

1. は し が き

一般に、分布形の定数推定法として、積率法、最小二乗法、および最尤法がよく知られている。特に、標本数が少ない場合や分布形の歪みが大きい場合には最尤法がもっとも有効であることが認められている。しかし、実際問題として、最尤法は計算が煩雑になりがちなため、水文統計分野での利用は極めて少ない。外国では、Kimball(1946)がこの方法を極値分布に初めて応用して以来、Jenkinson(1969)、Lowery and Nash(1970)らによってもっとも有効であることが報告され、Leese(1973)はcensorされた極値資料の利用面での応用例を示している。¹⁾²⁾³⁾一方、我国では残念ながら本方法の実証的研究は皆無に等しいといっても過言でない。(以下、最尤法(Maximum Likelihood Method)をMLMと記す)

このような理由により、本論文では我国でよく利用されている分布の一つであるSlade型の3パラメータ対数正規分布に対するMLMによる実用的定数推定法を示し、時間雨量系列への適用例を示す。また、推定値の信頼限界やcensoring問題について若干の理論と考察を加える。

2. Slade 型対数正規分布に対する M L 方程式

周知のように、有用な形式として、次式のような3パラメータ対数正規分布がある。

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) dy \\ y = k \cdot \ln\{(x+b)/c\} \quad , \quad -b < x < \infty \end{array} \right. \quad (1) \quad (2)$$

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp\{(y-\mu_y)^2/2 \sigma_y^2\} dy \\ y = \ln(x-a) \quad , \quad a < x < \infty \end{array} \right. \quad (3) \quad (4)$$

ここに、 x は原水流量、 y は正規変量、 a, b, c および k はすべて定数、 μ_y, σ_y は(2)式による y の平均、標準偏差である。1)のタイプはパラメータ k, b, c により標準正規分布 $N(0, 1)$ に変換するのに対して、

11)のタイプはパラメータ a, μ_y, σ_y をもち、標準化されていない正規分布 $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ に変換することに形式的相違点があるだけで、両者とも原水流量分布の三次の積率まで表現しうる点では同じである。主として、前者は確率評価に、後者はシミュレーションに利用されることが多いようであるが、標準正規分布 $N(0, 1)$ へ変換する前者の方が実用上種々の利点をもつと考え、ここでは前者に対するML方程式とその解析法を示す。

さて、(1)、(2)式の確率密度関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{k}{c} \cdot \exp\left\{-\left(\frac{y}{k} + \frac{y^2}{2}\right)\right\} \quad (5)$$

であるから、その尤度関数の自然対数を L とすれば、

$$L = \ln \prod_{i=1}^N f(x_i) = \frac{N}{2k^2} + N \ln \frac{k}{c\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(y_i + \frac{1}{k}\right)^2 \quad (6)$$

ここに、 N は標本数、 $y_i = k \cdot \ln\{(x_i+b)/c\}$ 、($i=1, 2, \dots, N$) である。

MLMの定義によれば、(6)式の L を最大にするパラメータ k, b, c の値がML解を与えることから、次式のような非線形連立方程式が得られる。

$$\frac{\partial L}{\partial k} = (N - \sum y_i^2)/k = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial b} = -\frac{k}{c} \sum (y_i + \frac{1}{k}) \exp(-y_i/k) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial c} = \frac{k}{c} \sum y_i = 0 \quad (7)$$

したがって、問題は(7)式 of 非線形連立方程式を解くことに帰着し、plotting position 等の概念は原理的には一切不要であることを示している。この非線形連立方程式に対する解析解を得ることは困難ゆえ、実用的には Newton-Raphson 法による繰返し計算によって ML 推定値が求められる。

