

# 非定常時系列の解析と予測について

秋田工業高等専門学校 正会員 長谷部正彦

## 1 まえがき

時系列理論の適用は、ほとんど定常過程に限られている。本解析では、G. E. P. Box, & S. G. M. Jenkins の非定常時系列の理論を適用した。その理論で取り扱われた非定常時系列は、level 等が時間と共に変化するが、その点を除くと統計的な性質が時間に依存しない性質（均一性）を持つ過程（非定常線形過程）となる。それ故、この過程では適当な差分をとることによって定常過程として扱うことが可能である。本文では非定常線形過程を基本とした seasonal models を水文時系列に適用した。資料は、雄物川水系磨川の月流量（ $A = 4034.9 \text{ km}^3$ , 1953~72）と秋田の月降水量（1933~73）である。

## 2 非定常線形過程

時系列理論では、その過程は一般に自己回帰型（AR; Autoregressive）、移動平均型（MA; Moving average）、その両者の混合型（ARMA; Mixed Autoregressive-Moving average）で表わされる。

ここで時系列  $Z$  を考え、時刻  $t$  であれば、上の3型は次式で表わされる。

$$\text{AR Model, } \phi(B)Z_t = at \quad (2.1)$$

$$\text{MA Model, } Z_t = \theta(B)at \quad (2.2)$$

$$\text{ARMA Model, } \phi(B)Z_t = \theta(B)at \quad (2.3)$$

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 \cdots - \phi_p B^p), \quad \theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 \cdots - \theta_g B^g)$$

$\phi(B)$ ,  $p$  次の自己回帰演算子、 $\theta(B)$ ,  $g$  次の移動平均演算子、 $B$ , 後進演算子、 $at$ , 白色雑音。時系列  $Z$  の定常条件は、 $B$  の多項式とすれば、 $\phi(B) = 0$ ,  $\theta(B) = 0$  の凡ての根が単位円の外側に存在することである。非定常線形過程では、 $\phi(B) = 0$ ,  $\theta(B) = 0$  の幾つかの根が単位円上にあり、残りの根は、単位円の外側に存在することが条件である。そこで  $d$  個の根が単位円上にあり、他の根が外側に存在する時は、 $\phi(B) = \phi(B)(1-B)^d$  で示され次式となる。

$$\phi(B)Z_t = \phi(B)(1-B)^d Z_t = \phi(B)\nabla^d Z_t = \theta_0 + \theta(B)at \quad (2.4)$$

(2.4) 式は、ARIMA(Autoregressive-Intergrated-Moving average) モデル ( $p, d, g$ ) である。一般に  $p, d, g$  は、正の整数で各々、 $0, 1, 2$  程度の次数である。 $\theta_0$  は、時刻  $t$  における決定的成分であって、 $d > 0$  の時、 $W_t = \nabla^d Z_t$  とおけば次式で示される。

$$E(W_t) = \mu_w' = \theta_0 / (1 - \phi_1 - \phi_2 \cdots - \phi_p) \quad (2.5)$$

例えば、 $d = 1$  の時、 $\theta_0$  がある一定値を持てば、過程  $Z$  の線形傾向を表わす。又新しい系列、 $W_t = W_t' - \mu_w'$  を採用すれば、(2.4) 式の定数項は、 $\theta_0 = 0$  となり、また同式の一般性を失われずに次式となる。

$$\phi(B)W_t = \theta(B)at \quad (2.6)$$

(2.6) 式で  $\phi(B) = 0$ ,  $\theta(B) = 0$  の凡ての根が単位円の外側に存在すると、 $W_t$  の系列は定常過程であり次式で表わされる。

$$W_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)at \quad (2.7) \quad at = \theta^{-1}(B)\phi(B)W_t \quad (2.8)$$

## 3 Multiplicative seasonal models

一般に水文時系列には、周期性がみられる。前章の非定常線形過程を応用した季節性モデルを考える。仮に周期 ( $S$ ) があるとすれば、時刻  $t$  の実現値の状態は、時間  $S$  だけ離れた実現値の状態と似ている。このことから、演算子  $B$  を用いた  $B^S Z_t = Z_{t-S}$  が重要な役割を果たす。 $\nabla_S Z_t = (1 - B^S) Z_t = Z_t - Z_{t-S}$  という簡単な演算子を用いたこのモデルは、定常条件をみたしていないので非定常性が含まれている。(2.6) 式を参考にし

