開水路乱流場のレイノルズ応力の挙動

京都大学　工学部　　正員　　中川　博次
京都大学　工学部　○学生員　　祢津　家久

1. 概　論

せん断乱流場におけるレイノルズ応力の果たす役割はきわめて重要であってその内部構造を解明する際の基本的な物理量であることは早くから認識され，Prandtl 以来現象論的な乱流混合モデルが数多く提案されて来た。流れの履歴の影響が弱い乱流場すなわち普遍関数表示が可能なアクティブな成分で主に支配された乱流場では通常の時間平均されたレイノルズ応力 $-\overline{uv}$（流下方向をx軸および壁面に垂直上方をy軸にとり，またuおよびvをそれぞれに対応する乱れ変動成分とする）は平均流速勾配と局所的に関係づけられて，これまでに多くの成果が得られており，また乱れエネルギーの収支関係等も明らかにされて，本研究で対象とする開水路乱流場の内部構造に関しても時間平均的な意味ではかなり解明されるようになった。[1)]

しかし，近年乱れエネルギーの収支に関連してその発生機構を明らかにすべく実験的研究が精力的に行われ，ランダムな乱れ変動の中にも相当規則性をもった運動が存在していることが流れの可視化によって認められるようになり，このような coherentな運動の解明が現在の乱流研究での中心的な課題の一つにも挙げられている。[2)] 乱れの発生機構の解明，換言すれば瞬間レイノルズ応力の解明に関しては，Klineら[3)]をはじめとする数多い研究により現在少なくとも定性的には説明されるようになり，一連の coherentな運動は乱れの発生に伴なう bursting現象であると認められ，Fig.1(a) のように区分されてそのプロセスが実験的に考察されている。[4)] このような現象の解析には条件付データ処理法がきわめて有力であって各事象の特性が把握されるが，筆者らはこれら一連の bursting 過程を解明するために条件付確率分布を導入し，キュムラント展開をすることによってその理論的予測を行なっている。[5)] 以上のこれまでの知見に基づいて，本研究は開水路乱流の瞬間レイノルズ応力を直接計測し，条件付カンプリングを行って各事象の関連特に乱れの発生に正に寄与する ejection や sweep の特性を，レイノルズ数 $Re \equiv U_m h/\nu$（U_m は平均流速，hは水深），フルード数 $Fr \equiv U_m/\sqrt{gh}$ および等価粗度 $k_s^+ \equiv k_s U_*/\nu$（U_* は摩擦速度）の水理パラメータのうち1つを変化させて系統的に考察しようとしたものである。

2　理論的考察

正規化された速度変動 $\hat{u} \equiv u/u'$ および $\hat{v} \equiv v/v'$（ここで，$u' \equiv \sqrt{\overline{u^2}}$，$v' \equiv \sqrt{\overline{v^2}}$）の結合確率密度関数を $p(\hat{u},\hat{v})$，その特性関数を $\Phi(\xi,\eta)$，$(j+k)$ 次キュムラントを Q_{jk} とすれば，次の定義式が成立する。[6)]

$$\Phi(\xi,\eta)=\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\hat{u}\xi+\hat{v}\eta)}\cdot p(\hat{u},\hat{v})\,d\hat{u}\,d\hat{v} \qquad (1),\qquad Q_{jk}=\frac{1}{(i)^{j+k}}\frac{\partial^{j+k}}{\partial\xi^j\partial\eta^k}\ln\Phi(\xi,\eta)\Big|_{\xi=\eta=0} \qquad (2)$$

$\ln\Phi(\xi,\eta)$ を原点 $\xi=\eta=0$ で Taylor 展開すれば，モーメント $\overline{\hat{u}^j\hat{v}^k}$ との関係がわかり，また5次以上の高次キュムラントを打切れば，相関係数 $R \equiv -\overline{uv}/u'v'$ を用いて次式を得る。

$$\ln\Phi(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2-2R\xi\eta+\eta^2)+\sum_{j+k=3}^{4}(i)^{j+k}\frac{Q_{jk}}{j!\,k!}\xi^j\eta^k \qquad (3)$$