3. 実用的定数推定法

いま、ML 解を $\hat{k}, \hat{b}, \hat{c}$ 、第 j 次近似値を k_j, b_j, c_j 、その差を $\Delta k_j, \Delta b_j, \Delta c_j$ 、とすれば、 $L(k_j, b_j, c_j) = L(\hat{k} - \Delta k_j, \hat{b} - \Delta b_j, \hat{c} - \Delta c_j)$ ゆえ $L(k_j, b_j, c_j)$ の k, b, c に関する偏微分((7)式左辺)をそれぞれ $k = \hat{k}, b = \hat{b}, c = \hat{c}$ まわりに Taylor 展開し、二階の偏微分項までをとり、(7)式の定義式を用いれば、

$$(\Delta k_j, \Delta b_j, \Delta c_j) = - \left(\frac{\partial L(k_j, b_j, c_j)}{\partial k}, \frac{\partial L(k_j, b_j, c_j)}{\partial b}, \frac{\partial L(k_j, b_j, c_j)}{\partial c} \right) \cdot R^{-1} \quad (8)$$

ここに、行列 R は $L(\hat{k}, \hat{b}, \hat{c})$ の k, b, c に関する二階偏微分からなる対称行列で、次式のように表わされる。

$$R = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial c} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial b} & \frac{\partial^2 L}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial c} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial k \partial c} & \frac{\partial^2 L}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 L}{\partial c^2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

(9) 式の行列要素は大標本論的にそれらの期待値で置換えがで、 $V = E[R^{-1}]$ は ML 推定値の分散共分散行列を表わしていることに注目する必要がある。⁴⁾

ところで、標準正規変量 y の任意の関数 $u(y)$ の期待値を $E[u(y)]$ とすれば、大標本論的に次式が成立する。

$$E\left[\sum_{i=1}^N u(y_i)\right] = N \cdot E[u(y)] = N \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \exp(-y^2/2) dy \quad (10)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} E[y] &= 0, \quad E[y^2] = 1, \quad E[\exp(-y/k)] = \exp(-1/2k^2) \\ E[\exp(-2y/k)] &= \exp(-2/k^2), \quad E[y \cdot \exp(-2y/k)] = -\frac{2}{k} \exp(-2/k^2) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となり、これらを(9)式の期待値計算に用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial k^2}\right] &= 2N/k^2, \quad -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial b^2}\right] = \frac{N(1+k^2)}{c^2} \exp(2/k^2), \quad -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial c^2}\right] = Nk^2/c^2 \\ -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial k \partial b}\right] &= -\frac{2N}{kc} \exp(-1/2k^2), \quad -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial c}\right] = -\frac{Nk^2}{c^2} \exp(-1/2k^2), \quad -E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial k \partial c}\right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12)式を(8)式に代入し、整理すれば、

$$\left(\Delta k_j, \frac{\Delta b_j}{c_j}, \frac{\Delta c_j}{c_j} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial k}, \frac{\partial L}{\partial b}, c_j \frac{\partial L}{\partial c} \right) \cdot A / N \quad (13)$$

ここに、行列 A の要素 a_{ij} は、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= k^2(\varepsilon + 2)/(\lambda^2 \cdot \varepsilon), \quad a_{22} = 1/(\lambda^2 \cdot \varepsilon), \quad a_{33} = (\varepsilon + k^2)/(\varepsilon \cdot k^2) \\ a_{12} &= a_{21} = k/(\lambda \cdot \varepsilon), \quad a_{13} = a_{31} = k/\varepsilon, \quad a_{23} = a_{32} = 1/(\lambda \cdot \varepsilon) \\ \lambda &\equiv \exp\{1/(2k^2)\}, \quad \varepsilon \equiv (1+k^2) \cdot (\lambda^2 - 1) - 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

結局、(13)、(14)式が繰返し計算の基本式であり、パラメータ推定手順をまとめれば次のようになる。

1) k, b, c についての第1近似値($j=1$)を適切に与える。この場合、積率解⁵⁾を利用する方法を採用すればよい。すなわち、 N_2 の標本 $\{x_1\}$ より、平均 $\bar{x}$ 、分散 S_x^2 、歪み係数 C'_g を計算し、それらの不偏推定値を $\hat{\mu}_x = \bar{x}$, $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{N}{N-1} S_x^2$, $\hat{C}'_g = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{(N-2)} C'_g$ とする。これらの母数とパラメータ k, b, c の関係は、

