

河床安定理論の立場からみた河川蛇行の卓越波長について

中央大学理工学部 正会員 林 泰造
中央大学大学院 学生員○尾崎幸男

1. まえがき

河床波の発生機構については従来から多くの実験的および理論的研究がなされている。その中で、河床安定理論は河床波の成因や発生条件等を研究する上で有力な手段の一つである。河床安定理論には流れの解析に当ってポテンシャル流を仮定したもの（ポテンシャルモデル）と開水路流れの基礎方程式に基づくもの（せん断流モデル）とがある。本報は後者に属し、河川の不定流の式と水流および流砂の連続式において水流は準定常で河床のみ非定常と考えて取扱うモデルである。

3次元河床波（交互砂州）に関してせん断流モデルを用いた理論としては、Hansen¹⁾、Callander²⁾、銚川³⁾、椿・渡辺・定村⁴⁾、Engelund-Skovgaard⁵⁾、前報の著者等⁶⁾、またポテンシャルモデルでは林⁷⁾の諸研究が見られる。

本研究においては、前報理論の簡単化と修正を試み、3次元河床波の不安定機構を解明し、河床波の安定限界、河川蛇行（交互砂州）の卓越波長を求め、それらを実験値および実際河川において認められている関係式と比較検討したものである。

2. 3次元河床波（交互砂州）の成因

河床に微小擾乱を与えた際、これに伴って変動が生ずると思われる水理量との間の位相差によって河床が不安定となるとしたのが前報であった。この場合、不安定性に最も関与するのは何であるかを考察したのが本報であり、それは以下に述べるように横方向の流速 v に求めることができる。

いま、主流方向の流速 $u = U + u'$ 、横方向の流速 $v = v'$ 、河床変動 $\eta = \eta'$ とする。ここに、 U は平均流速で、 u' 、 v' 、 η' は振幅を u_0 、 v_0 、 η_0 とする微小変動量である。現象の本質を明らかにするため、河床変動 η' と横方向の流速変動 v' には不安定性に関係する位相差は存在しないものとする。このときの河床面上の流線は図-1のように示される。後出3節の線型方程式の x 方向の運動方程式(13)と水流の連続式(15)とから ξ' （水面変動）を消去して、 η' 、 v' 、 u' のみの式を導きそれに

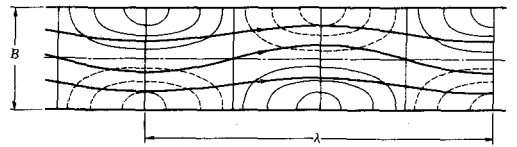


図 - 1 河床面上の流線

$$\eta' = \eta_0 e^{ikx} \cos \beta y \quad (\eta_0: \text{実数}) \dots\dots\dots (1)$$

$$v' = v_0 e^{ikx + i(\pi/2)} \sin \beta y \quad (v_0: \text{実数}) \dots\dots\dots (2)$$

を代入して u' をとくと

$$u' = u_1 e^{ikx} \cos \beta y$$

が得られるが、その結果は u_1 が複素数となり u' には位相差が含まれることが判る。そこでその位相差 ϕ_1 を u_1 から離して $u' = u_0 e^{ikx + i\phi_1} \cos \beta y$ (u_0 : 実数) $\dots\dots\dots (3)$

とおき ϕ_1 を求めると位相差 ϕ_1 は次式で表わされる。

$$\tan \varphi_1 = \frac{-3k^3 I_0 \eta_0 + k^2 \beta I_0 (2 + F^2) v_0}{k^4 (1 - F^2) \eta_0 - k \beta (k^2 (1 - F^2) + 3 I_0^2) v_0} \quad (4)$$

ただし, I_0 : 等流時の河床勾配, F : Froude 数.

