

東京工業大学 工学部 正会員 吉川秀夫

東京工業大学 工学部 正会員 ○福岡捷二

東京工業大学 大学院 学生員 石田 貴

1 序

土砂浮遊流のエネルギー逸散は、乱れエネルギーが土砂を浮遊することに費されるために、清水流のエネルギー逸散に比較して大きくなり、その結果として土砂流のカルマン定数が清水流のカルマン定数よりも小さくなると考えられてきた^{1) 2) 3) 4)}。従来は、こういった考えにもとづき乱れエネルギー平衡方程式と土砂濃度式から土砂浮遊流のカルマン定数をもとめている。志村³⁾、日野⁴⁾によれば、土砂浮遊流の乱れのエネルギー平衡式は次式で与えられる。

$$\tau_s \frac{du_s}{dy} = \rho (r - 1) g w_0 C + D' \quad (1)$$

ここに、 τ_s 、 u_s は、土砂浮遊流のせん断応力と主流方向流速、 ρ は流体密度、 r は砂粒子の比重、 w_0 は砂粒子の沈降速度、 C は砂粒子の体積濃度である。(1)式の左辺は、単位体積、単位時間あたり乱れが平均流から獲得するエネルギー、右辺第一項は、粒子を浮遊させることに費されるエネルギー、第二項は土砂浮遊流の粘性逸散エネルギーである。右辺第一項 $\rho (r - 1) g w_0 C$ は、砂粒子が定常濃度分布をしているためには平均的にみて砂粒子の落下分だけ位置エネルギーを回復していなければならないとの考えにもとづいている。しかしながら、(1)式のように仕事率で考えた場合には、砂粒子が時間的にどのように運動したか、すなわち、位置エネルギーの回復が急激であるか、あるいは緩慢であるかによってエネルギー逸散率は異なる。このことは、志村、日野が(1)式を積分して理論的に求めたカルマン定数を、実験値と合致させるために、 $\rho (r - 1) g w_0 C$ の項を数倍していることや、岸⁵⁾ が(1)式から速度分布形を求める際に、同じ項をほぼ7倍していることから推定することができる。これは、実際の乱流場での砂粒子の運動を記述することが困難なために、粒子の運動を平均的に記述し、変動分を係数で考慮したためと考えるのが適切であり、係数の導入で実験結果をかなりうまく説明しているといえる。しかし、もし乱流場を近似的に表現でき、その中で粒子の運動を記述することができれば、土砂浮遊によるエネルギー逸散率をより精度よく見積もることができるであろう⁶⁾。

本研究では、乱流場を振動流でモデル化することにより、流体と砂粒子との相対運動を解析し、砂粒子が流体運動に追従できないための相対速度差に起因する抵抗によってエネルギー逸散が増加するという考えにもとづき、土砂浮遊流の乱れエネルギーの平衡式の定式化を行ない、考えの妥当性を検討する手段として、土砂浮遊流のカルマン定数について検討を進めた。

理論の展開にあたって次の仮定をおく

- (1) 乱流場を振動流でモデル化する。モデル化した乱流場の Reynolds 応力の鉛直分布は、せん断乱流の Reynolds 応力の分布に合致するように変動速度を決める。
- (2) 流体と砂粒子の相対運動は、1個の砂粒子の振動流中での運動方程式から求める。定常な濃度分布をもつ土砂浮遊流を、一定の砂粒子配列を保った状態で振動している格子モデルで置き換え、土砂浮遊流のエネルギー逸散を見積もることができる。

2 理 論

(1) 乱れエネルギー平衡方程式

主流の方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、時間平均流速を u_f 、変動速度の成分を u, v とする。清水の乱れのエネルギー平衡を表わす方程式は、微小項を無視すると二次元流に対して次式を得る。

$$\tau_f \frac{du_f}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\rho v \frac{u^2 + v^2}{2} + v p \right] + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

ここに、 τ_f は清水流のせん断応力である。右辺第一項は、乱れの鉛直成分によって運動エネルギー、圧力エネルギーが拡散される割合であり、第二項は粘性の作用により乱れのエネルギーが熱エネルギーに変換される割合である。一方、土砂浮遊流の割合、土砂を浮遊しても(2)式の右辺項の大きさは変化せず、流体と砂粒子の相対速度差に起因するエネルギー逸散分だけ余分にエネルギー逸散が増えると考えられる。この時、土砂浮遊流のエネルギー平衡方程式は次式で表わされる。

$$\tau_s \frac{du_s}{dy} = \text{相対速度差に起因する逸散項} + \tau_f \frac{du_f}{dy} \quad (3)$$

