

河床波の発生機構の解析

東京工業大学 工学部 正 員 日野 幹雄
同 大学院 学生員 〇宮永 洋一

1. 概 要

河床波の発生機構は Kennedy¹⁾ (1963), 林²⁾ (1970) が示したように, 河床攪乱による流体場の場所的变化と, それに応ずる流砂量の場所的变化との間の位相差による不安定現象として取扱うことができる。掃流砂量は河床にはたらくせん断応力に強く依存するから, この場合の位相差は Benjamin³⁾ (1959) が波型底面上の層流解によって示したせん断応力～波型変位間の位相差と本質的には同等である⁴⁾。

この論文では河床波の発生機構について, 仮定や実験式に頼ることをできるだけ避け, 解析的な検討を加えた。すなわち, 周期的な波型境界面をもつ二次元管路の層流解を用いて, 流れを準定常, 境界形状を非定常とする線形安定解析により, 河床波の発生および卓越波長の存在を示した。このことは, 層流において実際に河床波が発生することを主張するのではなく, もし層流状態で砂が動くとき仮定すれば河床波は発生しうるし, また実際の乱流状態の河川において見られる河床波の発達も同様の機構によっているであろうことを意図したものである。

実験は摂動法による層流解の妥当性を判定する目的で行なったものであり, 波型底面をもった開水路に水とグリセリンの混合液を流し, 水素気泡法によって流速分布を測定して比較した。

2. 河床波の線形安定解析

a) 波型二次元管路層流の摂動法による解

図 1 に示すような波型境界面をもつ二次元管路の層流を考える。なお, 波型円管の場合について, Chow⁵⁾ により摂動解が得られている。

x, y 方向の流速を u, v とし, 流関数 Ψ を (1) 式で定義すると基礎方程式および境界条件は (2)(3a)(3b) 式のようにあらわされる。

$$u = -\partial \Psi / \partial y$$

$$v = \partial \Psi / \partial x$$

$$Re \delta \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \Psi = \nabla^4 \Psi$$

$$y = 0 : \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

$$y = \eta : \Psi = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

ただし, 変数は h, l, u_m (平均流速) を用いて (4) のように無次元化されている。' をつけた量が無次元化される前の物理量である。

$$\Psi = \Psi' / u_m h, \quad Re = u_m h / \nu$$

$$x = x' / l, \quad y = y' / h, \quad \eta(x) = \eta'(x) / h = \frac{1}{2} + \varepsilon g(x),$$

$$\delta = h / l, \quad \varepsilon = a / h$$

$$\nabla^2 = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

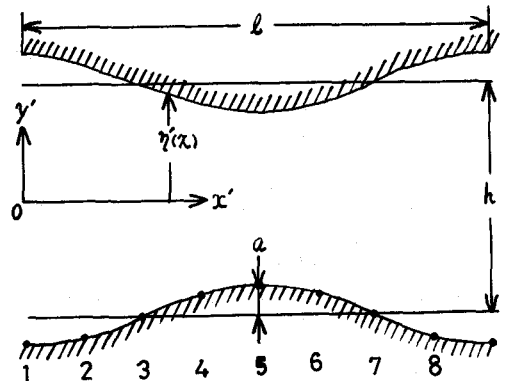


図 - 1

(4)

流関数を δ に関して次のように展開する。

$$\Psi(x, y) = \Psi_0 + \delta \Psi_1 + \delta^2 \Psi_2 + \dots \quad (5)$$

(5) 式を (2) 式に代入し、 δ の各次数別に解を求めると、

$$\Psi_0 = \frac{1}{4} (R^3 - 3R) \quad (6)$$

$$\Psi_1 = \frac{3}{1120} R_e \varepsilon \frac{dg}{dx} (R^7 - 7R^5 + 11R^3 - 5R) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & \frac{3}{40} \left\{ \varepsilon \eta \frac{d^2 g}{dx^2} - 4 \varepsilon^2 \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 \right\} (R^5 - 2R^3 + R) + \frac{R_e^2}{3449600} \left\{ \varepsilon^2 \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 G(R) \right. \\ & \left. - \varepsilon \eta \frac{d^2 g}{dx^2} H(R) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$G(R) = 98R^{11} - 1155R^9 + 4488R^7 - 8778R^5 + 8222R^3 - 2875R \quad (8a)$$

