

東京工業大学工学部	正会員	吉川 秀夫
同	同	福岡 捷二
同	学生員	○吉川 勝秀

1. 序

流体中を沈降する粒子は、粒子レイノズル数がある程度大きければ、運動方向に対して直角方向の力をうける。そのために、目標点にある分布をもって到達する。本研究は、粒子を一個一個および連続的に投入した場合のちらばり幅について解析を行なったものである。

小さな粒子レイノズル数の単粒子および多粒子沈降については、参考文献(1)~(6)のような研究がある。ここで考察する粒子 R_e 数がある程度大きな場合については、箭内⁷⁾、Tawatchai⁸⁾の研究がある。彼らは、個別に投入された粒子の水深 z における分布は、標準偏差 $\sigma(z)$ が水深の平方根に比例する二項分布であることを実験的に示している。箭内は粒子の回転に注目し、理論的にも同様の結果を得ているが、沈降速度等の物理量を考慮しておらず、粒径のみで粒子のちらばりを取りあっている。しかし、沈降する粒子には、間欠的なうずのはく離および回転が生じ、そのために横方向の力をうける。この力は、粒子の形状および粒子 R_e 数に依存し、確率的な性格をもっていると考えられる。著者等⁹⁾は、この点に注目し解析を行なって来た。本研究ではさらに一般化して、粒子の運動方程式から出発し、粒子の運動を確率過程として取り扱い、単粒子沈降の分布形およびちらばり幅を求め、1個の未定パラメータを実験から定めた。さらに、得られた単粒子沈降の結果を用いて、粒子が連続的に投入される場合で、粒子濃度が小さく、重力効果が乱れによる拡散に比較して大きい場合の粒子の拡がり幅の計算法を述べ、実験値との比較を行なった。

2. 単一粒子が沈降したときのちらばり

座標系をFig.1のようにとると、粒子の運動方程式は(1)式のように書くことができる。

$$(m+m'_i)\ddot{\mathbf{R}}_i = -\rho C_{Di} A_i |\dot{\mathbf{R}}_i| \dot{\mathbf{R}}_i + (m-m_0)g\mathbf{k} + \mathbf{F}_i \quad (1)$$

ここに、 m ; 粒子の質量 g ; 重力加速度
 m' ; 仮想質量 C_D ; 抵抗係数
 m_0 ; 粒子と同体積の流体の質量
 $\mathbf{R}$; 位置ベクトル ρ ; 流体の密度
 A ; 粒子の運動方向への投影面積
 $\mathbf{F}$; $\dot{\mathbf{R}}$ に直角方向の作用力
 $\mathbf{k}$; z 方向の単位ベクトル

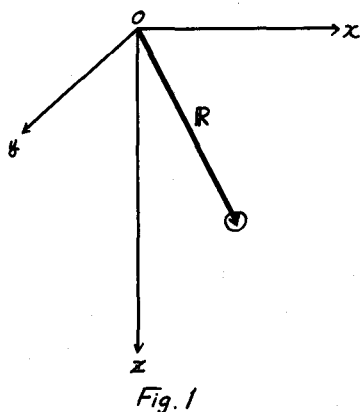


Fig.1

添字 i は、各瞬間における値をとることを示す。左辺は慣性項、右辺第一項は速度の2乗に比例する抵抗、第二項は重力効果、第三項は運動方向に直角に作用する力を示す。粒子がほぼ球形であれば、 C_{Di} と A_i の変化は小さいと考えられるが、 $\mathbf{F}_i$ は複雑に変化する。しかし、 $\mathbf{F}_i$ の相関時間スケールより大きな観測時間スケ

ール Δt にわたり平均化した巨視的な量 $F(t)$ は、独立で相関がほとんどないと考えることができる。

ここに、

$$F(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F_i(t) dt$$

(1) 式を Δt にわたり平均化し、微小量を省略すると (2) 式になる。

$$(m + \bar{m}') \ddot{\mathbf{R}} = -\rho \overline{C_D A} |\dot{\mathbf{R}}| \dot{\mathbf{R}} + (m - m_0) g \mathbf{k} + \mathbf{F} \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_i(t) dt$ 。横線は平均値を示す。