次節以下において、(3)式の右辺第一項を求める。

(2) 乱流場のモデル化

二次元せん断乱流は、一般に時間平均流速と変動速度を重ねたものとして記述できる。まず、変動速度成分を Reynolds 応力の鉛直分布がせん断乱流の Reynolds 応力の分布に一致するように決める。図-1 のように、 R 方向に単振動する振動流で乱れを表すと、 R 方向の水粒子の速度は

$$U = U_0(y) \cos \theta + u(y) \sin \omega t \quad (4)$$

で表わされる。ここに、 ω は振動流の角周波数である。

したがって、変動速度の水平及び鉛直成分は、それぞれ

$$\dot{u} = -u \sin \omega t \cos \theta$$

$$\dot{v} = u \sin \omega t \sin \theta$$

$$\sqrt{\dot{v}^2} / \sqrt{u^2} = \tan \theta$$

一方、Reynolds 応力は、 $\tau = -\rho \overline{uv}$ で表わされ、その鉛直方向分布は、 $\tau = \rho u_*^2 (1 - y/h)$ であるので変動速度の振巾は

$$u = 2u_* \sqrt{1 - y/h} / \sqrt{\sin 2\theta}$$

となり、 u, v は次のように表示できる。

$$u = -\sqrt{\frac{2}{\tan \theta}} u_* \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \sin \omega t$$

$$v = \sqrt{2 \tan \theta} u_* \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \sin \omega t$$

(5)

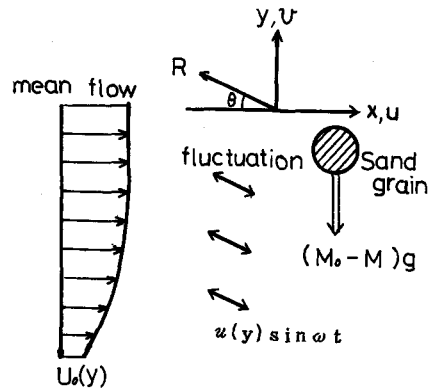


図-1 流れ場の模式図

さて、このように変動速度成分の分布とせん断力の分布を与えたとき、平均流の流速分布はどのようなものとなっているのであろうか。図-2の模式図から明らかなように、混合距離の分布を $l = \kappa y \sqrt{1 - y/h}$ と仮定すると、振動流で与えた乱れの場合から決まる平均流速分布は、対数則になることがわかる。したがって次節以下で論ずる土砂浮遊流の乱れエネルギー平衡式の適合性の検討として、カルマン定数について論じることが、考えている流れの場の平均流速分布が対数則で表わされるので論理の矛盾はないであろう。

次に、(5)式の θ と ω について若干の考察をくわえてみよう。中川、林津⁷⁾は開水路流で乱れを実測し、 $Re = 1.0 \times 10^4$, $Fr = 0.17$ の条件のもとで $\sqrt{v^2}/\sqrt{u^2}$ ($=\tan \theta$)の値は鉛直方向にあまり変化せず、0.46から0.75の範囲の値をとることを見出した。これは θ におおして $25^\circ < \theta < 37^\circ$ である。

又、砂粒子の運動に大きな影響を与えると考えられる乱れの角周波数 ω については、Rouse⁸⁾が格子を振動させて浮遊砂濃度分布を調べた実験によると、格子の振動周波数が(1~5) cycle/secの範囲で砂粒子の定常的な濃度分布が認められた。これは ω にして(6~30) rad/secである。これらは特定の水利条件で行なわれた実験から見出された値ではあるが、十分な情報がないので θ と ω はこの程度の範囲の値をとるものとする。