したがって，式(1)の逆変換を行えば次のような Gram-Charlier 型の結合確率分布を得る。

$$p(\hat{u},\hat{v})=G(\hat{u},\hat{v})\left[1+G(\hat{u},\hat{v})^{-1}\sum_{j+k=3}^{4}(-1)^{j+k}\frac{Q_{jk}}{j!\,k!}\frac{\partial^{j+k}}{\partial\hat{u}^j\partial\hat{v}^k}G(\hat{u},\hat{v})\right] \qquad (4)$$

ここで，$G(\hat{u},\hat{v})$ は次式で定義される2変数の Gauss分布である。

$$G(\hat{u},\hat{v}) \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}}\exp\left(-\frac{\hat{u}^2+2R\hat{u}\hat{v}+\hat{v}^2}{2(1-R^2)}\right) \qquad (5)$$

同様にして，1変数の確率密度関数 $p(\hat{u})$ はより簡単に次のように求められる。

$$p(\hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\hat{u}^2}{2}} \left\{ 1 + \frac{Q_{30}}{6}(\hat{u}^3 - 3\hat{u}) + \frac{Q_{40}}{24}(\hat{u}^4 - 6\hat{u}^2 + 3) \right\} \tag{6}$$

式(4)や(6)でキュムラントQ_{jk} ($j+k \geqq 3$) がすべて零のとき，確率分布は完全に Gauss分布に一致するから，Q_{jk} は分布の歪みや尖りを表わす指標と考えられ，分布の補正項ともいえる。

次に，正規化された瞬間レイノルズ応力 $w \equiv uv/\overline{uv}$ の確率分布を $p_w(w)$ とし，$(\hat{u}, \hat{v}) \rightarrow (\hat{u}, \hat{w})$ と変数変換を行った後，積分すれば次式を得る。[7]

$$p_w(w) = \frac{R}{\pi\sqrt{1-R^2}} \exp\left(\frac{R^2 w}{1-R^2}\right) \left\{ K_0\left(\frac{R|w|}{1-R^2}\right) + (\text{4次以上のキュムラント項}) \right\} \tag{7}$$

ここで $K_\alpha(x)$ は α 次変形第2種 Bessel 関数であり，級数展開すれば容易に計算される。

$p_w(w)$ には3次キュムラントは現われない（奇数次項は打消し合うため）。しかし，後述するように3次キュムラントは直接乱れの拡散率と結びつき，現象論的にも4次キュムラントよりはるかに重要である。いま，4次以上のキュムラントを無視した，すなわち Gauss分布から実質的には導びかれる $p_w(w)$ を $2p_G(w)$ として（式(7)の第1項），実験結果と比較した所，$p_G(w)$ でも相当な精度で実験値を説明し得ることが判明した。[7),8)] したがって，以下では簡単のために4次以上のキュムラントを無視することにする。

さて，3次キュムラントの重要性が推測されるにもかかわらず $p_w(w)$ にこの項が現われないのは，w の無条件確率分布を扱ったからであり，bursting 現象を解明するには w の条件付確率分布を導入せねばならない。いま，Fig.1 (a) に従って，各事象の確率分布を $p_1(w)$ (outwards), $p_2(w)$ (ejection), $p_3(w)$ (inwards) および $p_4(w)$ (sweep) と定義し，式(4)を条件付積分して若干繁雑な計算を行えば次式を得る（以下，複合同順で縮約してある）。[5)]

$$\left.\begin{matrix} p_1(w) \\ p_3(w) \end{matrix}\right\} = p_G(w) \pm \psi^+(w) \quad (w<0), \qquad \left.\begin{matrix} p_2(w) \\ p_4(w) \end{matrix}\right\} = p_G(w) \pm \psi^-(w) \quad (w>0) \tag{8}$$

