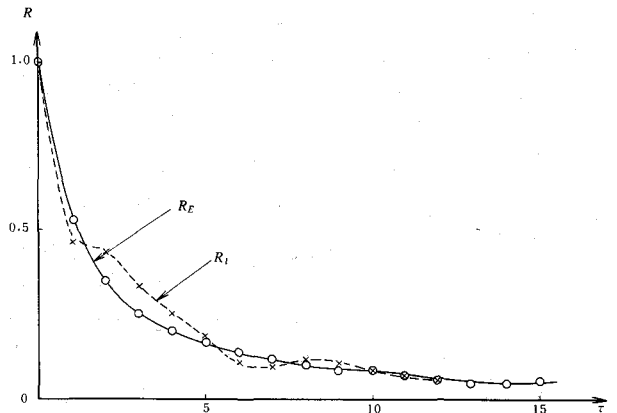


Fig.5 : Lagrange 相関と Euler 相関の比較

ン, 1974)と同様に R_I と R_E とはほとんど同一形とみなしうる。

2粒子の相対拡散 (two-particle analysis) のシミュレーションも行った (Fig. 4)。慣性領域における相対拡散理論の結果は次式で与えられる。

$$\overline{Y_r^2} \propto \begin{cases} T^2 & (T \approx 0) \\ T^3 & (A \ll \sqrt{\overline{Y_r^2}} \ll L) \\ (T^2) & (T \rightarrow \infty) \end{cases}$$

参 考 文 献

- 1) Bugliarello, G. (1971) : Some example of stochastic modelling for mass and momentum transfer, Proc. Int. Symposium on Stochastic Hydraulics, pp. 39-55, ed. by C. -L. Chiu, Univ. of Pittsburgh.
- 2) 林 泰造・岩崎光隆 (1974) : 拡散のシミュレーションと数値実験, 第19回水理講演会論文集, pp. 167-172.
- 3) 日野幹雄 (1965) : モンテカルロ法による乱流拡散の二, 三の計算について, 第9回水理講演会講演集, pp. 67-72.
- 4) Hino, M. (1974) : On sampling problem of diffusing plumes, 東工大・土木工学科・研究報告, Tech. Report No. 16, Dept. of Civil Eng., Tokyo Inst. of Tech., pp. 23-48.
- 5) 日野幹雄 (1974) : 流体力学, 第4章, 朝倉書店
- 6) 日野幹雄 (1975) : 乱流拡散における Lagrange 相関と Euler 相関の関係, 土木学会誌, vol. 60, pp. 65-71.
- 7) 日野幹雄, 池田信己, 伊藤雄二 (1975) : 乱流場における粒子拡散の実験及びシミュレーション, 昭和49年度第2回土木学会関東支部年次研究発表会講演概要集, pp. 115-116.
- 8) 井上栄一 (1952) : 地表風の構造, 農業技術研究所報告, A (物理, 統計) 第2号
- 9) イヴァノフ, V.N. : 下層大気における乱流交換の特性に関する二, 三の考察 (電力中研, 技術業務資料, その(17), No. 66011)
- 10) ノヴァノフ, V. N. & ストラタノーヴィチ, R.L. (1963) : 乱流のラグランジュの性質に関する問題, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geophy. No. 10, 1581 (電力中研, 技術研究所業務資料, その(17), No. 66011, 日野 (訳))
- 11) Kraichnan, R. H. (1970) : Diffusion by a random velocity field, Physics of Fluids, vol. 13, No. 1, 22-31.
- 12) Patterson, G. S. and Corrsin, S. (1966) : Computer experiments on a random walk with both Eulerian and Lagrangian statistics, Dynamics of Fluids and Plasma, ed. by S.I. Pai, Academic Press
- 13) Riley, J.J. and Patterson, Jr. G. S. (1974) : Diffusion experiments with numerically integrated isotropic turbulence, Phys. of Fluids, vol. 17, pp. 292-297.
- 14) Shlien, D. J. and Corrsin, S. (1974) : A measurement of Lagrangian velocity autocorrelation in approximately isotropic turbulence, J. Fluid Mech., vol. 62, pp. 255-271.
- 15) Tennekes, H. (1975) : Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence, J. Fluid Mech., vol. 67, pp. 561-567.
- 16) Weizsäcker, C. F. von (1948) : Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynolds'schen Zahlen, Z. Phys. Bd. 124, 418.