て次式が得られる。

$$\phi_p(B^s) \nabla_g^D Z_t = \Theta_Q(B^s) a_t \quad (3.1)$$

ここで  $\nabla_g = (1 - B^g)$ 。(3.1)式は、 $t$ のみでなく、 $t-1, t-2, \dots$  についても適用できる。従って系列  $a_t$ は、前の状態  $a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ と独立とは限らないので、時系列  $a_t$ のモデルとして次式を得る。

$$\phi_p(B) \nabla^d a_t = \theta_g(B) a_t \quad (3.2)$$

(3.1)式に演算子  $\phi_p(B) \nabla^d$ を乗じて、(3.2)式より multiplicative seasonal models を得る。

$$\phi_p(B^s) \phi_p(B) \nabla_g^D \nabla^d Z_t = \Theta_Q(B^s) \theta_g(B) a_t \quad (3.3)$$

$\phi_p(B^s), \Theta_Q(B^s)$  は、季節性による自己回帰演算子、移動平均演算子であり、 $\phi_p(B), \theta_g(B)$ は、系列  $a_t$ による各々の演算子である。(3.3)式は、 $(p, d, g) \times (P, D, Q)_s$  モデルと表現される。本解析は、(3.3)式のモデルに水文時系列を適用し、モデルの Identification, Fitting, Diagnostic checking, Forecasting を試みた。

#### 4 モデルの同定

モデルの次数は、 $Z_t$  の偏自己相関係数、あるいは  $Z_t, \nabla Z_t, \nabla_{12} Z_t, \nabla \nabla_{12} Z_t$ の自己相関係数で決定する。図1に秋田、樺川の計算例を示し、図2には、偏自己相関係数の計算例を示す。図1より両者の  $Z_t$ の自己相関から(強弱はあるが)一年の周期が存在することが理解でき、また図2より、 $\tau \geq 13$  では、偏相関係数が0に接近していて次数は13程度であると推察される。そこで  $s = 12$ , 季節モデル  $(0, 1, 1)_s$  とし、 $a_t$ の系列には、 $(0, 1, 1)$ と  $(0, 0, 1)$ モデルの2つに適用して検討してみた。この様にして2つのモデルは、

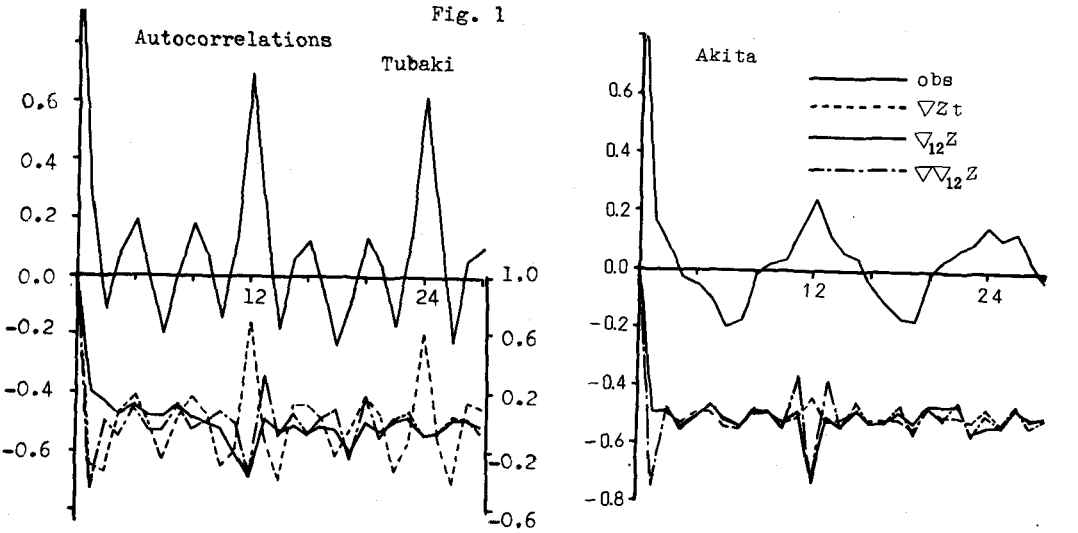
$$W_t = (1 - \theta B)(1 - \Theta B^{12}) a_t \quad (4.1)$$