ここで，

$$\psi^\pm(w) = \frac{R}{2\pi} e^{Rt} K_{\frac{1}{2}}(|x|) \frac{\sqrt{|x|}}{(1\mp R)^2} \left\{ (1\pm R)\left(\frac{S^\pm}{3} + D^\pm\right)|x| - \left(\frac{2\mp R}{3} S^\pm + D^\pm\right) \right\} \tag{9}$$

$$x \equiv Rw/(1-R^2)$$

$$S^\pm \equiv (S_v \pm S_u)/2 = (Q_{03} \pm Q_{30})/2, \quad D^\pm \equiv (D_v \pm D_u)/2 = (Q_{21} \pm Q_{12})/2 \tag{10}$$

S_u および S_v はそれぞれ u および v の skewness 因子 ($S_u \equiv \overline{\hat{u}^3}$ など）を表わし，また D_u および D_v はそれぞれ u 方向および v 方向の diffusion 因子 ($D_u \equiv \overline{\hat{u}\hat{v}^2}$ など) を表わしている。

条件付確率分布 $p_i(w)$ ($i = 1 \sim 4$) から，$p_w(w) = \sum_{i=1}^{4} p_i(w) = 2p_G(w)$ となって，ψ^+ および ψ^- は打消され先述の式(7)と一致する。したがって，一連の bursting 現象を考察するには，付加項 ψ^+ および ψ^- が重要であって，これらと結びついた乱れの3次相関，すなわち skewness および diffusion 因子が本質的な役割を果していることが示唆される。また，例えば ejection 事象 $(\hat{u}, \hat{v})$ が $(-\hat{u}, \hat{v})$ に変換されると，$R \rightarrow -R$, $S^- \rightarrow S^+$, $D^- \rightarrow D^+$ および $w > 0 \rightarrow -w < 0$ ($x \rightarrow -x$) となるから，$p_G(w) \rightarrow p_G(w)$ および $\psi^- \rightarrow \psi^+$ すなわち，$p_2(w) \rightarrow p_1(w)$ となって，outwards interaction 事象へと変換されるわけであり，実際の現象と符合する。

次に，Lu らが行ったように[8)] レイノルズ応力 w にレベル H を設定し，Fig. 1(b) に示すように $|w| < H$ を "hole" と定義して w を5つの事象に条件区分する。このとき，各事象が占有する時間の割合を $T_i(H)$ およびレイノルズ応力への寄与率を $RS_i(H)$ とすれば次のように計算される。

$$T_i(H) = \begin{cases} \int_H^\infty p_i(w)\,dw & (i = 2, 4) \\ \int_{-\infty}^{-H} p_i(w)\,dw & (i = 1, 3) \end{cases} \tag{11}, \qquad RS_i(H) = \begin{cases} \int_H^\infty w p_i(w)\,dw > 0 & (i = 2, 4) \\ \int_{-\infty}^{-H} w p_i(w)\,dw < 0 & (i = 1, 3) \end{cases} \tag{12}$$

$$T_5(H) = 1 - \sum_{i=1}^{4} T_i(H) \qquad\qquad RS_5(H) = 1 - \sum_{i=1}^{4} RS_i(H)$$

H＝0のときは，Fig.1(a)に示した各事象の寄与を表わすことになり，bursting過程の大小関係が判明する。H≒0のときは，各事象の歪みや尖りの程度がより明白にされると期待され，これらは基本的なパラメータであるR，S^+，S^-，D^+およびD^-が既知であれば予測されることになる。[5)]

