

東京工業大学 正会員 吉 川 秀 夫
同 学生員 ○石 川 忠 晴

1. は じ め に

境界から離れた位置での浮遊粒子の平均的な移動は拡散方程式を用いて記述され、拡散係数を適切に定めることができれば濃度分布形を求められる。しかし底面での境界条件の取り扱いがかなり難しい為に、濃度の値そのものについては充分にはわかっていない。本研究ではこの点について若干の考察を行った。

拡散問題においては、壁面の条件は粒子が壁面を通り抜けないということである。これを表わすには普通は壁面でのフラックスがゼロという条件式を用いる。しかしフラックスはプラス方向とマイナス方向の通過量の差し引きであるから、この条件式は粒子が壁を通り抜けないという状況を表わしているのではない。事実定常状態においてはこの関係はいたるところで満たされており、境界条件としての意味をなさない。したがって定常状態の濃度分布に対しては「粒子が壁を通り抜けない」というもとの条件に立ち戻って取り扱う必要がある。

このような事情を記述する為には、濃度を変数にとる連続体的な扱いは都合が悪く、何らかの方法で粒子の運動そのものを追ってゆかねばならない。本研究では粒子の移動を確率的に追跡する方法を取った。粒子濃度をこのような立場から求めようとする試み自体は新しいものではなく、Batchelorに始まる一連の研究があるが、これらはいずれも境界を考えておらず、結果的には拡散方程式を用いる方法と大差ない。本研究では境界条件の処理のしかたに重点を置き、他の条件はできるだけ単純化した。

2. 基 礎 方 程 式

砂粒子の運動を次のようにモデル化する。(図1)

- ・時間ステップ Δt ごとに確率的に上昇又は沈降する。
- ・砂粒子の移動の確率的性質は空間に依存しないとする。
- ・砂粒子が底面に到達した場合には上昇する条件が与えられるまで底面に留まる。

第 n ステップの前後の砂粒子位置を y_n, y_{n+1} , 移動距離を η_n とすると

$$y_{n+1} = [y_n + \eta_n]^+ \quad (1) \quad []^+ : [] \text{ 内が負の時ゼロにするオペレーター}$$

y_n の確率密度関数を $f_n(y)$, η の確率密度関数を $g(\eta)$ とすると次式が成り立つ。

$$f_{n+1}(y) = \pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_n(y - \eta) g(\eta) d\eta \right] \quad (2)$$

ここに $\pi[]$ は密度関数の負の部分をゼロに掃き寄せるオペレーターであり、任意の密度関数 $a(\xi)$ に対して

$$\pi[a(\xi)] = \begin{cases} \delta(\xi) \int_{-\infty}^0 a(\xi) d\xi + a(\xi) & (\xi \geq 0) \\ 0 & (\xi < 0) \end{cases} \quad (3)$$

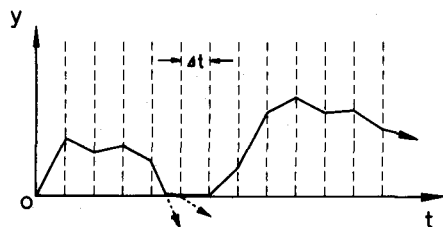


図 1

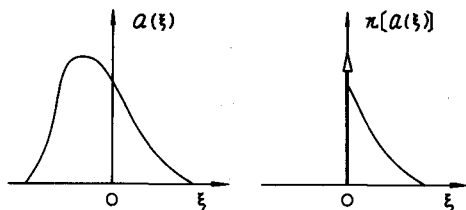


図 2

$t \rightarrow \infty$ で定常確率密度 $f(y)$ が存在するとすれば(2)式は次式となる。

$$f = \pi[f * g] \quad * ; \text{Combolution integral} \quad (4)$$

3. (4) 式 の 解

(4)式を任意の $g(\eta)$ について解くことはできないので、ここでは次式であらわされる密度分布について解を求める。(図3)

$$g(\eta) = \begin{cases} g(0) \exp(-\mu\eta) & (\eta \geq 0) \\ \text{任意} & (\eta < 0) \end{cases} \quad (5)$$