となる。ここで  $W_t$ は、 $W_t = \nabla_{12} Z_t - \mu w$ ,  $W_t = \nabla \nabla_{12} Z_t - \mu w$  である。

上式の次数は、 $q + s \cdot Q = 1 + 12 \cdot 1 = 13$  になる。このモデルのパラメーター  $(\theta, \Theta)$  は、自己相関係数  $\rho_1, \rho_{12}$  を用いて次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= -\theta / (1 + \theta^2) \\ \rho_{12} &= -\Theta / (1 + \Theta^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ここで  $\rho_1, \rho_{12}$  を標本自己相関係数  $r_1, r_{12}$  と置き換えて、パラメーター  $\theta_0, \Theta_0$ の初期値を求め表1に示す。



## 5 モデルの Fitting

前章でのパラメーター  $\theta_0, \Theta_0$  を初期値として、最確値  $\theta$ 、 $\Theta$  をくり返し計算により決定する。

今、パラメーター  $\beta_0$  の条件付き雑音を、 $at,0$  とすれば、 $at,0 = [at|\beta_0]$  と表われ、最確値  $\beta$  は、次式が与えられる。

$$[at] = [at,0] - \sum_{i=1}^k (\beta_i - \beta_{i,0}) X_{i,t} \dots\dots\dots (5.1)$$

ここで

$$X_{i,t} = \left. \frac{-\partial[at]}{\partial \beta_i} \right|_{\beta=\beta_0}$$

(4.1) 式を変形して、初期値  $\theta_0, \Theta_0$  の条件の基では、

$$at,0 = \theta_0'(B) \Theta_0^{-1}(B) Wt \dots\dots\dots (5.2)$$

となる。故に

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial at}{\partial \theta} \right|_{\theta_0, \Theta_0} &= -\theta_0'(B) \Theta_0^{-1}(B) Wt \\ &= -\theta_0'(B) at,0 = X_{1,t} \dots\dots\dots (5.3) \end{aligned}$$

同様に

$$-\left. \frac{\partial at}{\partial \Theta} \right|_{\theta_0, \Theta_0} = -\Theta_0^{-1}(B) at,0 = X_{2,t} \dots\dots\dots (5.4)$$

となる。(5.2) 式～(5.4) 式は、下記の式に変形される。

$$at,0 = Wt + \theta_0 at_{-1,0} + \Theta_0 at_{-2,0} - \theta_0 \Theta_0 at_{-B,0} \dots\dots\dots (5.5)$$

$$X_{1,t} = \theta_0 X_{1,t-1} - at,0 \dots\dots\dots (5.6)$$

$$X_{2,t} = \Theta_0 X_{2,t-1} - at,0 \dots\dots\dots (5.7)$$

故に最確値を求めるには、(5.1) 式を利用して次式となる。

$$at,0 = (\theta - \theta_0) X_{1,t} + (\Theta - \Theta_0) X_{2,t} + at \dots\dots\dots (5.8)$$

表 2 に椿川  $(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_B$  モデル、秋田  $(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)$  モデルの例を示した。尚秋田の  $\theta_0, \Theta_0$  は、任意の数値を初期値として与えた。またくり返し計算によるパラメーターの誤差の分散は、 $V(\hat{\theta}) = n^{-1}(1 - \hat{\theta}^2)$ 、 $V(\hat{\Theta}) = n^{-1}(1 - \hat{\Theta}^2)$  で表われ、表 3 にはその標準偏差を示す。以上の様にモデルの Estimated を行ない表 4 に数例のモデルと、各モデルの雑音の分散  $\sigma_a$  を示した。

## 6 モデルの Diagnostic checking

モデルは、2つの方法で check される。1つの方法は、モデルの  $at$  の自己相関係数  $r_k$  を利用する方法である。 $r_k$  の結果を図 3 に示す。

次に、 $R = n \sum_{k=1}^m r_k^2$  を求め、その  $R$  を近似的に自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布と仮定し、 $m$  個の  $r_k$  を 0 とみなしてよいかを検定する。表 5 に  $R$  の値と有意水準を示してある。秋田では、20% と小さいので、この check の方法では、モデルをもう少し検討する必要があると思われる。

もう一つの方法は、雑音であるかどうかを、累加ペリオドグラムを用いて確かめる。その計算式は、次式で与えられる。

$$\sum_{i=1}^j I(f_i) / \sum_{i=1}^9 I(f_i) \dots\dots\dots (6.1)$$

ここで

$$I(f_i) = \left\{ \left( \sum_{t=1}^n \hat{a}_t \cos 2\pi f_i t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^n \hat{a}_t \sin 2\pi f_i t \right)^2 \right\} 2/n$$