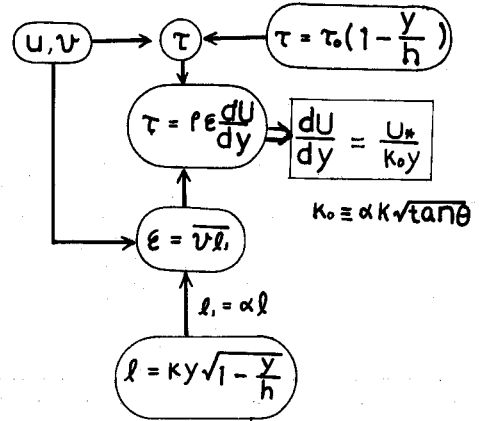


図-2 仮定した乱流場と平均速度場の関係

(3) 振動流中の砂粒子の運動方程式

定常な濃度分布をもつ土砂浮遊流を、砂粒子配列を一定の状態に保って振動している格子状モデルで置換えて、土砂浮遊流中の相対運動によるエネルギー逸散をみつめる。周期的な乱れの影響を受けて運動する砂粒子の位置 R は、時間 t と距離 y の関数であるが、砂粒子が一周期の間に移動する距離は小さいので、この間の流体の速度は y 方向に一樣であると仮定し、 R は t のみの関数として取扱う。砂粒子を球と仮定すると運動方程式は、次式で表わすことができる^{9), 10), 11)}。

$$M \frac{d^2 R}{dt^2} = m \frac{dU}{dt} + km \frac{d}{dt} \left(U - \frac{dR}{dt} \right) + A \left(U - \frac{dR}{dt} \right) - (M-m) g \sin \theta \quad (6)$$

$$\text{ここに, } M = \rho r \frac{\pi}{6} d^3 \quad m = \rho \frac{\pi}{6} d^3 \quad k = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} N$$

$$N = \sqrt{\frac{8\nu}{d^2 \omega}}, \quad A = 3\pi\mu d \left(1 + \frac{1}{N} \right), \quad d = \text{砂粒子の直径。}$$

(6)式の各項の意味は次のとおりである。左辺項は粒子を加速するに要する力、右辺第一項は、流体の加速によって生じる粒子を取り囲む流体の圧力勾配による力、第二項は、粒子のみかけの質量を周囲の流体に相対的に加速する力、第三項は、ストークスの抵抗則による粘性抵抗、第四項は、重力項である。なお(6)式では、Basset項は無視している。

(4)式を(6)式に代入し、砂粒子と流体との相対速度差について解くと次式を得る。

$$Y = \left\{ Y_0 + \frac{M-m}{A} g \sin \theta + \frac{M-m}{A} u \omega \right\} e^{-\frac{A}{M+km} t} - \frac{M-m}{A} u \omega \sin(\omega t + \delta) - \frac{M-m}{A} g \sin \theta \quad (7)$$

$$\text{ここに } Y = \frac{dR}{dt} - U, \quad \sin \delta = \frac{M+km}{A} \omega。$$

右辺第一項は、長い時間では無視できるが、乱れと砂粒子の間の相互関係を考えた場合、砂粒子は絶えず新しい乱れ的作用を受けると考えられるので、渦の寿命時間程度の時間において第一項を考慮する必要がある。右辺第二項は、砂粒子が流体と位相差 δ をもって流体の運動に追従して振動する項である。第三項は、重力

の影響をあらわす項で、沈降速度に対応するものである。仮定した振動流モデルでは、砂粒子の濃度分布が時間平均的にみて定常分布をしており、個々の砂粒子は一周期後にはもとの位置に戻るので、 T を振動周期とすると、 $R - U \cos \theta \cdot T = 0$ となる。したがって、流体と砂粒子の初期相対速度差は次式で与えられる。

$$Y_0 = \frac{M-m}{M+km} g \frac{2\pi}{\omega} \sin \theta - \frac{M-m}{A} g \sin \theta - \frac{M-m}{A} u \omega \quad (8)$$

(8)式を(7)式に代入すると

$$Y = \frac{M-m}{M+km} g \frac{2\pi}{\omega} \sin \theta \cdot e^{-\frac{A}{M+km} t} - \frac{M-m}{A} u \omega \sin(\omega t + \delta) - \frac{M-m}{A} g \sin \theta \quad (9)$$

となり、(9)式は流体と砂粒子の相対速度差をあらわしている。

(4) 相対速度差によるエネルギー逸散のみつり

流体と砂粒子の相対速度差により、単位体積、単位時間あたりに失なわれる土砂浮遊流のエネルギーは、ストークスの抵抗法則を用いて次のように表わすことができる。

$$D = 3\pi\mu d \left(1 + \frac{1}{N}\right) \overline{Y^2} \times C / \frac{\pi}{6} d^3 \quad (10)$$