確率変数 $\mathbf{R}$ および $\mathbf{F}$ の成分を、それぞれ (x, y, z) , (F_x, F_y, F_z) とおき、(2) 式を成分にわけると (3) ~ (5) 式になる。

$$(m + \bar{m}') \ddot{x} = -\rho \overline{C_D A} \dot{R}^2 \frac{\dot{x}}{|\dot{\mathbf{R}}|} + F_x \quad (3)$$

$$(m + \bar{m}') \ddot{y} = -\rho \overline{C_D A} \dot{R}^2 \frac{\dot{y}}{|\dot{\mathbf{R}}|} + F_y \quad (4)$$

$$(m + \bar{m}') \ddot{z} = -\rho \overline{C_D A} \dot{R}^2 \frac{\dot{z}}{|\dot{\mathbf{R}}|} + F_z + (m - m_0) g \quad (5)$$

粒子 R 数がある程度大きく、 $\dot{z}^2 \gg \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ で z 方向の運動が定常になった状態を考える。その時の沈降速度を w_0 とすれば、 $x-y$ 面の運動は

$$\ddot{x} + a \dot{x} = n_x \quad (6)$$

$$\ddot{y} + a \dot{y} = n_y \quad (7)$$

で示される。ここに、 $a = \rho \overline{C_D A} w_0 / (m + \bar{m}')$, $n_x = F_x / (m + \bar{m}')$, $n_y = F_y / (m + \bar{m}')$ 。

現象は z 軸に関して対称であり、 x および y 軸のえらび方に関係しないので、(6) 式のみを解けばよい。

(6) 式を積分すると

$$\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(0)}{dt} + a [x(t) - x(0)] = \int_0^t n_x(t) dt \quad (8)$$

となる。また、 z 方向の平均速度 w_0 は

$$w_0 = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{\frac{F_z + (m - m_0) g}{\rho \overline{C_D A}}} dt \quad (9)$$

であり、これについては G.R. Alger¹⁰⁾ が詳細に実験的研究を行なっている。

次に、作用力 F_x を与えて (8) 式を解くことを考える。今考えている時間スケール Δt は、作用力の相関時間スケールより十分大きいので、 F_x の自己相関関数 R_{FF} は次のようにおくことができると考えられる。

$$R_{FF} = E \{ F_x(t_1) F_x(t_2) \} \propto \delta(t_2 - t_1) \quad (10)$$

ここに、 E は期待値演算を示す。さらに、 $F_x(t)$ が期待値ゼロでその大きさが中心極限分布をしているとすれば、(8) 式は初期条件

$$x(0) = 0, E \left\{ \frac{dx(0)}{dt} \right\} = 0, E \left\{ \frac{dx(0)}{dt} \cdot \frac{dx(0)}{dt} \right\} = a / 2a \quad (11)$$

のもとで解くことができる。

ただし、 α は $n_x = F_x / (m + \bar{m}')$ のパワースペクトルである。その結果 x の期待値 η 、分散 R_{xx} および分布関数 f_x はそれぞれ次のようになる。

$$\eta(t) = E\{x(t)\} = 0 \quad (11)$$

$$R_{xx}(t) = E\{x(t)x(t)\} = \frac{\alpha}{2a^3} (1 - e^{-at}) (2at - 1 + e^{-at}) \quad (13)$$

$$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp[-x^2/2\sigma^2(t)] \quad (14)$$

ここに、 $\sigma(t)$ は標準偏差で、この場合には $R_{xx}(t)$ の平方根と一致する。

t が十分大きい状態では、 $t \simeq z/w_0$ および $az/w_0 \gg 1$ と考えることができる

$$\eta(z) = E\{x(z)\} = 0 \quad (15)$$

$$\sigma^2(z) = E\{(x - \eta)(x - \eta)\} \div \frac{\alpha}{a^2} \cdot \frac{z}{w_0} \quad (16)$$

$$f_x(z) = \frac{a\sqrt{w_0}}{\sqrt{2\pi}\alpha z} \exp[-x^2/(\frac{2\alpha z}{a^2 w_0})] \quad (17)$$

となる。これを図示したのが Fig. 2 である。 α は作用力 n_x に関する未定係数で、理論的には定まらず、実験的に定める必要がある。Fig. 3 は $\sigma(z) \propto \sqrt{z}$ を示す実験結果^{7),8)} である。ただし、粒径 d_s で無次元化し、 $\sigma^*(z) = \sigma(z)/d_s$ 、 $z^* = z/d_s$ である。Fig. 4 は、(16) 式の $\sigma(z) \propto \sqrt{z}$ の比例係数に相当する、 $\alpha/a^2 w_0 d_s$ と粒子レイノルズ数 $R_e = w_0 d_s / \nu$ の関係を示したもので、箭内、Tawatchai の実験値を整理し直してプロットしたものである。これより、粒子 R_e 数が $10 \sim 10^3$ の範囲では、 $\sigma^*(z)$ と $\sqrt{z^*}$ の比例係数はほぼ一定値をとることがわかる。