Fig. 2

Partial autocorrelations

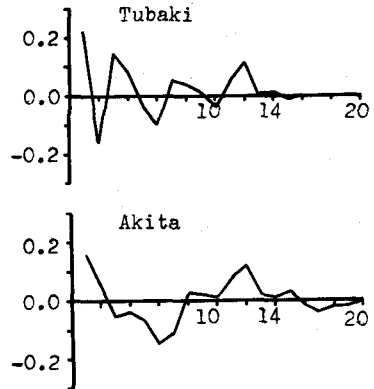


Table 1

|     | $\theta$ | $\Theta$ |
|-----|----------|----------|
| Tu. | 0.682    | 0.417    |
| Ak. | -0.027   | 0.574    |

Table 2

|   | Iteration(Akita) |          |
|---|------------------|----------|
|   | $\theta$         | $\Theta$ |
| 0 | 0.1000           | 0.1000   |
| 1 | -0.0355          | 0.5159   |
| 2 | -0.0380          | 0.7974   |
| 3 | -0.0362          | 0.8457   |
| 4 | -0.0367          | 0.8395   |
| 5 | -0.0367          | 0.8398   |
| 6 | -0.0367          | 0.8398   |

Iteration(Tubaki)

|   | Iteration(Tubaki) |          |
|---|-------------------|----------|
|   | $\theta$          | $\Theta$ |
| 0 | 0.6821            | 0.4165   |
| 1 | 0.8463            | 0.5984   |
| 2 | 0.8735            | 0.6652   |
| 3 | 0.8827            | 0.6851   |
| 4 | 0.8868            | 0.6921   |
| 5 | 0.8887            | 0.6949   |
| 6 | 0.8896            | 0.6960   |
| 7 | 0.8900            | 0.6964   |
| 8 | 0.8901            | 0.6966   |
| 9 | 0.8901            | 0.6966   |

$$q=(n-2)/2 \quad n: \text{偶数}$$

$$q=(n-1)/2 \quad n: \text{奇数}$$

である。各  $j$  に対して (6.1) 式の値をプロットして、図 4 に示す。図に示してある信頼限界は、系列が正規分布をしていると仮定された累加ベリオドグラムの 75%、95% の Kolmogorov-Smirnov の限界である。この check では、秋田、樺川、共に有意であると思われる。結論として樺川は、 $(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_B$  モデル、秋田は、 $(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_B$  モデルが妥当であると推察される。(秋田では、モデルの検討が必要と思われるが、 $\hat{\alpha}$  の最小のモデルを採用した。)

## 7 予 測

採用されたモデルでの予測は、最小自乗平均誤差法により行なわれる。時刻  $t$  の時点で、 $Z_t+1$ 、 $(1 \geq 1)$  を予測する。この事を時刻  $t$  における lead time  $l$  の予測といい、 $Z_t(1)$  と表わす。採用されたモデルで示すと、 $W_t = \nabla \nabla_a Z_t$  とすれば、 $(W_t = \nabla_a Z_t \text{ は略})$

$$Z_t+1 = Z_t+1-1+Z_t+1-12-Z_t+1-13+at+1$$

$$-\theta at+1-1-\oplus at+1-12+\theta \oplus at+1-13 \dots (7.1)$$

となる。ここで時刻  $t$  までの過去の  $Z$  の値をとった時の  $Z_t+1$  の条件付き期待値、 $E[Z_t+1 | \theta, \oplus, Z_t, Z_t-1 \dots]$  を、 $E[Z_t+1]$  とすると、次式が成り立つ。

$$E[Z_t+j] = \begin{cases} Z_t+j & j \leq 0 \\ Z_t(j) & j > 0 \end{cases} \dots (7.2)$$

$$E[at+j] = \begin{cases} at+j & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases} \dots (7.3)$$

そこで時刻  $t$  を基本とした lead time  $l$  の予測は、(7.1) 式を変形して次式となる。

$$Z_t(1) = E[Z_t+1-1+Z_t+1-12-Z_t+1-13+at+1-\theta at+1-1-\oplus at+1-12+\theta \oplus at+1-13 \dots] \dots (7.4)$$