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{C}'_g &= \sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot (\lambda^2 + 2), \quad (\lambda \equiv \exp\{1/(2k^2)\}) \\ b &= \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \cdot \hat{\sigma}_x - \hat{\mu}_x, \quad c = (b + \hat{\mu}_x)/\lambda \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$(16)$$

で与えられるから、(15)式より Newton 法によって k を求め、(16)式より b, c を求める。

1i) 第 j 近似値 k_j, b_j, c_j に対して (7) 式により $\frac{\partial L}{\partial k}, \frac{\partial L}{\partial b}, \frac{\partial L}{\partial c}$ を求め、(14) 式中の k を k_j として、(13) 式を計算し、 $\Delta k_j, (\Delta b_j / c_j), (\Delta c_j / c_j)$ を得る。

1ii) $k_{j+1} = k_j + \Delta k_j, b_{j+1} = b_j + c_j (\Delta b_j / c_j), c_{j+1} = c_j + c_j (\Delta c_j / c_j)$ を第 $(j+1)$ 近似値とする。

1v) $\Delta k_j, \Delta b_j, \Delta c_j$ が所定の許容範囲に入ったとき、あるいは、 $\frac{1}{N} \sum y_1 \approx 0, \frac{1}{N} \sum y_1^2 \approx 1, y$ の標本歪み係数 $C_{sy} \approx 0$ となる許容範囲に入ったとき、ML 推定値が得られたとして計算を終了する。もし、許容範囲外ならば 1i)~1v) を繰返す。

4. 信 頼 限 界

(2) 式を逆変換すれば、 $x = c \cdot \exp(y/k) - b$ 、であり、特定の y 値、すなわちリターンピリオド $T = 1/(1-F(y))$ に対して x の標準誤差 δx は推定値 k, b, c の標準誤差 $\delta k, \delta b, \delta c$ の関数である。よって、次式が成立すると考えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= W \cdot \delta c + c \cdot \frac{dW}{dk} \cdot \delta k - \delta b \\ W &\equiv \exp(y/k), \quad \frac{dW}{dk} = -\frac{W}{k^2} \exp(y/k) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(17) 式の両辺を二乗し、さらにその期待値をとれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} E[(\delta x)^2] &= W^2 \cdot E[(\delta c)^2] + (c \cdot \frac{dW}{dk})^2 \cdot E[(\delta k)^2] + E[(\delta b)^2] \\ &\quad + 2cW \frac{dW}{dk} E[\delta k \delta c] - 2WE[\delta b \delta c] - 2c \frac{dW}{dk} E[\delta k \delta b] \end{aligned} \quad (18)$$

上式において、たとえば $E[(\delta x)^2]$ は分散 S_x^2 、 $E[\delta k \cdot \delta c]$ は共分散 $\text{Cov}(k, c)$ に他ならないから、(14) 式を用いて (18) 式を書き直せば、次式のようになる。

$$S_x^2 = \frac{c^2}{N} \left\{ \left(\frac{dW}{dk} \right)^2 \cdot a_{11} + a_{22} + W^2 \cdot a_{33} - 2 \cdot \frac{dW}{dk} \cdot a_{12} + 2 \cdot W \cdot \frac{dW}{dk} \cdot a_{13} - 2 \cdot W \cdot a_{23} \right\} \quad (19)$$