次のような密度関数を考える。

$$g_1(\eta) = \begin{cases} g(-\eta) - \frac{1}{\mu} \frac{dg(-\eta)}{d\eta} & (\eta \geq 0) \\ 0 & (\eta < 0) \end{cases} \quad (6)$$

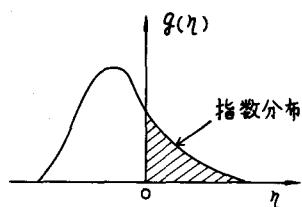


図 3

(6)の両辺に $\exp(-\mu\eta)$ を乗じて $[-y, \infty]$ で積分すると

$$\int_y^\infty \exp(-\mu\eta) g_1(\eta) d\eta = \left[-\frac{1}{\mu} \exp(-\mu\eta) g(-\eta) \right]_Z^\infty \quad (7)$$

$\eta < 0$ で $g_1(\eta) = 0$ であるから、 $y \geq 0$ の時 $Z = 0$ 、 $y < 0$ の時 $Z = -y$ である。したがって右辺は、

$$\begin{aligned} y < 0 \text{ で } & \frac{1}{\mu} \exp(\mu y) g(y) \\ y > 0 \text{ で } & \frac{1}{\mu} g(0) = \frac{1}{\mu} \exp(\mu y) g(0) \exp(-\mu y) = \frac{1}{\mu} \exp(\mu y) g(y) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{これより } g(y) = \mu \exp(-\mu y) \int_{-y}^\infty \exp(-\mu\eta) g_1(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^y \mu \exp\{-\mu(y-\eta)\} g_1(-\eta) d\eta \quad (9)$$

(9)式を書き直すと

$$g = e_\mu * g_2 \quad e_\mu(\eta) = \begin{cases} \mu \exp(-\mu\eta) & (\eta \geq 0) \\ 0 & (\eta < 0) \end{cases} \quad g_2(\eta) = g_1(-\eta) \quad (10)$$

(10)式を(4)式に代入する。

$$f = \pi [f * e_\mu * g_2] = \pi [g_2 * (f * e_\mu)] \quad (11)$$

次のような密度関数 f が(11)式を満たしていることを示す。

$$f = \frac{\theta}{\mu} \epsilon + \left(1 - \frac{\theta}{\mu}\right) e_\theta \quad \epsilon; \delta \text{ 関数型の密度分布, } \theta; 1 - \frac{\theta}{\mu} = L_\theta\{g_1\}, L_\theta; \text{ラプラス変換} \quad (12)$$

$$(\text{証明}) \quad f * e_\mu = \frac{\theta}{\mu} e_\mu + \left(1 - \frac{\theta}{\mu}\right) e_\theta * e_\mu \quad (A)$$

$$e_\theta * e_\mu = \frac{\mu e_\theta - \theta e_\mu}{\mu - \theta} \quad (B)$$

(B)を(A)に代入すると

$$f * e_\mu = e_\theta \quad (C)$$

これより

$$g_2 * f * e_\mu = g_2 * e_\theta = \int_{-\infty}^y \theta \exp\{-\theta(y-\eta)\} g_2(\eta) d\eta = \theta \exp(-\theta y) \int_y^\infty \exp(-\theta\eta) g_1(\eta) d\eta \quad (D)$$

$y \geq 0$ では積分範囲が $[0, \infty]$ となることから次式が成り立つ。

$$\int_0^\infty (g_2 * f * e_\mu) dy = \int_0^\infty \exp(-\theta y) g_1(y) dy \int_0^\infty \theta \exp(-\theta y) dy = L_\theta\{g_1\} = 1 - \frac{\theta}{\mu} \quad (E)$$

$$\text{ゆえに } \int_{-\infty}^0 (g_2 * f * e_\mu) dy = \frac{\theta}{\mu} \quad (F)$$