最初の未知の  $at$  項は、 $t$  における無条件期待値と仮定して 0 とおき、その後は  $at = Z_t - Z_t - 1(1)$  で順次計算を進める。また時刻  $t$  を基本として予測されるから、 $t+1$  以上になると修正する場合もある。重み係数  $\xi$  とすると

$$\varphi(B) \cdot \xi(B) = \theta(B) \cdot \oplus(B) \dots (7.5)$$

(7.5) 式で、 $\varphi(B)$ 、 $\theta(B)$ 、 $\oplus(B)$  は、既知であるので、 $\xi$  が求まる。つまり、 $\xi_{r,m} = \lambda(1+rA) + A\theta$  である。ここで  $\lambda = (1-\theta)$ 、 $A = (1-\oplus)$ 、 $m = 12$  の時、 $\theta = 1$ 、 $m \neq 12$  の時、 $\theta = 0$  である。(  $W_t = \nabla \nabla_a Z_t$  の場合である ) 以上の様にして  $\xi$  が求まると、 $\xi$  による修正は、次式となる。

$$Z_t+1(1) = Z_t(1+1) + \xi_1 at+1 \dots (7.6)$$

上式は、同一時刻  $t+1+1$  での修正である。次に 1 step 離れたの予測の修正は、次の通り行なわれる。

Table 3

|     | $\sigma(\theta)$ | $\sigma(\oplus)$ |
|-----|------------------|------------------|
| Tu. | 0.03             | 0.05             |
| Ak. | 0.05             | 0.02             |

Fitted models(Tubaki)

$$(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_B$$

$$\nabla \nabla_a Z_t = (1-0.890B)(1-0.697B^2) at$$

$$(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_B$$

$$\nabla_a Z_t = (1+0.17B)(1-0.59B^2) at$$

$$(1, 0, 0) \times (1, 1, 0)_B$$

$$at = (1-0.155B)(1+0.333B^2) \nabla_a Z_t + 3.58$$

Fitted models(AKITA)

$$(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_B$$

$$\nabla \nabla_a Z_t = (1-0.889B)(1-0.839B^2) at$$

$$(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_B$$

$$\nabla_a Z_t = (1+0.037B)(1-0.840B^2) at$$

$$(0, 0, 2) \times (0, 1, 1)_B$$

$$\nabla_a Z_t = (1-0.102B^2+0.098B^3)(1-0.877B^2) at$$

Variance

101.4

103.6

107.2

71.7

68.9

69.6

表 4

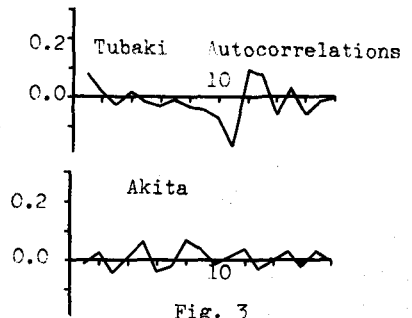


Fig. 3

|     | R    | Level |
|-----|------|-------|
| Tu. | 45.8 | 70 %  |
| Ak. | 60.4 | 20 %  |

Table 5

まず重み係数を $\pi$ とすると、

$$\phi(B) = \theta(B) \Phi(B) \pi(B) \dots\dots\dots (7.7)$$

となり、故に $\pi$ は次式となる。(  $Wt = \nabla \nabla_n Z_t$  )

$$\pi_j = \theta^{j-1} (1 - \theta), j = 1, 2, \dots\dots\dots 11$$

$$\pi_{12} = \theta^{11} (1 - \theta) + (1 - \theta)$$

$$\pi_{13} = \theta^{12} (1 - \theta) - (1 - \theta) (1 - \theta)$$

$$(1 - \theta B - \theta \Phi B + \theta \Phi B^2) \pi_j = 0 \quad j \geq 14$$

以上の様に $\pi$ が求まると、1 step 離れた予測の修正は、 $Z_t(-h) = Z_t - h$  とし、

$$Z_t(1) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-1-j} \dots\dots\dots (7.8)$$