以上は，レイノルズ応力wのみに注目して来たが，いまwがトリガレベルHに達したとき乱れ成分uおよびvがいかなる挙動を示すかを予測することは興味深い。レイノルズ応力の主成因はejectionとsweepとであって，これらは乱流混合モデルの基本概念にもなっている。さて，w＝Hでのejectionを発生させている乱れ成分$\hat{u}$の確率分布を$p_e(\hat{u}|H)$，その平均値を$\hat{u}_e(H)$とすれば，$\hat{u}_e(H)=\int_{-\infty}^{0}\hat{u}\,p_e(\hat{u}|H)\,d\hat{u}/p_2(H)$であり，また同様にsweepではそれに対応する$\hat{u}_s(H)$を求めることができ（$\hat{v}$成分に関しても同様である），次式を得る。

$$\left.\begin{array}{l}\hat{u}_e(H)\\ \hat{u}_s(H)\end{array}\right\}=\mp\frac{\sqrt{Z}\,K_{\frac{1}{2}}(Z)\pm\delta_1(Z)}{K_0(Z)/r\pm\delta_2(Z)}\qquad（複合同順）\qquad(13)$$

ここで，$Z\equiv RH/r^2$，　$r\equiv\sqrt{1-R^2}$

$$\delta_1(Z)=-\{(B_{01}Z+B_{02}Z^2)K_0(Z)+(B_{11}Z+B_{12}Z^2)K_1(Z)\}/r^3$$

$$\delta_2(Z)=2\pi\psi^-(H)/Re^{RZ}$$

$$B_{01}\equiv R(Q_{30}+3Q_{12})/2+((2R^2+1)Q_{21}+Q_{03})/2$$

$$B_{11}\equiv(Q_{30}+3Q_{12})/6+R(3Q_{21}+(3-2R^2)Q_{03})/6$$

$$B_{02}\equiv R(R^2+3)(Q_{30}+3Q_{12})/6+(3R^2+1)(Q_{03}+3Q_{21})/6$$

$$B_{12}\equiv(3R^2+1)(Q_{30}+3Q_{12})/6+R(R^2+3)(Q_{03}+3Q_{21})/6$$

最後に，Fig.1(b)のejectionおよびsweepに寄与する$\hat{u}$の条件付確率分布すなわち，$p_e(\hat{u}|w\geq H)$，および$p_s(\hat{u}|w\geq H)$は次のように求められる（$\hat{v}$でも同様）。

$$\left.\begin{array}{l}p_e(\hat{u}|w\geq H)\\ p_s(\hat{u}|w\geq H)\end{array}\right\}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\hat{u}^2}{2}}\int_X^{\infty}(\phi_1\pm\phi_2)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\qquad（複合同順）\qquad(14)$$

ここで，$X\equiv R(H/|\hat{u}|-|\hat{u}|)/r$

$$\phi_1=1+Q_{30}(\hat{u}^3-3\hat{u}(1-R^2x^2)/r^2)/6-\hat{u}(2RQ_{21}+Q_{12})(1-x^2)/2r^2$$

$$\phi_2=\hat{u}^2(RQ_{30}+Q_{21})x/2r+(A_1x^3-A_3x)/r^3$$

$$A_1\equiv(R^3Q_{30}+Q_{03})/6+R(RQ_{21}+Q_{12})/2$$

$$A_3\equiv(RQ_{30}+Q_{03})/2+((2R^2+1)Q_{21}+3RQ_{12})/2$$

当然，$H\to-\infty$のとき，$X\to-\infty$となってϕ_2の項は打消し合い，式(14)は式(6)に一致する。

以上の関係式より，瞬間レイノルズ応力のトリガレベルHをパラメータとしてbursting現象の各事象の果たす役割やそのときの乱れ変動成分の挙動等がある程度予測されうると考えられる。

3. 実験的考察

(1) 実験方法　Re数，Fr数および等価粗度k_s^+のうちいずれか1つを変化させて，開水路乱流場の瞬間レイノルズ応力を二成分V型熱膜流速計（DISA 55A89）で系統的に計測し，これらのパラメータが与えるレイノルズ応力の構造への影響やその挙動を考察した。速度変動成分はすべて数値化されたのち（1測点のサンプル数5,000個）電算機で条件付計算が行われた。なお，詳しい実験方法や実験条件に関しては文献1)および9）を参照されたい。