$$H(R) = 35R^{11} - 385R^9 + 1518R^7 - 3234R^5 + 3279R^3 - 1213R \quad (8b)$$

を得る。ただし $R = y/\eta$ である。

速度成分についても (5) にらって、

$$u(x, y) = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots \quad (9)$$

$$v(x, y) = \delta v_1 + \delta^2 v_2 + \dots \quad (10)$$

と展開すれば、(1)(6)(7)(8) 式より、次のようにあらわされる。

$$u_0 = \frac{3}{4\eta} (1 - R^2) \quad (11)$$

$$u_1 = \frac{3R_e}{1120} \varepsilon \frac{dg}{dx} (5 - 33R^2 + 35R^4 - 7R^6) \quad (12)$$

$$u_2 = \frac{3}{40} \left\{ \frac{4\varepsilon^2}{\eta} \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 - \varepsilon \frac{d^2 g}{dx^2} \right\} (1 - 6R^2 + 5R^4) + \frac{R_e^2}{3449600} \left\{ \frac{\varepsilon^2}{\eta} \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 \frac{dG}{dR} - \varepsilon \frac{d^2 g}{dx^2} \frac{dH}{dR} \right\} \quad (13)$$

$$v_1 = \frac{3}{4\eta} \varepsilon \frac{dg}{dx} R (1 - R^2) \quad (14)$$

$$v_2 = \frac{3}{1120} R_e \left\{ \varepsilon^2 \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 R (5 - 33R^2 + 35R^4 - 7R^6) - \varepsilon \frac{d^2 g}{dx^2} R (5 - 11R^2 + 7R^4 - R^6) \right\} \quad (15)$$

これらの解が十分収束するための条件は、たとえば境界形を正弦波とすると $|\delta \Psi_1 / \Psi_0| < 0.11 R_e \delta \varepsilon$, $|\delta^2 \Psi_2 / \Psi_0| < 3.9(\frac{1}{2} + \varepsilon) \varepsilon \delta^2 + 0.02(\frac{1}{2} + \varepsilon) \varepsilon \delta^2 R_e^2$ であるから、 $\varepsilon \delta^2 \ll 1$, $\varepsilon \delta^2 R_e^2 < 1$ 程度と考えられる。

b) 実験値との比較

表1に示した実験条件で、図2のような波型底面をもつ開水路に、グリセリンと水の混合液を流し、水素気泡法によって流速分布を測定し、前節で求めた二次元管路の解と比較してみると、図3のようになる(測定断面の位置は図1に記入してある)。

横軸は単位時間あたりの気泡線の水平間隔 u_b を水面流速 u_s で無次元化したものであり、流線が x 軸と平行でないために、 x 方向の無次元化された流速 u/u_s (破線で記入)とは異なる。したがって、理論値の u 曲線を、 y 方向に流速 v だけずらして u_b の理論値とした。縦軸は各断面における水深 $\eta'(x)$ によって無次元化した相対水深である。

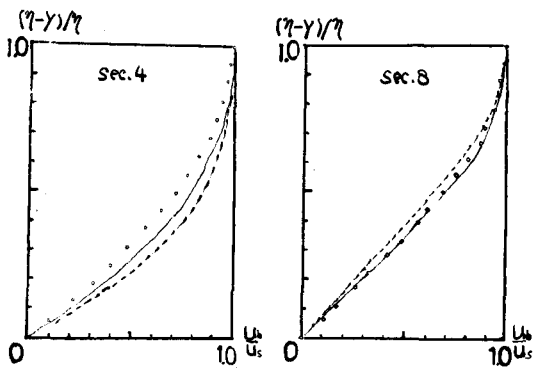
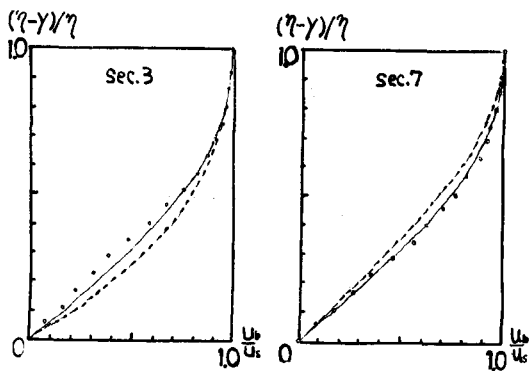
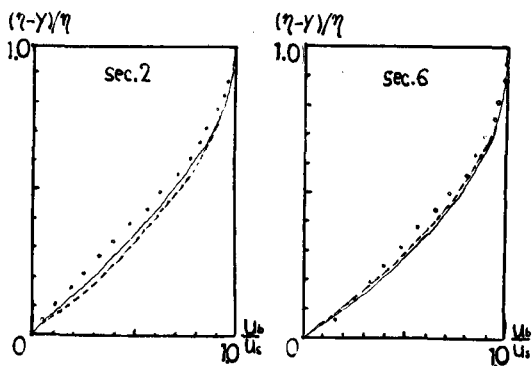
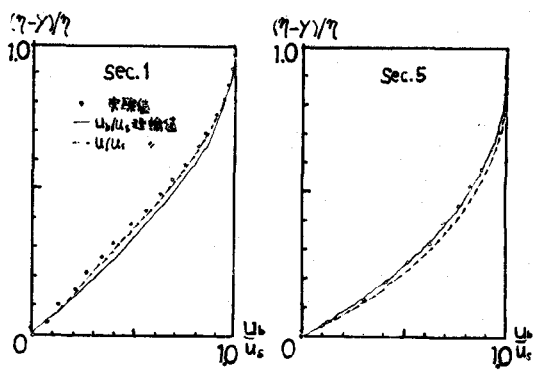