これは次のような理由によるのではないかと思われる。すなわち、この程度の粒子 R_e 数の領域では、比較的大きな渦のはく離が生じ、その時に粒子に大きな作用力が働く。その平均的な大きさおよび作用時間をそれぞれ F および T とすれば、

$$\alpha \sim F^2 T / (m + \bar{m}')^2 \quad (18)$$

の関係が成立する。 F が w_0 の 2 乗に比例するとし、その比例係数を C_L とおくと

$$\alpha \sim (\rho C_L A w_0^2) / (m + \bar{m}')^2 \quad (19)$$

となる。また、前述の定義より $a^2 = (\rho C_D A w_0^2) / (m + \bar{m}')^2$ であるから、(18) 式は次のようになる。

$$\sigma^2(z) \sim (C_L / C_D)^2 w_0 T z \quad (20)$$

円柱の後からはく離する渦のストローハル数は、 R_e 数 $10 \sim 10^3$ の範囲ではほぼ一定値で、他の物体の場合も同程度の値であることが知られている^{10),11)}。球形に近い

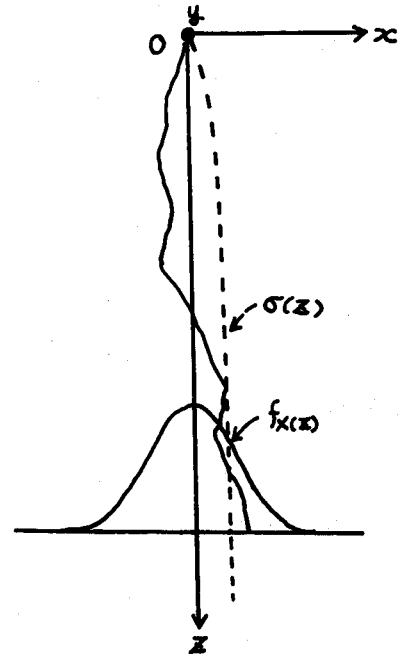


Fig. 2

物体の場合のストローハル数 $S = nd_s / w_0$ も、この R_e 数の範囲でほぼ一定であると仮定すると

$$T' = \frac{1}{n} \propto \frac{d_s}{w_0} \quad (21)$$

となる。ここに、 n は単位時間当り粒子から離脱する渦の数で、 T' は周期を示す。 T と T' が比例すると考えれば、(19) 式は

$$\sigma^2(z) \sim (\bar{C}_L / \bar{C}_D)^2 d_s z \quad (22)$$

となる。(20) 式を d_s で無次元化し、係数 k を導入すると

$$\sigma^{*2}(z) = k (\bar{C}_L / \bar{C}_D)^2 z^* \quad (23)$$

となる。 k は粒子の形状に関する比例係数である。Fig. 4 に示されるように、 σ^* と $\sqrt{z^*}$ の比例係数が、粒子 R_e 数 $10 \sim 10^3$ の範囲でほぼ一定値をとるのは、 $\bar{C}_L / \bar{C}_D$ が粒子 R_e 数に依存しないためと思われる。

個別に投入した多数個の粒子の堆積は、単粒子沈降の解を重ね合わせることににより、次のように表わせる。

$$C(x, z) / C_m(0, z) = \exp[-x^2 / 2\sigma^2(z)] \quad (24)$$

ここに、 $\int_{-\infty}^{\infty} C(x, z) dx = Q_0$ 、 Q_0 ; 投入量。

すなわち、投入量がわかれば、単位幅当りの堆積量 C が (23) 式より求まる。

以上は、軸対象の現象を二次元的に観察した場合の解である。円柱座標系 (r, θ, z) で確率密度関数 $f_r(z)$ を書くと、偏角 θ に無関係で

$$f_r(z) = \frac{1}{\sigma^2(z)} r \exp[-r^2 / 2\sigma^2(z)] U(r) \quad (25)$$

となる。ここに、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ 、 $U(r)$; 単位ステップ関数。 $\sigma(z)$ は (16) 式で与えられる。

3. 連続的に投入された粒子のちらばり

粒子が連続的に投入された場合の散らばりでは、粒子と流体および粒子間の相互干渉が重要となり、単粒子沈降に比較して問題は複雑になる。ここでは、重力効果に比較して乱れによる拡散が無視しうのような、粒子 R_e 数がある程度大きく、粒子濃度が小さい場合を考察する。この場合には、連続投入した時のちらばり幅を、単粒子沈降の結果から予測することが可能