(2) R，S^+，S^-，D^+およびD^-の特性　Fig.2は相関係数Rを示した一例であり，その特性は他の実験でも同様であって[7)]外部パラメータにはほとんど影響されない普遍特性値と考えられる。Fig.3は式(10)から求められた特性値S^+，S^-，D^+およびD^-を示した滑面乱流での一例である。これらは3次相関であるからRよりも実験精度は悪く若干ばらつきを示すが，顕著なFr数の影響はないようであり，またRe数の影響も十分把握することはできなかった。自由水面領域[1)]を除き，パイプ流での実験結果[10)]と同様な変化特性を示している。すなわち，S^-とD^-は前者の方が若干大きいものの，類似した変化を示し，平衡領域までは[1)]

漸増するが，自由水面領域で最大値に達したのち減少するようである。同様に，S^+ は D^+ とほぼ類似した零に近い値を示している。これらの特性は，$\hat{u}$ および $\hat{v}$ の skewness や diffusion 因子が零軸（Gauss 分布での値）に関してほぼ互いに対称に分布するためである。[7] 次に，Fig. 4 は粗度の影響を検討したものである。$S^+ \approx D^+ \approx 0$ であって，k_s^+ の影響は認められなかったが，S^- と D^- とは図に示すように顕著に粗度の影響を受けており，この影響が平衡領域のほぼ中央まで及んでいることが理解される。一方，乱れの拡散率 $T_r \equiv \overline{q^2 v}/2U_*^3$ は壁面粗度に顕著に影響されると報告されており[1]，また T_r と S^- および D^- との関連を考慮すれば bursting 現象は乱れの拡散率を介して乱れエネルギー収支と密接な関係があり，R_e 数や F_r 数よりもむしろ壁面粗度に強く影響されると推測される。

(3) レイノルズ応力の構造　Fig. 5 は H＝0 での各事象からのレイノルズ応力への寄与率 RS_i を示した一例であり，式 (12) からの計算値も併示している。実験値と計算値とは非常に良好に一致し，先述の理論的考察の妥当性を確かめると共に，Willmarth らや Wallace らの実験結果をも良好に説明し得ることが判明した。[5] 平衡領域までは RS_i はほぼ一定であって，滑面では $RS_2 \fallingdotseq 75\%$，$RS_4 \fallingdotseq 60\%$ と ejection の方が sweep よりも大きいが，粗度が増せば両者は次第に等しくなり，[7] このことからも粗面乱流の方が乱れの等方性志向は強いと示唆される。[1] いま，乱れエネルギーの発生率 $P = -\overline{uv}\,\partial U/\partial y$ を，正の発生率（$P(RS_2 + RS_4)$）と負の発生率（$P(RS_1 + RS_3)$）とに分けて図示したものが Fig. 6 であり，自由水面領域では負の発生率すなわち，乱れから平均流へのエネルギーの還流も無視し得ないことが理解され，日野ら[11]の示唆と共に興味深い現象である。次に，Fig. 7 は滑面乱流の平衡領域を例にとり，トリガレベル H を変化させてそのレイノルズ応力の構造を示したものであり，他の領域や粗面乱流でも同様な変化特性図を得ている。[5] 実験値は Fig. 1 (b) に示した条件付データ処理の結果得られたものであり，また式 (11) および (12) から計算された理論曲線をも併示している。実験値と理論値とは良好に一致しており，先述の条件付確率分布 $p_i(w)$ によってレイノルズ応力の構造を十分満足に説明し得ることがわかる。すなわち，H～1 で hole に全時間のほぼ半分滞在するにもかかわらず，レイノルズ応力への寄与は 2～3％であり，w (t) がいかに高い断続性質をもつかが示唆される。H～5 で interaction が，H～10 で sweep がほぼ消滅し，ejection が H の高いレベルまでレイノルズ応力を発生せしめていることが把握され，これらは Corino らや Kim らや Grass 等による乱れの可視化によって観測された特性と定性的に非常によく一致していると考えられる。