ここに、 $\overline{Y^2}$ は、相対速度差の2乗平均であり次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \overline{Y^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T Y^2 dt \\ &= \frac{M+km}{2A} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \alpha^2 + \frac{\beta^2}{2} + r^2 + 2\alpha r \frac{M+km}{A} + 2\alpha\beta\omega \left(\frac{M+km}{A}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$\alpha = \frac{M-m}{M+km} g \sin \theta, \quad \beta = -\frac{M-m}{A} u \omega, \quad r = -\frac{M-m}{A} g \sin \theta$$

(11)式の各項のオーダー比較を行なうと、通常考えられる粒径の土砂濃度をもつ浮遊砂の場合には、右辺第一項が他の項に比較して大きく、実質的には第一項のみを考慮すればよい。従って(10)、(11)式を(3)式の右辺第一項に代入すると、土砂浮遊流の乱れエネルギー平衡式を得る。

$$\tau_s \frac{du_s}{dy} = D + \tau_f \frac{du_f}{dy} \quad (12)$$

(12)式が、土砂浮遊流の乱れエネルギー平衡式として適切なものとなっているかどうかを検討するために、以下に(10)、(11)、(12)式から土砂浮遊流のカルマン定数に関する式を導き、実験値と比較検討を行なう。

(5) 土砂浮遊流のカルマン定数

(12)式中の清水流のせん断力 τ_f と土砂浮遊流のせん断力 τ_s が近似的に等しいと仮定する。このことは、混合距離と速度勾配の積が等しいということであって、清水流と土砂流の速度勾配、あるいは混合距離がそれぞれ相等しいことを意味しない。

すなわち

$$\tau_s = \tau_f = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (13)$$

とおき、清水流の速度分布に対数則を用いる。

$$\frac{du_f}{dy} = \frac{u_*}{\kappa_0 y} \quad (14)$$

(13式と14式を(12式に代入すると、土砂浮遊流と清水流の速度勾配の比が求まる。

$$\frac{d(u_s/u_*)}{dy} / \frac{d(u_f/u_*)}{dy} = 1 + \frac{\kappa_0 y D}{\rho u_*^3 (1-y/h)} \quad (15)$$

(13式、14式)にくわえて、土砂流の速度分布式として対数式を用い

$$\frac{du_s}{dy} = \frac{u_*}{\kappa_s y} \quad (16)$$

これらを(12式に代入し、水深方向に $y = a$ (層流底層厚さ) から $y = h$ まで積分すると、カルマン定数の変化を表わす式が得られる。

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_s} = 1 + \frac{\kappa_0 h \bar{D}}{\rho u_*^3 \left(\ln \frac{h}{a} - 1 \right)} \quad (17)$$

ただし、 $\bar{D}$ は D の断面平均値であり、したがって $\bar{D}$ に含まれる濃度は、断面平均濃度である。

3 実験結果との比較

(10式と(12式の比較のため、第一に(15式)の速度分布形について調べてみる。図-3はVanoniとNomicos²⁾による同一水理条件の清水流と土砂浮遊流 ($\bar{C} = 2.61 \times 10^{-3}$, $d = 0.10 \text{ mm}$) の流速分布の実測値と(15式で $\theta = 30^\circ$, $\omega = 10 \text{ rad/sec}$, 30 rad/sec を与えて得た計算値の比較を示す。ここで用いた θ と ω は2-(2)で示したように、セン断乱流場の代表値である。いうまでもなく実際の乱流場では、 θ と ω は平均値のまわりにある分布を持っているが、本文では、乱流場を簡単なモデルで表現していることや、乱れエネルギー平衡式が、平均値についての議論であるので、 θ と ω の代表値について成立すればよいと考えこれらの値を用いて計算した。

図-4は、土砂浮遊流のカルマン定数の実験値と理論値の比較である。図-3、4をみると速度分布形、カルマン定数ともに実験値と更によく一致するような θ と ω の組合せが考えられるが、研究の目的が実験値をより良く説明し得るカルマン定数に関する理論式を見出すことよりも、土砂浮遊流のエネルギー逸散の増加が、流体と砂粒子の相対運動に起因するという考えにもとづくモデルの検討であることを考えると図-3、4から(10)、(11)、(12式が、土砂浮遊流のエネルギー平衡式としてかなりよい記述を与えているといえる。