したがって、標本数 N と ML 推定値 k, c が既知のとき、特定のリターンピリオド T に対する原変数 x の分散 S_x^2 が (19) 式によって計算できることになる。大標本論的には、推定誤差は平均 0、分散 S_x^2 の正規分布に従うと考えられるから、信頼度 $\alpha\%$ に対する x の信頼限界 x_α は次式のように書ける。

$$x_\alpha = \hat{x} \pm z_\alpha \cdot S_x \quad (20)$$

ここに、 z_α は $N(0, 1)$ 分布における確率(信頼度 α)によって規定される定数である。もちろん、個々のパラメータの推定値の標準誤差は (14) 式を用いて容易に得られる。特に、母歪み係数の推定精度を左右する k の標準誤差 S_k を示せば、次式のようなである。

$$S_k/k = \sqrt{(\varepsilon + 2)/2N \cdot \varepsilon} \quad (21)$$

$$\varepsilon \equiv (1+k^2) \cdot (\lambda^2 - 1) - 1, \quad \lambda \equiv \exp\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

また、歪み係数 C_B の標準誤差 S_{CB} と S_k の関係は

$$\frac{S_{CB}}{C_B} = \frac{3\lambda^4}{k^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2)} \cdot \left(\frac{S_k}{k} \right) \quad (22)$$

であり、これらの関係を図示すれば、図-1 のようである。

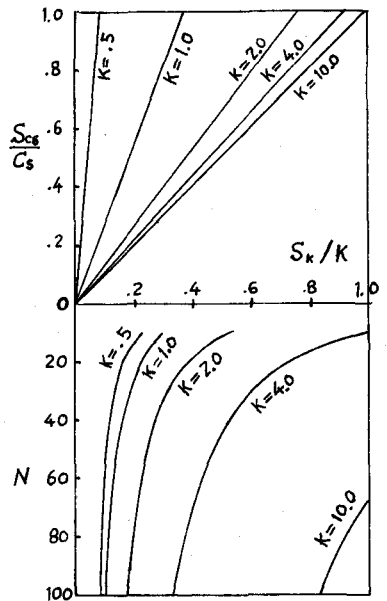


図-1 $S_k/k \sim N, S_{CB}/C_B$

5. Censoring 問題に対する M L 方程式と分散共分散行列

前節までの考察は標本のすべての値が既知であり、かつ、その生起範囲について、 $-b < x < \infty$ 以外の特別の制約はないものとして扱った。これに対して、標本数 N_2 の内 m_2 の標本については範囲(たとえば、特定値以上あるいは以下)が知られているだけで、その数値が不明である場合が考えられる。このような標本は censor されたものといわれ、範囲を規定する特定値は censoring point と呼ばれる。この censoring 問題は二つのタイプに分類される。⁴⁾ タイプ I では、censor を受けた標本数 m がランダム変数であるのに対して、タイプ II では、censoring point がランダム変数である。たとえば、自記記録計がスケールアウトした場合、その記録計の上限あるいは下限値が固定でかつ既知であり、スケールアウトの回数はランダムであるから、タイプ I の censoring になる。一方、自記記録計が年間数ヶ月しか稼働せず、稼働していない月に異常豪雨があり、この年の年最大値は稼働期間の最大値よりも大きいことが確かである場合、タイプ II の censoring になる。

ところで、実際には、上述のような数値化されていない資料、スケールアウトした資料、あるいは欠測期間の資料等はほとんど情報量として評価されずに、棄却あるいは除去され、利用されずに埋没している貴重な資料が数多く存在するものと思われる。censoring 問題はこのような貴重な情報をいかに有効に利用するかを問うものであるといえよう。

さて、タイプ I, II に対する尤度関数を L_I, L_{II} とすれば、

$$L_I = \left\{ \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx \right\} \prod_{i=1}^{m_1} f(x_i) \cdot \left\{ \int_{x_u}^{\infty} f(x) dx \right\}^{m_2} \quad (23)$$

$$L_{II} = \left\{ \int_{-\infty}^{x_{(m_1+1)}} f(x) dx \right\} \prod_{i=m_1+1}^{N-m_2} f(x_{(i)}) \cdot \left\{ \int_{x_{(N-m_2)}}^{\infty} f(x) dx \right\}^{m_2} \quad (24)$$