(4) 乱れの発生時の $\hat{u}$ および $\hat{v}$ の挙動　Fig. 8 は式 (14) を示した一例であり，$\hat{v}$ 変動についても計算されている。ejection は sweep と比較して H が小さいとき $|\hat{u}|$ および $|\hat{v}|$ の小さい所からの寄与は小さく，逆に H が大きくなるとそれらの大きい所からの寄与も大きく，Fig. 7 の特性を裏付けている。明らかに，H が大きいほど u と v との相関は大きくなり，乱れの発生には coherent な運動が関与していると推測される。以上のことは，$\hat{u}_e(H)$ および $\hat{u}_s(H)$ を示した Fig. 9 からも把握される。この図で，実験値と理論曲線式(13)とには若干差異が認められるが，これは実験値として w (t) がちょうど H を横切ったときの u を条件付平均して求めているためである。

さて，流れの可視化によって観察された乱れの発生に供する coherent な渦運動と本研究のような点計測データからの知見とをいかに関連づけて考察したら妥当なのか（先述のように定性的には十分対応づくが），換言すれば ejection や sweep 運動をどの程度のレベル H で代表させたら良いであろうか。もしこのような基準となる H が存在すれば，coherent な運動を支配している特性値として $\hat{u}_e$ や $\hat{u}_s$ を採用しても妥当と考えられる。Fig. 10 は $|\hat{u}|$ がある基準レベル u_L を増加する方向で横切った時刻 t＝0 としてその前後で観測された w(t) のアンサンブル平均を図示した一例である。$u_L = 0.5$ では coherent な運動は認められないが，$u_L = 1.0$ にすると $|\hat{u}| = u_L$ になった直後にこの運動が観測され，$u_L = 1.5$ にすればさらに明白なピーク値をもつようである。また，$|\hat{u}|$ が減少する向きに u_L を横切ったときも同様であって，このとき coherent な運動は直前に観測される。以上のことから，$\hat{u}_e = -1 \sim -1.5$，$\hat{u}_s = 1 \sim 1.5$ すなわち H～5 のレベルで coherent な運動が生じたと考えてもほぼ妥当であろう。Fig. 7 から判断してこれはほぼ interaction 事象が消滅するレベルに

相当すると考えられる。

⑸ ejection および sweep の発生周期　Fig. 11 は ejection 事象が生じたときの w(t) の観測データの一例であって，すでに推測されたように非常に断続性のある，いわばパルス波形であることがわかる。この波形の発生回数を数えればその周期 T_e を知ることができるが，T_e は H の単調増加関数であって，明白な卓越周期を見出すことはできない。一方，これまでに幾人かの研究者によって発生周期は求められて来たが，その定義があいまいであったり，主観に頼る所が少なくなく，ここでは前節の示唆を考慮して，（$T_e(H) - T_{in}(H)$）が最小となる H（ほぼ 5 に近く，interaction が消滅するレベルに相当，また T_{in} はこの事象の発生周期）での T_e を ejection の平均周期 $\overline{T}_e$ と定義して以下用いることにする。Fig. 12 はこのようにして計算された ejection および sweep の平均周期を外部パラメータで無次元表示したものであり（U_{max} は最大流速），ケース A では Kim らによって示唆された u の自己相関曲線が第 2 のピーク値をもつラグ時間をその周期と見なしての $\overline{T}_e$ も併示したが，両者は比較的一致しているようである。定義が異なるため Willmarth ら[8] のものと定量的な比較はできないが，ほぼ同程度であることがわかり，また水深方向にあまり変化せずほぼ一定と見なしてよい。これらの特性は，R_e 数および F_r 数を変化させた実験でもまったく同様であって，$\overline{T}_e \simeq \overline{T}_s \simeq$（2～3）$h / U_{max}$ であった。そして，Rao[12] らが指摘するように，coherent な運動の発生周期は外部パラメータによって規定されてしまうものと考えられ，今後詳しく研究せねばならないと考える。