(3), (D), (F)式より

$$\pi [g_2 * f * e_\mu] = \frac{\theta}{\mu} \epsilon + \left(1 - \frac{\theta}{\mu}\right) e_\theta = f \quad (\text{証明終り}) \quad (G)$$

(12)式を変形して

$$f(y) = (1-\omega)\delta(y) + \mu\omega(1-\omega)\exp\{-\mu(1-\omega)y\} \quad \omega = L_\theta\{g_1\} \quad (13)$$

さて、 $f(y)$ はひとつの砂粒子の位置についての確率密度であるが、平均濃度分布に比例する。またデルタ

関数の部分が河床で乱れにさらされている粒子数に相当するから次式を得る。

$$\frac{f(y)}{1-\omega} = \frac{C(y)}{N_0} \quad C(y); \text{体積濃度, } N_0; \text{砂粒子一個の体積} \left(\frac{\pi}{6} d^3\right) \quad (14)$$

N ; 底面の単位面積にある乱れにさらされている粒子数 $(1/\frac{\pi}{4} d^2)$

$$\text{これより } C(y) = \frac{2}{3} d \mu \omega \exp\{-\mu(1-\omega)y\} \quad (15)$$

4. 計算例

砂粒子が水粒子に対して沈降速度 $-W_0$ に等しい相対速度を持って移動すると考えれば

$$\eta = (v' - W_0) \Delta t \quad (16)$$

ここに v' は鉛直上向きの水粒子の速度で $h(v')$ という確率密度関数に従う確率変数として取り扱う。 $h(v')$ と $g(\eta)$ の間には次の関係が成り立つ。

$$g(\eta) = \frac{1}{\Delta t} h\left(\frac{\eta}{\Delta t} + W_0\right) \quad (17)$$

水粒子速度の確率密度をラプラス分布とする。(図4)

$$h(v') = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda v') & (v' \geq 0) \\ \frac{\lambda}{2} \exp(\lambda v') & (v' < 0) \end{cases} \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v'^2}} \quad (18)$$

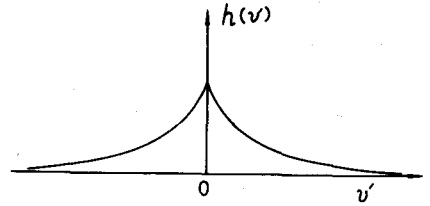


図 4

ワンステップの移動量の確率密度関数は

$$g(\eta) = \begin{cases} \frac{\mu}{2} \exp\{-\mu(\eta + \eta_0)\} & (\eta \geq -\eta_0) \\ \frac{\mu}{2} \exp\{\mu(\eta + \eta_0)\} & (\eta < -\eta_0) \end{cases} \quad \mu = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v'^2} \Delta t} \quad \eta_0 = W_0 \Delta t \quad (19)$$

(16)式を変形すると次の関係を得る。

$$L_\theta\{g_1\} = \left(1 - \frac{\theta}{\mu}\right) L_\theta\{g^*\} + \frac{g(0)}{\mu} \quad g^*(\eta) = \begin{cases} g(-\eta) & (\eta \geq 0) \\ 0 & (\eta < 0) \end{cases} \quad (20)$$

$$(19) \text{式から } L_\theta\{g^*\} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\mu}\right)^2} \exp(-\theta \eta_0) - \frac{1}{2(1 - \frac{\theta}{\mu})} \exp(-\mu \eta_0) \quad (21)$$

(20)式と(21)式から

$$L_\theta\{g_1\} = \frac{1}{1 + \frac{\theta}{\mu}} \exp(-\theta \eta_0) \quad (22)$$

これより次の関係式を得る。

$$\omega(2-\omega) = \exp\left\{\sqrt{2}(1-\omega) \frac{W_0}{\sqrt{v'^2}}\right\} \quad (23)$$