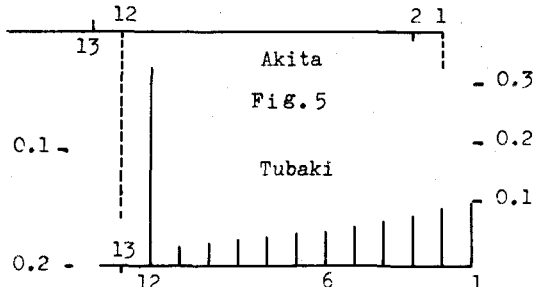
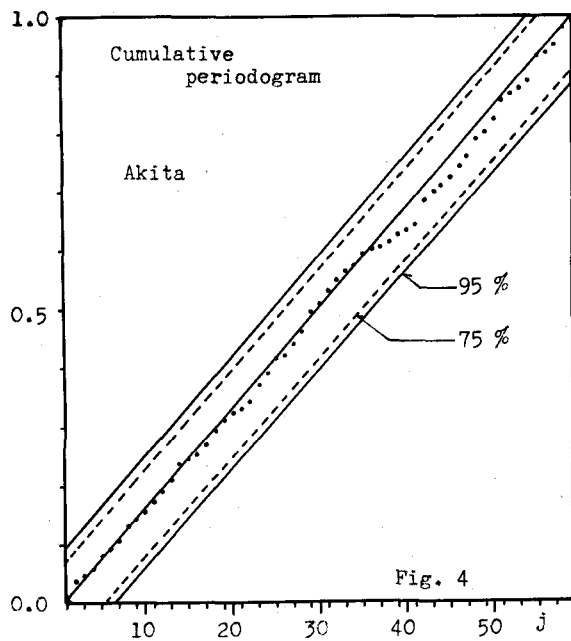
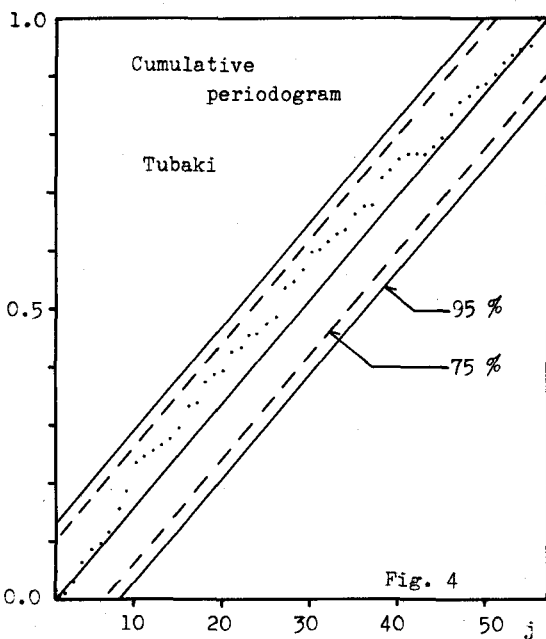
となる。図 5 に 椿川、秋田の $\pi$ 係数を示す。又、1 年毎 3 年間予測した計算値と実測値を図 6 に示してある。

## 8 結 論

本論文では、周期性の強い河川流量と比較的周期性の弱い降水量時系列（自己相関係数より）に季節性モデルを適用した。前者では、 $\alpha_t$  の系列から判断すると、ある月とその前の月との相関が高いが、後者では、前月の降水量は、あまり次の月のそれには影響していないと思われる。降水量モデルでは、実測値のばらつき（表 6 に示しているが）を考えれば、平均的には適合しているだろう。しかし降水量モデルは、もう少し検討する必要があると思われる。例えば生の資料を少し工夫してモデルを適用する等、検討中である。定常時系列理論では、決定的成分については、フーリエ級数等であてはめるとみかけ上の周期がでる欠点がある。このモデルでは、一年周期のみに着目している。

また、本文での非定常性は、ある系列を、微分して（1 次；平均値、2 次；勾配）、それが定常条件を満たしている場合である。このモデルは empirical-stochastic models である。

最後に、本文での 2, 7 章の詳細については、第 11 回水工学に関する夏期研修会講義集（P A 61~A627）を参照されたい。また資料を提供して頂いた秋田地方气象台、東北地建秋田工務所の関係各位、終始、適切な御助言、御指導を頂きました。北海道大学工学部岸力教授に感謝致します。