图-3

波型形状	正弦波	流速 U (cm/sec)	0.432
流体	酒精+水	流速 u_s (cm/sec)	1.12
水深 $\frac{h}{2}$ (cm)	5.5	$Re = \frac{u_s h}{\nu}$	28.5
波长 λ (cm)	24	$\epsilon = \frac{a}{h}$	0.045
振幅 a (cm)	0.5	$\delta = \frac{h}{\lambda}$	0.458

表-1 实验条件

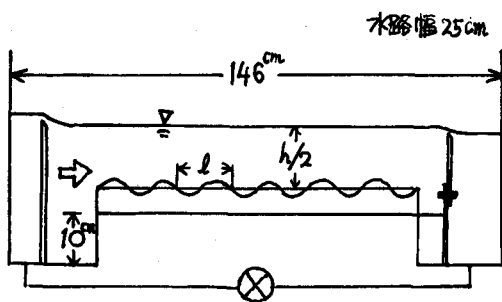


图-2 实验装置

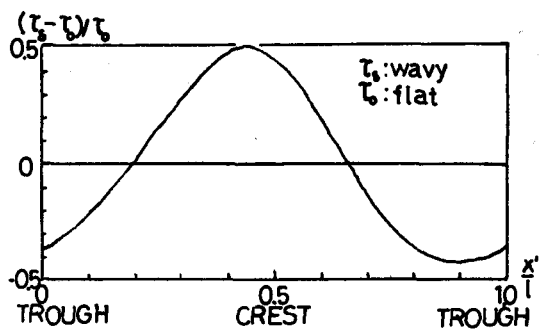


图-4

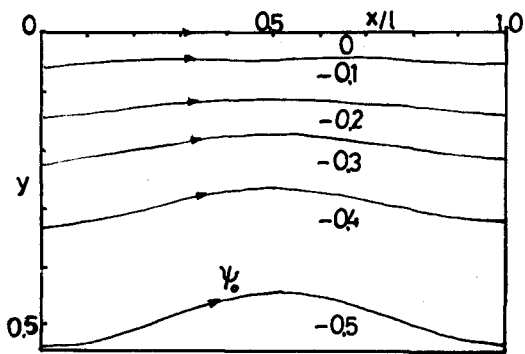


图-5

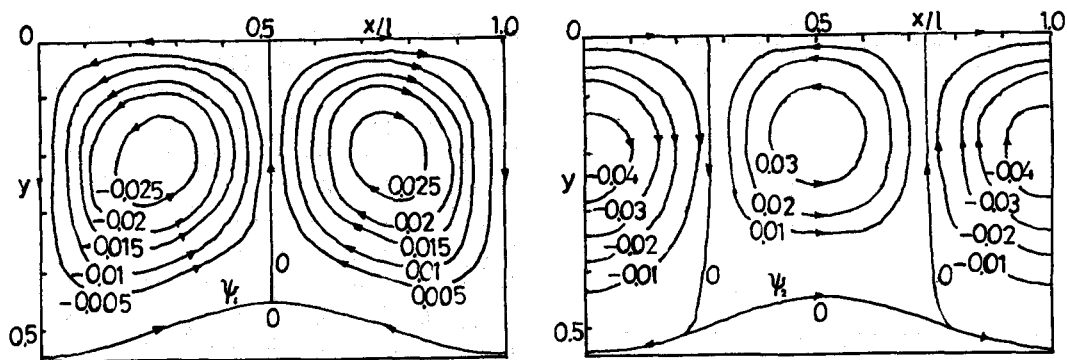


図-5 (続)