参考文献

1） Nakagawa, H., Hezu, I. and Ueda, H., 1975, Proc. JSCE, №241 pp. 155−168

2） Davies, P. O. A. L. and Yule, A. J., 1975, J. F. M., vol. 69, pp. 513−537

3） Kim, H. T., Kline, S. J. and Reynolds, W. C., 1971, J. F. M., vol. 50, pp. 133−160

4） Brodkey, R. S., Wallace, J. M. and Eckelmann, H. 1974, J. F. M., vol. 63, pp. 209−224

5） Nakagawa, H. and Nezu, I.（投稿中）

6） Monin, A. S. and Yaglom, A. M., 1971, Statistical Fluid Mechanics, MIT Press, vol. 1

7） 中川，祢津，1975，土木学会年講，Ⅱ−194

8） Lu, S. S. and Willmarth, W. W., 1973, J. F. M., vol 60, pp. 481−511

9） 中川，祢津，為沢，1975，土木学会年講，Ⅱ−193

10） Lawn, C. J., 1971, J. F. M. vol 48, pp. 477−505

11） 日野，沢本，高須，1975，土木学会論文報告集 №237, pp. 75−86

12） Rao, K. N., Narasimha, R. and Narayanan, M. A., 1971, J. F. M., vol. 48, pp. 339−352

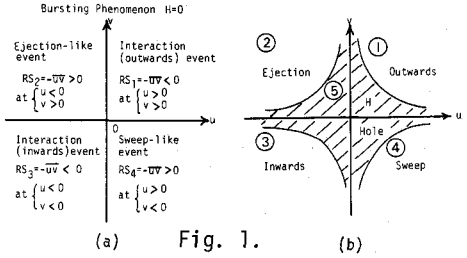

Fig. 1.

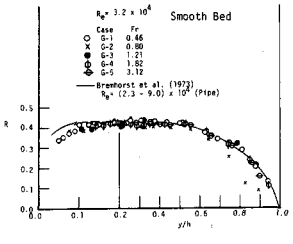

Fig. 2.

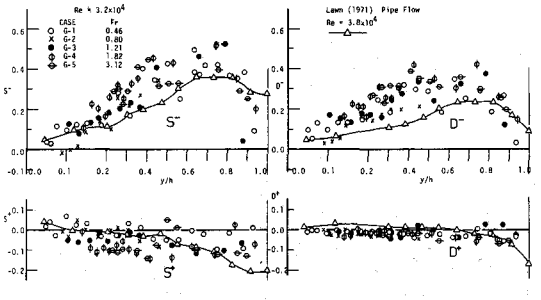

Fig. 3.

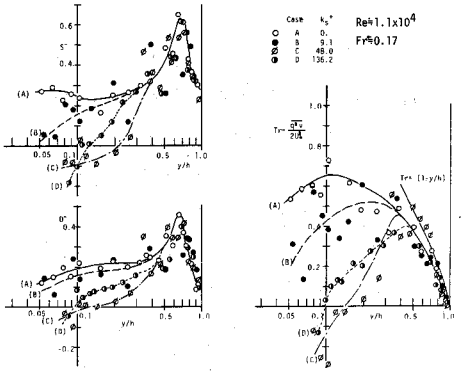

Fig. 4.

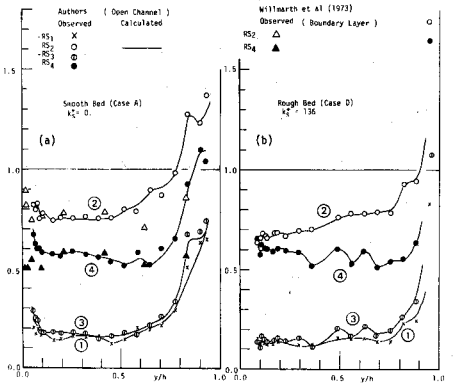

Fig. 5.