ここで $v_0 = 0$ の場合を考えると, $F < 1.0$ のとき上式から φ_1 は負になり図-2から河床は常に安定となることが判る。しかし, $v_0 \neq 0$ の場合には上式からも判るように v の存在によって $\varphi_1 > 0$, $\varphi_1 < 0$ となりうるため, 河床に不安定性が生ずることになる。ところが, このためには河床の摩擦抵抗即ち I_0 も必要である。もし $I_0 = 0$ ならば, たとえ v があったとしても位相差が生ずるはずがなく, 従って河床は中立安定となる。この点 ($I_0 \neq 0$) がせん断流モデルの特徴である。不安定河床の一例を図-3に示す。

以上がせん断流モデルを用いた際の3次元河床波発生機構の説明である。

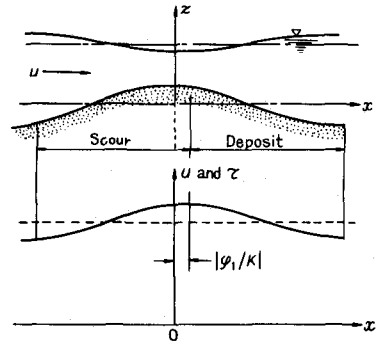


図-2 Alternating bars (Stable)

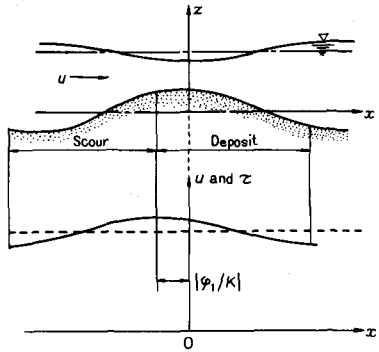


図-3 Alternating bars (Unstable)

3. 3次元河床波の安定限界

一般に, 河床せん断力 τ は次式で表わせる。

$$\tau = f \frac{1}{2} \rho q^2 \quad (5)$$

ここに, $q^2 = u^2 + v^2$, f は摩擦抵抗係数であり, 等流時の $\tau = \rho g D I_0$, $q^2 \cong U^2$ と(1)式とから

$$f = 2 I_0 / F^2 \quad (6)$$

と定義されるものである。

ここに, $F = U / \sqrt{gD}$: 水流の Froude 数, D : 平均水深。

x , y 方向の河床せん断力は, τ の x , y 成分であるから次式で表わせる。(ただし, ψ は τ と x 軸のなす角)

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= f \frac{1}{2} \rho q^2 \cos \psi = f \frac{1}{2} \rho q \cdot u \\ \tau_y &= f \frac{1}{2} \rho q^2 \sin \psi = f \frac{1}{2} \rho q \cdot v \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

前報では摩擦抵抗係数 f の変化 (水深の関数として) 考慮したが, 本報では(6)式で定義したように f = 定数として理論の簡単化を行う。

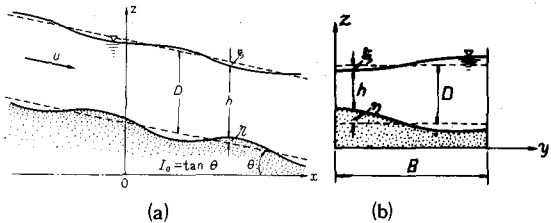


図-4 河床形状と座標軸

さて, 水流は準定常で河床のみ非定常と考えると基本方程式は(8)~(11)式のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\tau_x}{\rho h} - g I_0 = 0 \quad (8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\tau_y}{\rho h} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-n} \frac{\partial q_{sx}}{\partial x} + \frac{1}{1-n} \frac{\partial q_{sy}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに, h は水深, n は河床砂の空隙率であり, q_{sx} , q_{sy} は x , y 方向の流砂量で

$$\left. \begin{aligned} \Phi_s &= f(\tau_*) \\ q_{sy} &= \frac{v}{q} q_{sx} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

とおく。ここに, $f(\tau_*)$: Einstein の掃流砂関数,

$$\Phi_s = \frac{q_{sx} \cdot s}{\sqrt{g(s-1)F} d^{3/2}}, \quad \tau_* = \frac{\tau}{\rho g(s-1)d} : \text{無次元掃流力},$$

$$F = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36\nu^2}{gd^3(s-1)}} - \sqrt{\frac{36\nu^2}{gd^3(s-1)}} : \text{無次元沈降速度},$$

d : 砂の粒径, ν : 水の動粘性係数, s : 砂の比重.