実験時に水面の場所的变化は全く見られず、対称な二次元管路流に近い条件が満足されたため速度分布形も比較的良く一致したと思われる。

セン断応力分布は、このような低レイノルズ数での Shear Plate などによる直接の測定が困難なため比較はしないが、実験条件での計算値は図4のようになり、crest よりやや上流にピークがあらわれる。計算式は次節(16)式において ε^2 , δ^2 の項までとったものを用いている。

このような位相差の生ずる理由は流線を描いてみると明らかであり、図5に示されたように、 Ψ_0 に対応するセン断応力は境界形と同位相に変化するが、これに Ψ_1 に対応するセル状の流れ (crest で上昇し, trough で下降する) が加わって上流側のセン断応力が増すのである。こうしたセル状の流れは、振動流の場合につき、グリセリンを利用して日野ら⁶⁾(1975)により可視化されており、波型上の流れに固有であるように思われる。

c) 線形安定解析

a) で議論した流れは定常であるが、いまここで、境界面にはたらくセン断応力 τ_s の n 乗に比例する量だけ境界面表層が輸送され、時間とともに変形していくものとする。この境界面を河床波と考えることにし、河床波の変形に対する流体の応答が十分速い場合には河床を非定常、流れを準定常として扱うことができる⁷⁾。

セン断応力は次式で与えられる。

$$\tau_s = -\frac{1}{R_s} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=\eta} \quad (16)$$

卓越波長を求めるためには、 δ^3 までの解が必要であり、また線形安定解析であるから、 ε については1次まで求めておくことにすると、

$$\Psi_s = \frac{1}{16} R_s \varepsilon \eta^2 \frac{d^3 g}{dx^3} \left\{ -\frac{1}{12600} P(R) + \frac{R_s^2}{1860768000} Q(R) \right\} + O(\varepsilon^2, \varepsilon^3) \quad (17)$$

P, Q はそれぞれ R について9次, 15次の多項式であって、

$$y = \eta : \frac{d^2 P}{dR^2} = -768, \quad \frac{d^2 Q}{dR^2} = -970736 \quad (17a)$$

となる。(16)式に(12)~(15)および(17)式を代入し、(17a)を用いると、

$$\tau_s = \frac{6}{R_s} - \varepsilon \left\{ \frac{24}{R_s} g + \frac{12}{35} \delta \frac{dg}{dx} - \frac{2}{5R_s} \left(3 + \frac{4}{539} R_s^2 \right) \delta^2 \frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{1}{75} \left(\frac{2}{7} - \frac{60671}{24810240} R_s^2 \right) \delta^3 \frac{d^3 g}{dx^3} \right\} \quad (18)$$

を得る。

流砂の連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - C \frac{\partial \tau_s^n}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$C = T (\rho u_0^2)^n C' / h l \quad (19a)$$

ここで t は、時間スケール T により無次元化された時間で、関係するパラメタから T のとり方は何通りか考えられるが、河床を非定常、流れを準定常としているので、流れが平均的に一波長を流れるのに要する時間、すなわち l/u_0 をとるのが妥当であろう。 C' は流砂量の比例定数で、底質の種類によって異なる。

(18) 式を (19) 式に代入し、また $\eta = \frac{1}{2} + \varepsilon g$ に注意して $g = e^{2\pi i x}$ とおくと、 ε^2 以上の項は無視して、

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = p\varepsilon, \quad p = p_r + ip_i, \quad (20)$$

$$p_r = \frac{16}{35} \pi^2 n C \left(\frac{6}{R_s}\right)^{n-1} \left[3\delta + \frac{2\pi^2}{15} \left\{ \left(\frac{R_s}{10.8}\right)^2 - 1 \right\} \delta^3 \right] \quad (20a)$$

$$p_i = -\frac{48}{R_s} \pi n C \left(\frac{6}{R_s}\right)^{n-1} \left[1 + \frac{\pi^2}{5} \left\{ \left(\frac{R_s}{20.1}\right)^2 + 1 \right\} \delta^2 \right] \quad (20b)$$