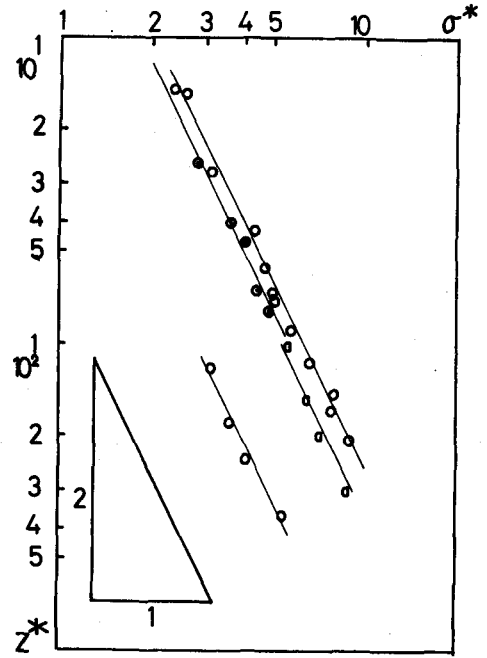


Fig. 3

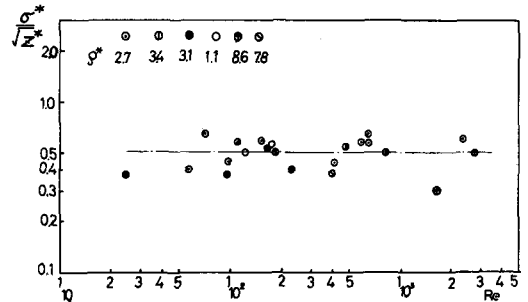


Fig. 4

となる。

粒子を連続的に投入すれば、Fig. 5 に示したように、ある幅拡がる間に、粒子は粒子沈降によって誘起される平均流に乗って移動する距離だけ、単粒子沈降の場合より余分に沈降する。その結果、この移流効果のために、単粒子沈降に比較して多粒子沈降の拡散幅は減少する。多粒子沈降の拡がり幅は、二次元の場合、単粒子沈降のちらばり幅をもとにして、以下の仮定のもとで、運動量式および粒子の連続式を用いて計算することができる。

仮定

- (1). 濃度 $C(x, z)$ の分布形は、 $C(x, z)/C_m(0, z) = \exp[-x^2/2\sigma_1^2]$ 。
- (2). 平均流速 $U(x, z)$ の分布形は $U(x, z)/U_m(0, z) = \exp[-x^2/2\sigma_2^2]$ 。
- (3). 圧力は静圧分布。
- (4). 運動量と粒子の分散は等しい。 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_0$ 。

運動量式；

$$\frac{1}{\sqrt{2}C_0} U_m^{*2} \sigma_0^* - \frac{1}{\sqrt{3}} C_m^* U_m^{*2} \sigma_0^* = \int_0^{x^*} C_m^* \sigma_0^* dx^* \quad (26)$$

粒子の連続式；

$$\frac{1}{\sqrt{2}} C_m^* U_m^* \sigma_0^* + C_m^* \sigma_0^* = Q_0^* \quad (27)$$

ここに、 C_0 ；基準濃度、 $C_m^* = C_m/C_0$ 、 $U_m^* = U_m/w_0$ 、 $\sigma_0^* = \sigma_0/d_s$ 、 $Q_0^* = Q_0/d_s \rho w_0$ 、 $\rho^* = \rho_s/\rho$ 、 $G^* = g d_s/w_0^2$ 、 ρ_s ；粒子密度。(25),(26)より U_m^* は次式で与えられる。

$$U_m^* \left[\frac{1}{\sqrt{2}C_0} \sigma_0^* - \frac{1}{\sqrt{3}} Q_0^* / \left(\frac{1}{\sqrt{2}} U_m^* + 1 \right) \right] = (\rho^* - 1) \int_0^{x^*} Q_0^* / \left[\frac{1}{\sqrt{2}} U_m^* \sigma_0^* + \sigma_0^* \right] dx^* \quad (28)$$

Fig. 6 に実験値⁸⁾および計算結果を示した。実験条件は、 $C(0,0) = 0.037g/cc$ 、 $Q_0 = 0.184g/sec$ 、 $\rho_s = 1.05g/cm^3$ 、 $\rho = 1.00g/cm^3$ 、 $d_s = 0.3cm$ 、 $w_0 = 4.14cm/sec$ である。太い線が計算結果を示している。ただし計算に用いた u は、粒子のフラックスの標準偏差を与える点の流速である。