(8)~(11)式に(7)および(12)式を代入し,

$$u = U + u', \quad v = v', \quad \text{水面変動 } \xi = \xi', \quad h = D + \xi' - \eta', \quad \eta = \eta'$$

において方程式を微小変動量(プライムの付いた量)について線型化したのち, 座標軸, 時間並びに微小変動量を平均水深 D と平均流速 U とで無次元化を行うと以下の線型化された無次元方程式(13)~(16)式をうる。

ただし, $f(\tau_*) = 40\tau_*^3$ なる関係式を用いた。

$$F^2 \frac{\partial u'}{\partial x} + 2I_0 u' + \frac{\partial \xi'}{\partial x} - I_0 \xi' + I_0 \eta' = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$F^2 \frac{\partial v'}{\partial x} + I_0 v' + \frac{\partial \xi'}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial \xi'}{\partial x} - \frac{\partial \eta'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + 6A_* \frac{\partial u'}{\partial x} + A_* \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

こゝに,

$$A_* = 40\tau_*^3 \frac{\sqrt{s-1}F}{(1-n)s} \left(\frac{d}{D}\right)^{3/2} \frac{1}{F}, \quad \tau_{*0} = \frac{DI_0}{(s-1)d}.$$

擾乱 η' とそれに伴う変動量 u' , ξ' , v' を次式で表わす。

$$\left. \begin{aligned} \eta' &= \frac{1}{2} \{ \hat{\eta}(y) e^{ik(x-ct)} + \text{Conjugate} \} \\ u' &= \frac{1}{2} \{ \hat{u}(y) e^{ik(x-ct) + i\varphi_1} + \text{Conjugate} \} \\ \xi' &= \frac{1}{2} \{ \hat{\xi}(y) e^{ik(x-ct) + i\varphi_2} + \text{Conjugate} \} \\ v' &= \frac{1}{2} \{ \hat{v}(y) e^{ik(x-ct) + i\varphi_3} + \text{Conjugate} \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに, $\hat{\eta}$, $\hat{\xi}$, $\hat{u}$ および $\hat{v}$ は y だけの関数で実数とする, φ_1 , φ_2 , φ_3 : u' , ξ' , v' がそれぞれ η' に対してもつ位相差, k は無次元波数で $2\pi D/L$, L は擾乱の波長, C は複素位相速度で $C = Cr + iCi$.

(17)式を(13), (15), (16)式に代入して(18)式を得, (14)式に代入して(19)式をうる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \frac{d\hat{v}}{dy} \quad (18)$$

$$(ikF^2 + I_0)e^{i\varphi_3}\hat{v} + e^{i\varphi_2}\frac{d\hat{\xi}}{dy} = 0 \quad (19)$$

こゝに、

$$\begin{aligned} a_{11} &= (ikF^2 + 2I_0)e^{i\varphi_1}, & a_{12} &= (ik - I_0)e^{i\varphi_2}, & a_{13} &= I_0, & a_{21} &= ike^{i\varphi_1}, \\ a_{22} &= ike^{i\varphi_2}, & a_{23} &= -ik, & a_{31} &= 6ikA_e e^{i\varphi_1}, & a_{32} &= 0, & a_{33} &= -ikC, \\ b_1 &= 0, & b_2 &= -e^{i\varphi_3}, & b_3 &= -A_e e^{i\varphi_3}. \end{aligned}$$