ここに、 x_u, x_1 はそれぞれ上、下の censoring point、 $x_{(i)}$ は小さい方から数えて第 i 番目の順序統計量、 m_1, m_2 はそれぞれ x_1 (あるいは $x_{(m_1+1)}$) 以下、 x_u (あるいは $x_{(N-m_2)}$) 以上にある標本数である。

両者とも数学的にはまったく同じ繰返し計算法により M L 推定値が得られうることは容易に理解できる。ここでは、タイプ I で、 $m_1 = m \neq 0, m_2 = 0$ の場合、すなわち N_2 の標本中 m_2 は x_1 以下の範囲で、残り $(N-m)_2$ は x_1 以上でかつ数値も既知である場合について、M L 方程式と分散共分散行列を示すことにする。

この場合の尤度関数の自然対数を L_{I1} とすれば、

$$\left. \begin{aligned} L_{I1} = & \frac{N-m}{2K^2} + (N-m) \cdot \ln \frac{K}{c\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-m} \left(y_i + \frac{1}{K} \right)^2 + m \cdot \ln \omega \\ & \omega \equiv \int_{-\infty}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) dy, \quad y_i \equiv K \cdot \ln \{ (x_i + b)/c \} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

定義により、censor を受けていない場合の (7) 式に対応して、次式のような M L 方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_{I1}}{\partial K} &= \frac{1}{K} \left[N-m - \sum_{i=1}^{N-m} y_i^2 + m \cdot Y_1 \cdot y_1 \right] \\ \frac{\partial L_{I1}}{\partial b} &= -\frac{K}{c} \left[\sum_{i=1}^{N-m} \left(y_i + \frac{1}{K} \right) \cdot \exp(-y_i^2/2) - m \cdot Y_1 \cdot \exp(-y_1^2/2) \right] \\ \frac{\partial L_{I1}}{\partial c} &= \frac{K}{c} \left[\sum_{i=1}^{N-m} y_i - m \cdot Y_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

($Y_1 \equiv \exp(-y_1^2/2)/(\sqrt{2\pi} \cdot \omega)$)

さらに、二階の偏微分をとれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 L_{I1}}{\partial K^2} &= -\frac{1}{K^2} \left[N-m + \sum_{i=1}^{N-m} y_i^2 + m \cdot Y_1 \cdot y_1^2 (Y_1 + y_1) \right] \\ \frac{\partial^2 L_{I1}}{\partial b^2} &= \frac{1}{c^2} \left[\sum_{i=1}^{N-m} (1 + y_i \cdot K) \exp(-y_i^2/2) - m K^2 Y_1 \exp(-y_1^2/2) \{ Y_1 + y_1 + \frac{1}{K} \} \right] \\ \frac{\partial^2 L_{I1}}{\partial c^2} &= -\frac{K}{c^2} \left[K(N-m) + \sum_{i=1}^{N-m} y_i - m \cdot Y_1 (1 - K \cdot Y_1 - K \cdot y_1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 L_{21}}{\partial k \partial b} = -\frac{1}{C} \left[2 \sum_{i=1}^{N-m} y_i \exp(-y_i/k) - m Y_L \cdot \exp(-Y_L/k) \{1 - Y_L \cdot Y_L - Y_L^2\} \right]$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial k \partial c} = \frac{1}{C} \left[2 \sum_{i=1}^{N-m} y_i - m Y_L (1 - Y_L \cdot Y_L - Y_L^2) \right]$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial b \partial c} = \frac{k^2}{C^2} \left[\sum_{i=1}^{N-m} \exp(-y_i/k) + m Y_L \cdot \exp(-Y_L/k) \cdot \{Y_L + Y_L\} \right]$$

ところで、(10)式に対応する式として、 $y_1 \leq y < \infty$ で次式が成立する。

$$E \left[\sum_{i=1}^S u(y_i) \right] = E_L[s] \cdot E_L[u(y)] = E_L[s] \cdot \int_{y_1}^{\infty} u(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) dy / (1-\omega) \quad (28)$$