すなわち、 $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{pt}$ なる解をもち、 $p_r > 0, p_r = 0, p_r < 0$ はそれぞれ河床波の増幅、中立、減衰に対応する。(20a) 式より、 $0 < R_s \leq 10.8$ ではすべての δ に対して河床波は発達し、短波長のもの程その発達速度は速いが、 $R_s > 10.8$ になると、 $0 < \delta \leq 1.5 / \sqrt{(R_s/10.8)^2 - 1}$ をみたすものだけが発達する。また、最大の発達速度を与える δ を δ^* とすると、

$$\delta^* = 0.87 / \sqrt{(R_s/10.8)^2 - 1} \quad (21)$$

となり、これに対応する波長が卓越するものと思われる。その発達速度は C, n に依存するが、(21) 式は C, n を含んでおらず、卓越波長が底質の種類や流砂量関数形に無関係に（少なくともべき乗の範囲で）、流れおよび水深のみで決まることを示している。しかも (20a) 式から明らかなように、 δ^3 の項の存在によって δ^* が求まったのであり、更に δ の高次の解を加えれば、新たに短い卓越波長が次々と求まるであろう。これは現象としては発達する河床波の形状が単純な正弦波形ではなく非対称性をもつことを意味している。

また (20b) 式より p_i は常に負だからこの河床波は下流へ進行する。

以上の結果から、ここでモデル化した河床波は、定性的には dune のような性質を有していると考えられる。

3. む す び

本論文が目的としたのはできるだけ不自然な仮定を含まずに河床波の発生機構を説明しようとするものである。議論の展開にあたっての仮定は次の通りである。

(i) 流れは二次元の層流。 (ii) 河床は非定常、流れは準定常。 (iii) 流砂量はセン断応力のべき乗に比例。

(i) の仮定は、層流状態で河床波が発生すると主張するものではなく、乱流粘性係数という不確実な仮定の導入を避けるためのものである。もちろん、砂粒子のまき上げや移動を層流で説明することには無理があるから、もし層流状態で底質の輸送が行なわれるならば河床波は発生しうるか否かを検討しようとするものである。このことは、層流においても河床波発生の本質的な点が保存されるという考え方にもとづいている。

(ii) の仮定は現象の物理的な考察から得られたものである。(iii) は比較的許容範囲が広いといえる。

計算に用いる流れは速度分布に関して実験値と良い一致を示しており、少なくとも摂動解が成立する領域が実在することは確認された。この摂動解を用いて上記の仮定のもとに線形安定解析を行なって得られた河床波は、実際に乱流状態で発達する dune のいくつかの性質をもつものであり、その発生機構は図 4 に示したような粘性にもとづくセン断応力～波型変位間の位相差によっていることは明らかである。したがって渦動粘性係数一定の仮定のもとに乱流の河床波を取り扱った Englund⁸⁾、Fredsoe⁹⁾ の考え方の本筋は正しいと考

えられる。本論文で示したような河床波の解析方法を乱流場に拡張すれば、流砂量関数に未知の位相差を導入することなしに河床波の発生を説明できるであろう。またここでは掃流砂のみの輸送を考えたが、更に一般的には、流砂量式における非平衡の問題¹⁰⁾を考慮する必要がある。この問題は河床波発生機構を完全に説明するためには不可欠の要素であり、今後検討を加えていくつもりである。

参 考 文 献

- 1) Kennedy, J.F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, J.F.M., Vol. 16, 1963
- 2) Hayashi, T. : Formation of dunes and antidunes in open channels, J. Hydr. Division, ASCE, Vol. 96, HY2, 1970
- 3) Benjamin, T.B. : Shearing flow over a wavy boundary, J. F. M., Vol. 6, 1959
- 4) 日野幹雄・宮永洋一 : 河床波の発生機構, 第30回年講, 1975
- 5) Chow, J. C. F., and K. Soda : Laminar flow in tubes with constriction, Physics of Fluid, Vol. 15, 1972
- 6) 日野幹雄・藤崎治男 : 波型底面上の粘性振動流, 第22回海講, 1975
- 7) 日野幹雄 : 海浜流系および海浜地形の形成に関する流体力学的不安定理論Ⅲ—応答遅速性に基づく理論, 東工大土木工学科研究報告 No. 14, 1973
- 8) Engelund, F. : Instability of erodible beds, J. F.M., Vol. 42, 1970
- 9) Fredsøe, J. : On the development of dunes in erodible channels, J. F.M., Vol. 64, 1974
- 10) 石川忠晴 : 移動床の抵抗則に関する基礎的研究, 東工大修士論文, 1975
- 11) 日野幹雄 : 河床波の発生機構に関する私説, 文部省科研 総合研究 (A)「沖積地河川における河床形態と流体抵抗の研究」最終報告書, (代表者 北大 岸 力), 1975