さて、(18), (19)式から $\hat{v}(y)$ に関する微分方程式(20)式を導き、それを境界条件： $y=0$ および B/D で $\hat{v}=0$ の許に解くと (22) 式が得られる。

$$\frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + \alpha^2\hat{v} = 0 \quad (20)$$

たゞし、

$$\alpha^2 = (ikF^2 + I_0)e^{-i\varphi_2 + i\varphi_3} J_0 / J_1, \quad (21)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad J_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(20)式から

$$\hat{v} = v_0 \sin \frac{m\pi D}{B} y \quad (22)$$

ここに、 v_0 は v の振幅で先の仮定により実数である。 $m=1, 2, 3, \dots$

ところで、(22)式が成り立つためには

$$\alpha^2 = \left(\frac{m\pi D}{B} \right)^2 \equiv \beta^2 \quad (23)$$

となる必要がある。この条件から複素位相速度 C の取りうる値が決定される。(21), (23) 式から次式をうる。

$$C = A_e \frac{kF^2(\beta^2 + 6k^2) - 3iI_0(2k^2 - \beta^2)}{kF^2(\beta^2 + k^2 - k^2F^2) + 3kI_0^2 - iI_0(2\beta^2 + k^2 - 4k^2F^2)} \quad (24)$$

河床の不安定性に関係するのは C の虚数部 Ci である。

(24)式から Ci を分離し、不安定領域 ($Ci > 0$) を求めると (25)式で示すことができる。

$$F^2 < F_c^2 \quad \text{のとき} \quad c_i > 0 \quad (25)$$

ここに

$$\begin{aligned} F_c^2 &= \frac{5\beta^2(\beta^2 + 2k^2)}{(7\beta^2 + 18k^2 + 4.5f^2)k^2 - 2.25f^2\beta^2} \\ &\cong \frac{\beta^2}{k^2} \frac{5\beta^2 + 10k^2}{7\beta^2 + 18k^2}. \end{aligned}$$

安定限界 (河床が中立, $Ci=0$) は

$$F = F_c \quad (26)$$

で与えられる。(26)式と実験結果並びに鮭川の理論(破線)と比較したのが図-5である。実験値はすべて不安定領域内にあり、本理論と鮭川の理論とはほぼ一致している。

なお、実験データは木下、風間および井口・鮭川・吉野によるものであり、鮭川の論文から読み取った。

4. 流れのモードと卓越波長

前報において、流れのモードが大なるほど統合された交互砂州の卓越波長は実際河川で認められている蛇行波長と河川幅との関係式⁸⁾

$$\frac{\lambda}{B} = 7 \sim 15 \dots\dots\dots (27)$$

に近づくことを示した。このことは、実際河川において単列交互砂州と複列交互砂州とが併存し、ときには単列が、ときには複列が卓越するという木下の観測に基づいたものであった。本節では、さらに上記の考えを一步進めてFroude数の小さい実際河川について、より適当と思われるモデルで考察した理論結果と(27)式および実験値との比較を行う。

さて、実際河川、移動床水路において図-6のような縦渦が木下⁹⁾によって、また開水路では森・黒木・岸¹⁰⁾によって観察されている。流速の大きい収斂線の間隔は水深の約2倍となっており、縦渦の直径は水深にほぼ等しいことが見いだされている。この収斂線は、ある長さで切れてしまい、蛇行形状を呈している。従って、境界層における二次流の研究(例えばD.J. Benney¹¹⁾)と上記のことを考え合わせて流れを図-7のように示すことができよう。このとき水表面の流線は図-8のようになる。

一方、本理論の流れのモード m は、流線の蛇行の様相を表わしている。図-9は $m=4$ の場合のパターンを1例として示したものであるが、前報と同様に考え、モード m の流れが統合され実際河川の蛇行に移行してゆき、このとき蛇行波長が λ となると考える(図-9) この場合、 λ は水流の個々の蛇行波長(すなわち単列蛇行波長) L の m 倍である。