したがって、(27)式の期待値は、

$$\left. \begin{aligned} E_L[N-m] &= N \cdot (1-\omega), \quad E_L[m] = N \cdot \omega, \quad E_L[y] = Y_L \cdot \omega / (1-\omega) \\ E_L[y^2] &= 1 + Y_L \omega / (1-\omega), \quad E_L[\exp(ry)] = \frac{\exp(r^2/2)}{(1-\omega)} \int_{y_1-r}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(t^2/2) dt \equiv \Phi(r_{y_L}) \\ E_L[y \exp(ry)] &= Y_L \exp(r Y_L) \cdot \omega / (1-\omega) + r \cdot \Phi(r_{y_L}) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

を用いれば、容易に得られる。結局、M L 推定値の分散共分散行列 V の逆行列 R の要素 r_{1j} は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= -E \left[\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial k^2} \right] = \frac{N}{K^2} \left[2(1-\omega) + \omega \cdot Y_L \{1 + (Y_L + Y_L) \cdot Y_L^2\} \right] \\ r_{22} &= -E \left[\frac{\partial^2 L_{21}}{\partial b^2} \right] = \frac{N}{C^2} \left[(1-\omega)(1+k^2) \Phi(-2Y_L/k) + \omega k^2 Y_L (Y_L + Y_L) \exp(-2Y_L/k) \right] \\ r_{33} &= -E \left[\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial c^2} \right] = \frac{N k^2}{C^2} \left[(1-\omega) + \omega Y_L (Y_L + Y_L) \right] \\ r_{12} = r_{21} &= -E \left[\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial k \partial b} \right] = \frac{-N}{C} \left[\frac{2(1-\omega)}{k} \Phi(-Y_L/k) - \omega Y_L (1 + Y_L Y_L + Y_L^2) \exp(-Y_L/k) \right] \\ r_{23} = r_{32} &= -E \left[\frac{\partial^2 L_{21}}{\partial b \partial c} \right] = \frac{-N k^2}{C^2} \left[(1-\omega) \Phi(-Y_L/k) + \omega Y_L (Y_L + Y_L) \exp(-Y_L/k) \right] \\ r_{13} = r_{31} &= -E \left[\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial k \partial c} \right] = \frac{-N \omega Y_L Y_L}{C} (Y_L + Y_L) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

したがって、censor を受けない場合とまったく同様な繰返し計算法によって M L 推定値 k, b, c が得られるとともに、推定精度の評価も可能である。また、タイプ I で上限の censoring point をもつ場合やタイプ II の場合についても同様な M L 方程式と分散共分散行列が得られうことは明らかである。

6. 非常時雨量系列の構造解析への応用例

通常、水文学の平均、分散の非常時特性を explicit に表現する数理モデルは月雨量、月流量等の時系列解析やシミュレーションに利用されているが、⁶⁾ 時間雨量のように、より高次の積率である歪み係数の極めて大きい時系列を扱う場合、限られた資料より比較的簡単にかつ精度良く母歪み係数を推定する必要がある。そこで、explicit に歪み度まで評価できるモデルの一つとして、次式の slade型対数正規モデルが有力であると思われる。

$$X_i(t) = C(t) \cdot \exp(y_i(t)/k(t)) - b(t) \quad (31)$$

ここに、 $k(t), b(t), c(t)$ は降雨系列集合 $\{x(t)\}$ の降り始めよりの時刻 t における時間雨量強度分布を規定するパラメータで、添字 1 は降雨系列集合の内の 1 番目降雨系列を示す。このモデルでは、前述のように、水文学 $x_1(t)$ を標準正規変量 $y_1(t)$ に変換でき、パラメータ $k(t), b(t), c(t)$ の非常時構造と $y_1(t)$ の自己相関構造を追求すればよいことになり、その構造解析の容易さはもちろんのこと、シミュレーションの容易性、さらには予測問題への拡張性等を考えれば、種々の利点がある。