軸対称のちらばりの場合についても、(25)式をもとにして同様の方法で予測が可能である。

4. 結 語

単粒子沈降のちらばり幅を確率過程としてとらえ、運動方程式から出発し、ちらばりの分布に関する式

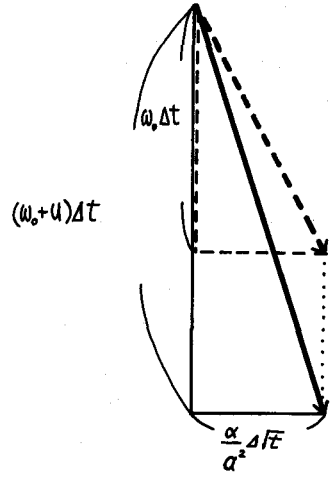


Fig. 5

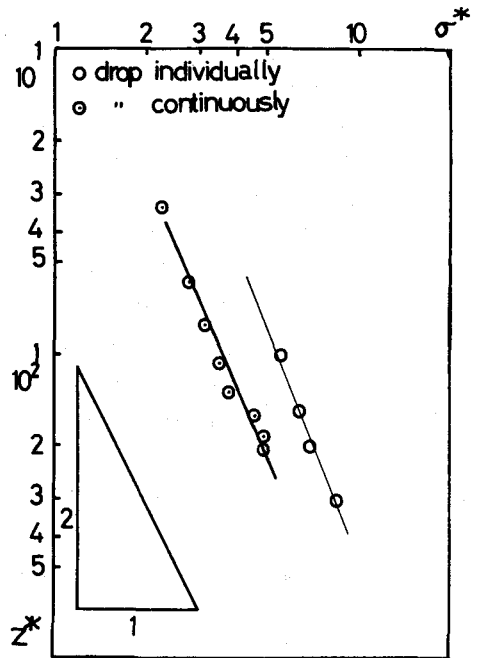


Fig. 6

を導いた。これには未定パラメータが一個含まれており、それを実験値^{7),8)}から定めた。この結果を用いることにより、粒子 R_0 数が $10 \sim 10^3$ の単粒子沈降のちらばりを推定することが可能である。また、粒子を連続的に投入した場合のちらばり幅を、粒子濃度が低く乱れによる拡散が重力効果に比して無視できる場合には、単粒子沈降の結果から予測できることを示した。乱れによる拡散が無視し得ない場合の粒子の拡がりについては、現在検討中である。

参 考 文 献

- 1) Lamb, H. : "Hydrodynamics", Cambridge Univ. Press. 1932
- 2) Leal, L.G. : "On The Effect Of Particle Couples On The Motion Of A Dilute Suspension Of Spheroids", J. Fluid Mech., vol. 46, part 2, 1970
- 3) Lin, C. J., Lee, K. J., Sather, N. F. : "Slow Motion Of Two Spheres In A Shear Field", J. Fluid Mech., vol. 43, part 1, 1970
- 4) Smith, T. N. : "The Spatial Distribution Of Spheres Falling In A Viscous Fluid", J. Fluid Mech., vol. 32, part 1, 1968
- 5) Jayaweera, O. L. F., Mason, B. J., Slack G. W. : "The Behaviour Of Clusters Of Spheres Falling In A Viscous Fluid, part 1, Experiment, part 2, Slow Motion Theory", J. Fluid Mech., vol. 20, part 1, 1964
- 6) Kynch, G. J. : "The Slow Motion Of Two Or More Spheres Through A Viscous Fluid", J. Fluid Mech., vol. 5, 1958
- 7) 箭内寛治 : "砂および礫の水中落下のちらばりに関する研究" 土木学会論文集第 69 号, 1960
- 8) Tawatchai, T. : "Gravitational Convection", thesis No. 336, Asian Institute Of Technology, Thailand, 1970
- 9) 吉川秀夫, 福岡捷二, 吉川勝秀 : "静水中を落下する粒子の拡がりについて", 土木学会第 30 回年講, 1975
- 10) 日野幹雄 : "流体力学", 朝倉書店, 1974
- 11) 谷一郎 : "流れ学", 岩波書店, 1967
- 12) Landau, L. D., Lifshitz, E. M. : "Fluid Mechanics", Pergamon Press, 1963
- 13) Papoulis, A. : "Probability, Random Variables, And Stochastic Process", Mc Graw-Hill, Inc., 1965
- 14) Feller. W. : "An Introduction To Probability Theory And Its Applications", J. Wiley & Sons, Inc., 1966
- 15) 小川元, 竹内益雄 : "土捨船による投棄土砂の分散", 土木学会論文集第 161 号, 1969