ところで、3節の不安定領域を表わす式(25)は、 m が大きいほど不安定領域が広くなることを示している。

* (脚註) 前報で、河川の蛇行波長を統合形成された交互砂州の1.5倍(水流の個々の蛇行波長の1.5 m 倍)としたが、河道蛇行の形成時においては、交互砂州の波長と一致するので、ここで前報の訂正をし、図-9の λ をもって河川の蛇行波長と考えることに改める。

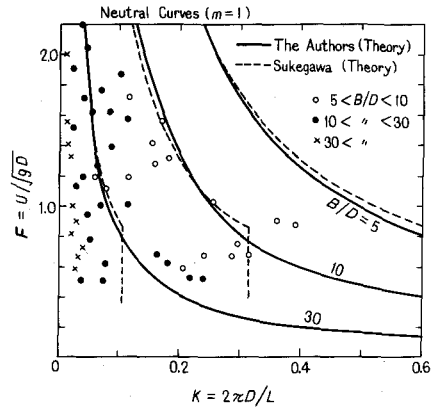


図-5 安定限界($F = F_c$)と実験値の比較

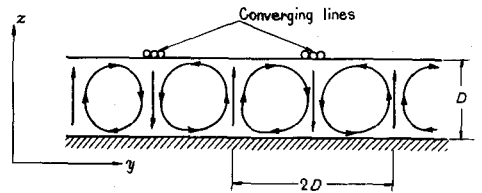


図-6 縦渦

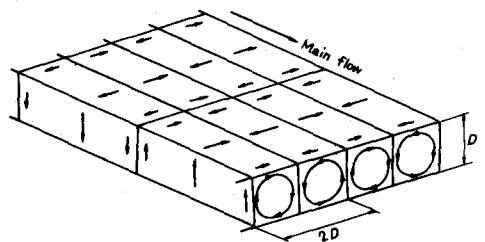


図-7 流れの立体構造

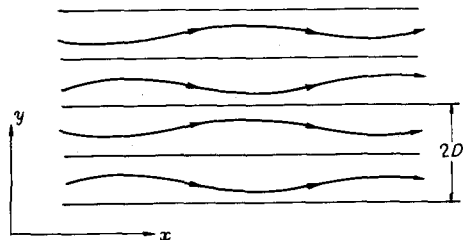


図-8 水表面の流線

従って、 m が大から小へ即ち、複列蛇行から単列蛇行へ移行して行くとしても何らおかしくはない。このことは、実際河川に複列交互砂州（うろこ状砂州）と単列交互砂州が併存していることからもうかがえることである。複列蛇行が統合されていく過程において、例えば $m=4$ から $m=2$ の場合に移行する場合もあるわけで、川幅の広狭変化や網状流路などの形成も当然考えられることである。しかし、河道計画、最も重要となるのは単列交互砂州の形成された場合であると思われるので、卓越波長については統合形成された波長のみを扱えばよいことになる。

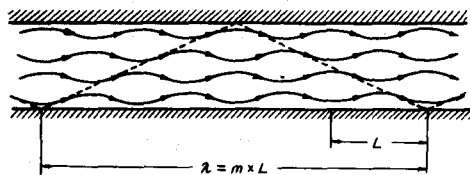


図-9 複列蛇行と統合蛇行波長

いま、縦渦の最小径を水深 D とするならば、河幅 B の河川のもつモード m は

$$m \cong B/D \quad \dots\dots\dots (28)$$

とすることができる。この m は流路のもつ最大モードである。

擾乱の増幅率は $e^{kc_i t}$ であり、卓越波長は kc_i を極大にする波長と考えられる。前節から kc_i は (29) 式のように表わすことができる。

$$kc_i = \frac{1}{2} A_1 \cdot f \cdot \frac{-a_1 k^8 + a_2 k^4 + a_3 k^2}{a_4 k^8 + a_5 k^4 + a_6 k^2 + a_7} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに、