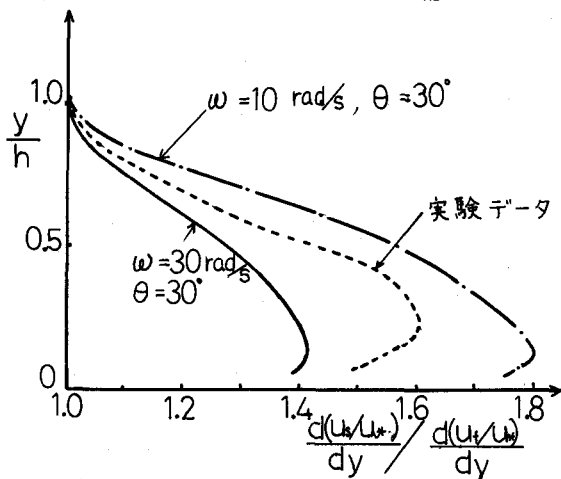


図-3 土砂浮遊流の流速分布の実測値²⁾と理論値の比較

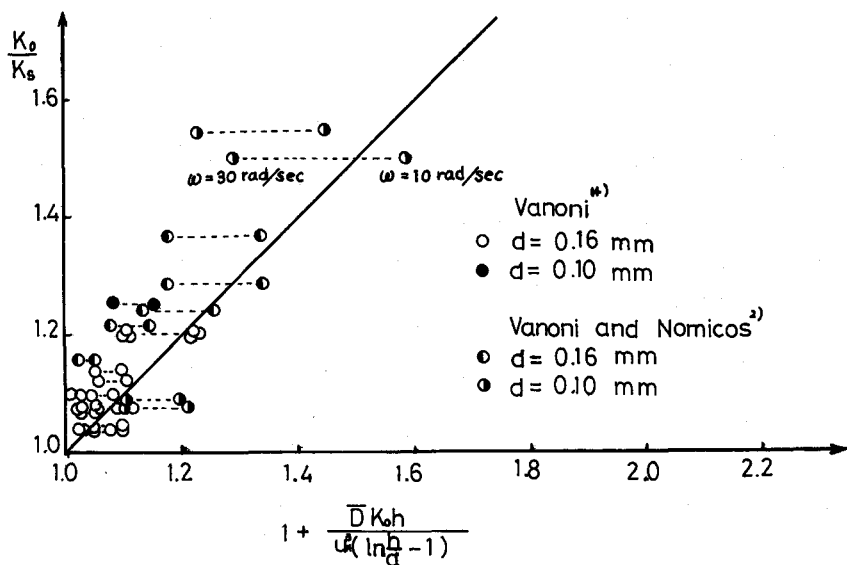


図-4 カルマン定数の理論値と実測値の比較

4 結 語

理論の展開にあたって行なった幾つかの仮定は、解析の容易さをはかりながら、平均的にみた場合土砂浮遊流のエネルギー平衡を記述するよい近似となるようにおかれた。このような考えで、乱流場を振動流、浮遊砂分布を格子モデルで表現し、砂粒子と流体の相対運動に着目して乱れエネルギー平衡式を得た。このエネルギー平衡式から求めたカルマン定数を多くの実測値と比較した結果、土砂浮遊流のカルマン定数を提案したモデルによっても説明し得ることを示し、土砂浮遊流のエネルギー逸散に関する一つの考え方を提示した。

参 考 文 献

- 1) Einstein H.A. and Chien N.; MRD Sediment Series, No. 3, Corps of Eng. 1954.
- 2) Vanoni, V.A. and Nomicos G.N.; Proc. ASCE, 85, No. HY5, 1959.
- 3) 志村博康; 土木学会論文集, No. 46, 1957.
- 4) 日野幹雄; 土木学会論文集, No. 92, 1963.
- 5) 岸 力; 水工学シリーズ, 75-A-9, 1975.
- 6) 吉川秀夫, 福岡捷二, 石田 貴; 第30回年次学術講演会概要集, 第II部, 1975.
- 7) Nakagawa, H. and Nezu, I.; 土木学会論文報告集, No. 231, 1974.
- 8) Rouse H.; Proc. 5th International Congress of Applied Mech., 1938.
- 9) Hinze, J.O.; McGRAW HILL, 1959.
- 10) Carstens, M.; Trans. AGU, Vol. 33, No. 5, 1952.
- 11) Lamb, H.; 6th Edition, Cambridge Univ. Press, 1963.
- 12) Yalin, M.S.; Pergamon Press, 1972.
- 13) 日野幹雄; 朝倉書店, 1974.
- 14) Vanoni, V.A.; Trans. ASCE, 111, 67, 1946.