(23)式の関係を図5に示す。

さて、拡散方程式の解は次式で表わされる。

$$C(y) = C(0) \exp\left(-\frac{W_0}{\varepsilon} y\right) \quad (24)$$

(15)式と(24)式から次の関係を得る

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2} W_0 \sqrt{v'^2} \Delta t}{2(1-\omega)} \quad (25)$$

$$Q_s = \frac{2}{3} d \frac{\omega}{1-\omega} \quad (27)$$

Q_s は(13)式を $[+0, \infty)$ にわたって積分したもので、単位面積上にある浮遊粒子の総体積である。

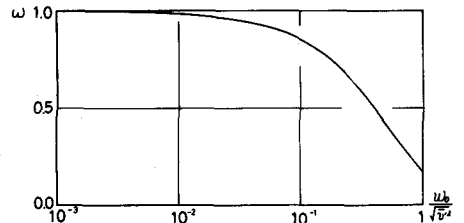


図 5

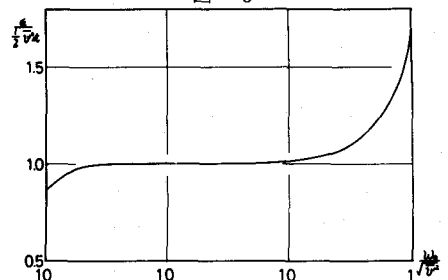


図 6

次章で示すように、境界条件をとりはらって極限操作をすると拡散方程式が得られ、拡散係数 ϵ は $\frac{1}{2}v'^2\Delta t$ となる。したがって、図6から濃度分布形は拡散方程式の解とほぼ同じであることがわかる。また図7から、浮遊粒子の総量は $\sqrt{v'^2}$ に比例していることがわかる。

(5)式以外の密度関数についての解を現在調べているが、 Γ 密度分布については解析解を得られることがわかっている。 Γ 分布の次数を変化させれば種々の分布を近似できるので、より一般的になると思われる。

5. 従来のラグランジュの方法及び拡散方程式との関係

一度舞い上がった粒子がなかなか沈降しない場合には(1)式はほとんどの場合次式となる。

$$y_{n+1} = y_n + \eta_n \quad (27)$$

したがって近似的に

$$y_{n+i} \approx y_i + \eta_i + \dots + \eta_{i+n-1} \quad (28)$$

中心極限定理から次式が成り立つ

$$g(\xi) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{(\xi - n\eta_0)^2}{2n\sigma^2}\right\} \quad \xi = \sum_{j=i}^{i+n-1} \eta_j \quad \sigma: \eta \text{の標準偏差}, \eta_0: \eta \text{の平均値} \quad (29)$$

時間 τ の間に $\tau/\Delta t$ 回の試行がなされるから時刻 t から $t+\tau$ への $f(y)$ の遷移確率密度は

$$g(y, t+\tau | y_0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v'^2 \Delta t \tau}} \exp\left\{-\frac{(y - y_0 + w_0 \tau)^2}{2 v'^2 \Delta t \cdot \tau}\right\} \quad (30)$$

ここで Δt と τ の比を一定にとれば次式を得る。

$$g(y, t+\tau | y_0, t) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - (y_0 - w_0 \tau))^2}{2 \sigma_y^2}\right\} \quad \sigma_y = (\text{const.}) \cdot \sqrt{v'^2 \tau} \quad (31)$$

Yalin は(31)式を用いて開水路での濃度分布形を数値的に求めている。誘導過程から明らかなように、この式は u^*/w_0 が比較的大きくかつ高周波の乱れが強い場合に適用される。

(30)式と $f(y)$ は次の関係にある。

$$f(y, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y, t+\tau | y_0, t) f(y_0, t) dy_0 \quad (32)$$

(30)式と(32)式から拡散方程式が導かれる。

$$\frac{\partial f(y, t)}{\partial t} = w_0 \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} + \frac{v'^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2 f(y, t)}{\partial y^2} \quad (33)$$

これから拡散係数 ϵ は $v'^2 \Delta t / 2$ であることがわかる。以上のように混合時間 Δt （または混合距離 l ）が小さい場合には境界条件を取り除けば本研究の方法は従来の方法と一致する。