$$a_1 = 18F^2, \quad a_2 = (10 - 7F^2)\beta^2 - 18I_0^2/F^2, \quad a_3 = (5\beta^2 + 9I_0^2/F^2)\beta^2,$$

$$a_4 = (1 - F^2)^2, \quad a_5 = 2(1 - F^2)\beta^2 + (1 - 2F^2 + 10F^4)I_0^2/F^4,$$

$$a_6 = \beta^4 + 2(2 - 5F^2)\beta^2 I_0^2/F^4 + 9I_0^2/F^4, \quad a_7 = 4\beta^2 I_0^2/F^4.$$

$\frac{\partial kc_i}{\partial k} = 0$ の条件から卓越波長の満足すべき次式をうる。

$$(a_1 a_5 + a_2 a_4) k^8 + 2(a_1 a_6 + a_3 a_4) k^4 + (3a_1 a_7 + a_3 a_5 - a_2 a_6) k^4 - 2a_2 a_7 k^2 - a_3 a_7 = 0$$

(28)式を用いて上式を書き直すと (30)式となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda}{B}\right)^8 + 8\pi^2 \frac{a_2}{a_3} \left(\frac{\lambda}{B}\right)^6 - 16\pi^4 \left(3\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_5}{a_7} - \frac{a_2 a_6}{a_3 a_7}\right) \left(\frac{\lambda}{B}\right)^4 \\ & - 128\pi^6 \left(\frac{a_4}{a_7} + \frac{a_1 a_6}{a_3 a_7}\right) \left(\frac{\lambda}{B}\right)^2 - 256\pi^8 \left(\frac{a_1 a_5}{a_3 a_7} + \frac{a_2 a_4}{a_3 a_7}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

(30)式から統合形成された交互砂州の卓越波長 λ ($m \times L$) が求まり、それを図-10 に示した。卓越波長 λ/B は $0 < F < 0.6$ において勾配 I_0 によってかなり大きな変化を見せている。また Froude 数が 1.0 以上になると卓越波長は 2 本存在し、勾配 I_0 によることなく（特に 2 本目の卓越波長は I_0 に無関係である）Froude 数の増加に伴って増加の傾向を示している。図中の実験値は、Simons et al.¹²、布本¹³、山岡・長谷川¹⁴および木下¹⁵によるものである。（ただし、山岡・長谷川の実験は自由蛇行流路についてのもの）

実際河川における関係式

$$\lambda/B = 7 \sim 15 \quad \dots\dots\dots \text{〔既出 (27)〕}$$

と理論とを比較すると、理論は実際河川の現象をかなりよく説明しえているように思われる。

5. 結 び

本理論では、従来の理論で誘導に成功していなかった実際河川において認められている式 $\lambda/B=7\sim 15$ を導き出し、定数の物理的意味付けを行うことができた。

本研究において導かれた主な結論はつぎのようである。

1) 河川蛇行の成因は、河床変動 η と主流方向の流 u との間に存在する位相差にある。そしてこの位相差は水流の基本方程式(8), (9), (10)の3式自体の中に既に内在しているものであり、それを引き起こすのは横方向の流速 v と河床の摩擦抵抗(すなわち $I_0 \neq 0$)である。その位相差 ϕ は主流方向の運動方程式と水流の連続式から求められて2節の式(4)で表わされる。

2) 実際河川の蛇行波長は図-9に示されるような河床波発生初期における複列交互砂州が統合されてきたもの(同図の λ)と考え、また河床波発生初期のモード m は $m = B/D$ (B は河幅, D は水深)と考えて導いた蛇行波長が式(30)であり、それを一般図表にして示したものが図-10である。