参考文献

Box & Jenkins; Time series analysis  
forecasting and control, 1970

R. G. Brown; Smoothing forecasting  
and prediction of discrete time series, 1961

水理委員会; 第11回水工学に関する夏季  
研修会講義集, 1975

長谷部正彦; 土木学会第30回年講, 1975

細谷雄三; 時系列データの推定問題

Table 6

|   | Mean  | C.V   |    | Mean  | C.V   |
|---|-------|-------|----|-------|-------|
| 1 | 134.6 | 0.256 | 7  | 193.5 | 0.592 |
| 2 | 102.5 | 0.276 | 8  | 177.8 | 0.533 |
| 3 | 108.6 | 0.291 | 9  | 196.7 | 0.362 |
| 4 | 132.6 | 0.417 | 10 | 171.3 | 0.356 |
| 5 | 117.2 | 0.402 | 11 | 182.5 | 0.334 |
| 6 | 128.8 | 0.495 | 12 | 173.2 | 0.233 |

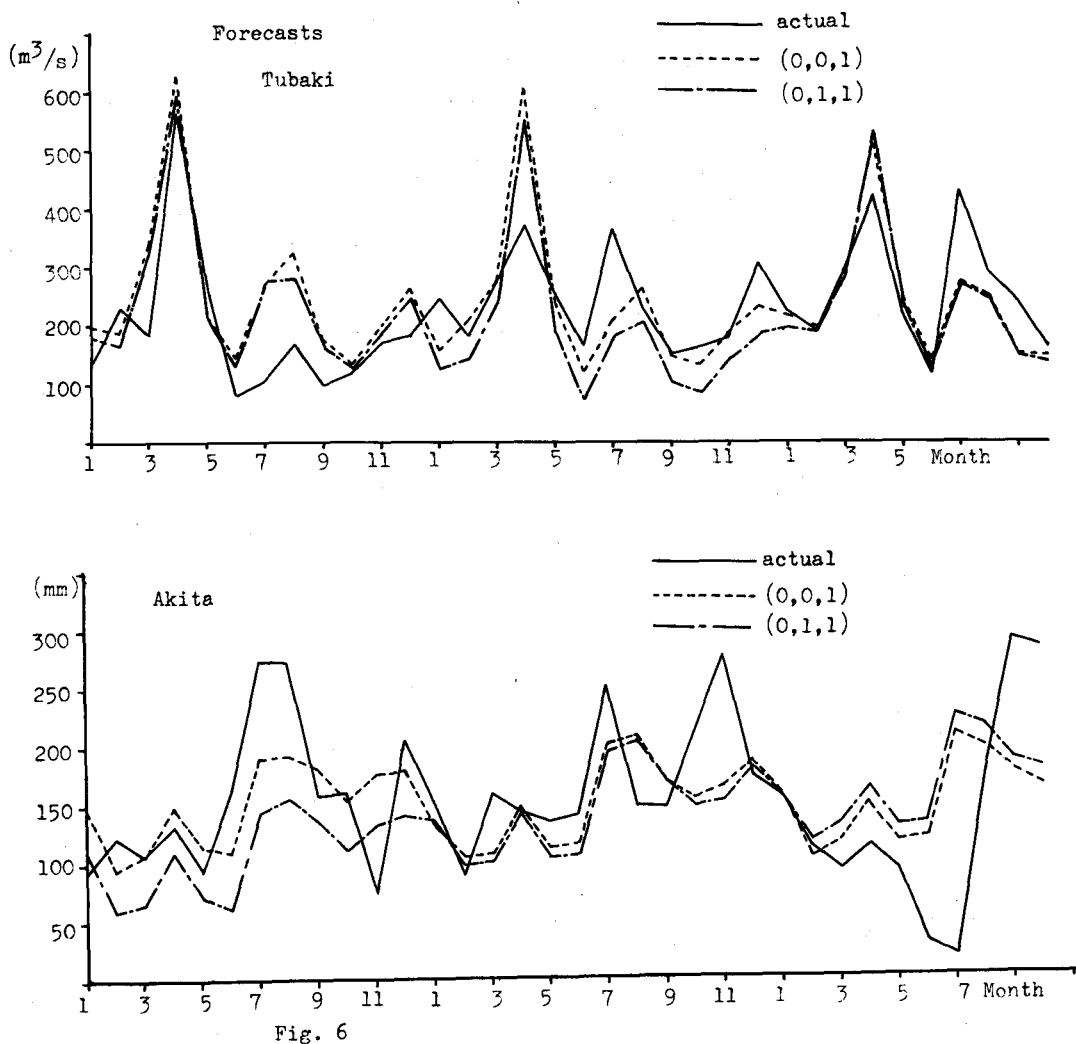


Fig. 6