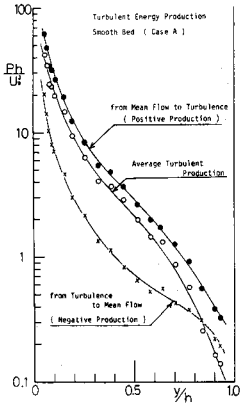

Fig. 6.

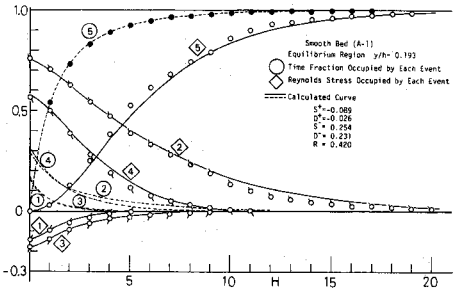

Fig. 7.

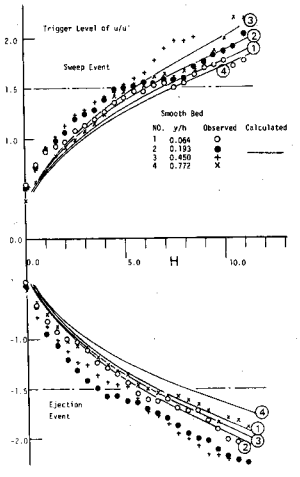

Fig. 9.

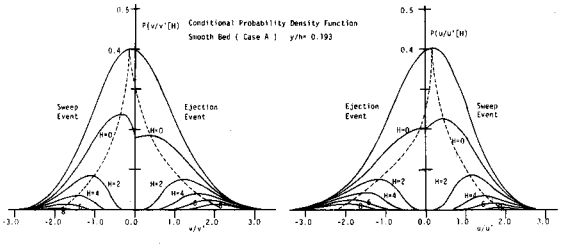

Fig. 8.

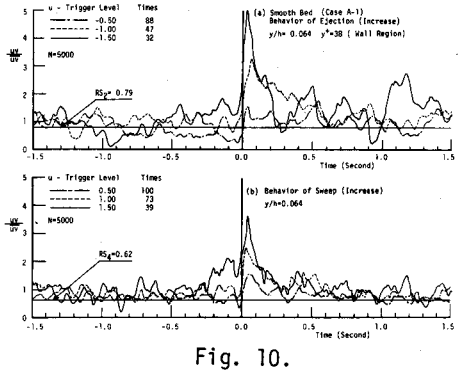

Fig. 10.

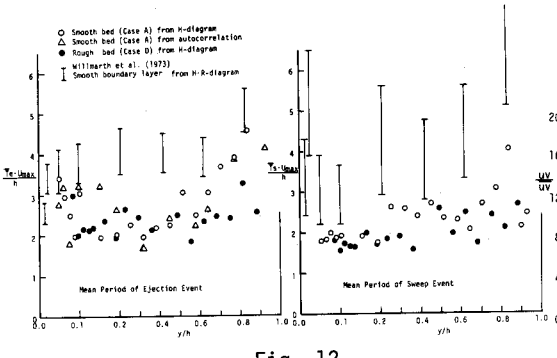

Fig. 12.

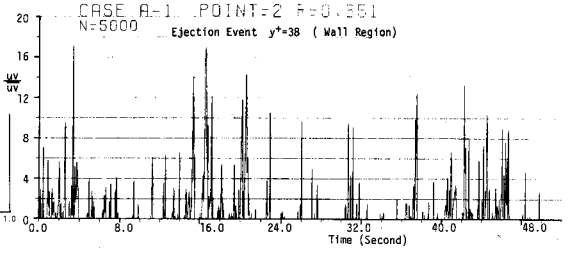

Fig. 11.