3) 卓越波長は、Froude 数が1.0以上では2種類存在し、河床勾配 I_0 にはほとんど関係せず Froude 数の増加とともに増加する傾向がある。Froude 数が1.0以下では河床勾配と Froude 数とによって大きな変化を見せる。河床勾配が非常に小さい場合には、Froude 数が約0.1~0.6の範囲で最大値をもち、その点の Froude 数より小さいところでは Froude 数の増加によって急激な増加の傾向を見せ、大きいところでは Froude 数の増加に伴って減少し、一定値に近づいてゆく。

引用文献

- 1) Hansen, E. : On the formation of meanders as a stability problem, Basic Research Progress Report No. 13 Hydraulic Laboratory, Technical University of Denmark, 1967.
- 2) Callander, R. A. : Instability and river channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 36, part 3, 1969, pp. 465-480.
- 3) 鮎川 登: 河川蛇行の発生限界に関する研究, 土木学会論文報告集第181号, 1970年9月, pp. 67-76.
- 4) 椿 東一郎・渡辺訓甫・定村寛文: 砂礫堆の形成について, 第26回年次学術講演会概要集Ⅱ-68, 1971年10月, pp. 185-188.
- 5) Englund, F. and Skovgaard, O. : On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, part 2, 1973, pp. 289-302.
- 6) 林 泰造・尾崎幸男: 河川蛇行の成因と卓越蛇行波長, 第19回水理講演会論文集, 1975年2月, pp. 31-38.
- 7) 林 泰造: On the cause of meandering of rivers, IAHR Symp. on River Mechanics, Bangkok, 1973, Vol. 1, pp. 667-678.

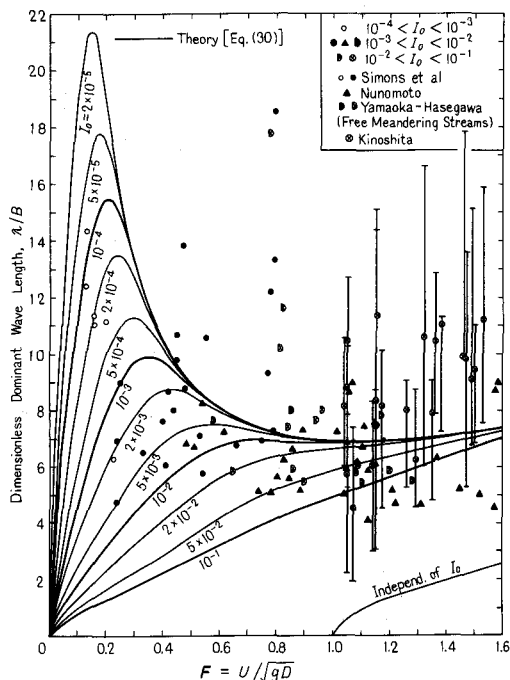


図-10 卓越波長

- 8) 水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会：移動床流れにおける河床形態と粗度，土木学会論文報告集第210号，1973年2月，pp. 65-91.
- 9) 木下良作：航空写真による洪水時の流況測定，水工学シリーズ68-12，土木学会水理委員会，1968年8月.
- 10) 森 明巨・黒木幹雄・岸 力：開水路に見い出された二次流に関する実験，第26回年次学術講演会概要集，Ⅱ - 107，1971年10月，pp. 305-308.
- 11) Benney, D. J. : Finite amplitude effects in an unstable laminar boundary layer, *Physics of Fluids*, Vol. 7, No. 3, March 1964, pp. 319-326.
- 12) Chang, H. Y., Simons, D. B. and Wolhiser, D. A. : Flume experiments on alternating bar formation, *Journal of WW Div., Proc. ASCE*, Feb. 1971, pp. 155-165.
- 13) 布本 博：河川蛇行性の研究，中央大学修士論文，1967年3月.
- 14) 山岡 敷・長谷川和義：自由蛇行流路の流体抵抗について（改訂），文部省科学研究費総合研究(A)最終報告書（研究代表者岸 力），1975年3月.
- 15) 木下良作：石狩川河道変遷調査一参考編——科学技術庁資源局資料，第36号，1961年.