6. 開水路流への適用について

開水路流では乱れは一様でないから、(2)式中の $g(\eta)$ が y に関して変化することになるが、そうになると数学的取り扱いが難しく解析解を求めることは不可能に近い。したがって本研究の方法をそのまま開水路流に適用することはできない。

表1は本研究の方法と拡散方程式を用いる方法の比較を行ったものである。すなわちこれらは相補う特徴を持っている。このことから2つの方法を組み合わせることが考えられる。つまり河床の近くで本研究の方法を用い、河床から離れた領域で拡散方程式を用いて、両方の

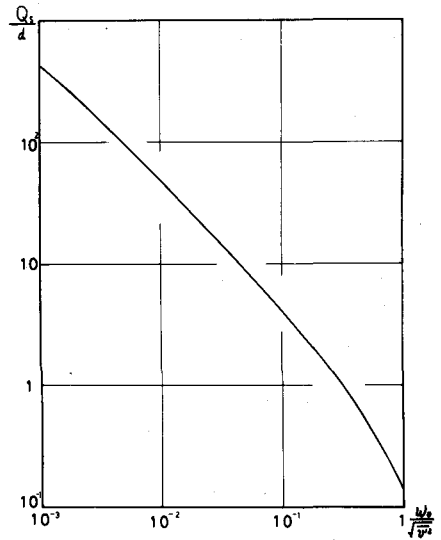


図 7

	本 研 究	拡散方程式
境界条件	○	×
乱れの非一様性	×	○

表 1

解をつなぎ合わせるということである。その場合、接続する位置、接続のし方などが問題となるが、これらについては現在検討中である。

7. おわりに

浮遊砂の濃度分布を取り扱う際には拡散理論やBrown運動理論が適用されるが、これらの理論では境界条件の取り入れ方が難しく、この為、分布形は得られるが値そのものを決めるには別途の考察が必要である。この例としては、掃流層の濃度分布を接続する方法などがあげられる。しかし上述の理論はいずれも壁の存在を無視してたてられたものであり、壁から平均渦径程度離れた所で意味を持つと思われるので、そのまま掃流層濃度と接続するには問題がある。

本研究では従来の研究とは逆に、「粒子が壁を通り抜けない」という条件にのみ重点を置き、他の点はできるだけ簡略化して解析を行った。結果的にWiener-Hopf eq. を得たが、これを一般的に解くことはできないので、§3に示した密度分布について解を得た。これは数学的にはかなりの制約を加えていることになる。しかし実際問題として v' の確率密度分布はわからない場合が多いので、与えられる条件はせいぜい $\sqrt{v'^2}$ ぐらいであろうし、また物理的に考えてあまり変わった分布になるとも思えないので（例えばピークが2つあるような）、 $\sqrt{v'^2}$ を一致させれば充分であろうと考える。だがこれは推測に過ぎないので、他の密度分布についての解と数値的に比較する必要がある。

本研究のモデルでは粒子の運動を極めて簡略化しているので、解が実際に意味を持つかどうかは今後実験によって検証するつもりである。

参考文献

- 1) Barfield, B. T., Smerdon, E. T. & Hiler, E. A. : Prediction of Sediment Profiles in Open Channel Flows by Turbulent Diffusion Theory, Water Resources Research, vol 5, No. 1, Feb., 1969.
- 2) Yalin, M. S. & Krishappan, B. M. : A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solid in Open Channels, Proc. Int. Sympo. on River Mech., Bangkok, Jan., 1973.
- 3) Kingman, J. F. : On the Algebra of Queues, J. of Applied Probability-3, 1966.
- 4) Smith, W. L. : On the Distribution of Queueing Times, Proc. Camb. Phil. Soc., 49, 1953.
- 5) 岸 力 : 沖積河川の水理学序説 — 流れと浮遊砂との相互作用 — , 第11回水工学に関する夏期研究会講義集Aコース, 土木学会水理委員会, 1975.
- 6) 石原藤次郎, 本間仁(編) : 応用水理学中I, 丸善