さて、大阪管区気象台の時間雨量資料(1900~1970)の内、気象災害年表⁷⁾等を参考にして、台風(前線との相互作用も含む)に起因すると判断された降雨系列集合(計76コ)について解析を行なう。

降り始めからの時刻 t における時間雨量分布のパラメータ $k(t), b(t), c(t)$ を M L M と積率法(石原・高瀬)により求め、標準正規変量 $y(t)$ の平均 $\mu_y=0$, 分散 $\sigma_y^2=1$, 歪み係数 $c_{sy}=0$ からの残差で両者の精度を比較すれば、表-1 のようである。いずれの統計量についても M L M の方が積率法に比べ極めて精度が良いことがわかる。特に、図-1の関係を考慮すれば、歪み係数あるいはパラメータ $k(t)$ の信頼性に関して、積率法は M L M に比べ著しく劣っていると云わざるを得ない。また、標本数が少なくなっても M L M ではほとんど精度の低下を招かないが、積率法では標本歪み係数 c_s の補正係数が非常に大きくなるため、信頼性が低下し、時には図表から補正係数が読み取れなくなる。なお、M L M に対する電子計算機(阪大大型電算機NEAC700)の所要時間は 40 ケースでわずか 10 秒程度であった。

図-2 に、M L M により得られたパラメータ $k(t), b(t), c(t)$ および時間雨量 $x(t)$ の $\hat{\mu}_x, \hat{\sigma}_x, \hat{c}_s$ の時間変化を 5 時間移動平均して示す。明らかに若干の周期成分を含む非定常性が現われており、これらの非定常構造を踏まえてシミュレーションや予測問題を考える必要がある。

なお、censoring 問題については、別途、適切な対象を設定し計算を実施する予定である。最後に、本研究は文部省科学研究・試験研究(日野教授代表)の一部であることを付記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Jenkinson, A.F.: Statistics of Extremes, in Estimation of Maximum Floods, World Meteorol. Organ., Rep. 98, Chap. 5, pp. 183-227, Geneva, 1969
- 2) Lowery, M.D. and J.E. Nash: A Comparison of Methods of Fitting the Double Exponential Distribution, J. of Hydrology, Vol. 10, pp. 259-275, 1970
- 3) Leese, M.N.: Use of Censored Data in the Estimation of Gumbel Distribution Parameters for Annual Maximum Flood Series, W.R.R., Vol. 9, No. 6, 1973
- 4) Kendall, M.G. and A. Stuart: The Advanced Theory of Statistics, Charles Griffin, Vol. 2, London, 1967
- 5) 石原藤次郎・高瀬信忠: 対数正規分布とその積率による解法、土木学会論文集、No. 47, 昭. 32
- 6) 端野道夫: 時間雨量系列の非定常性構造について、第30回土木学会年次講演会概要集、昭. 50
- 7) 島山久尚編: 気象災害、防災科学技術シリーズ1、共立出版、昭. 41

表 - 1 主な時刻における対数正規変換の精度比較

t (hr)	* N	最 尤 法			積 率 法 (石 原 ・ 高 瀬)		
		$ \hat{\mu}_y $	$ \hat{\sigma}_y^2-1 $	$ \hat{c}_{sy} $	$ \hat{\mu}_y $	$ \hat{\sigma}_y^2-1 $	$ \hat{c}_{sy} $
1	76	.002	.003	.079	.014	.195	.683
5	63	.003	.007	.059	.020	.166	.610
10	52	.003	.013	.089	.024	.027	.282
15	45	.002	.006	.070	.018	.104	.539
20	41	.001	.002	.039	.005	.069	.401
25	28	.002	.016	.028	**	—	—
30	30	.005	.002	.079	.033	.049	.334
35	21	.003	.029	.084	.012	.119	.586
40	13	.003	.061	.089	**	—	—
標準誤差		.003	.023	.065	.117	.302	.696

* : 降雨強度 0 mm/hr は標本より除外した。
 ** : 標本歪み係数の補正係数の信頼度が悪く計算せず。

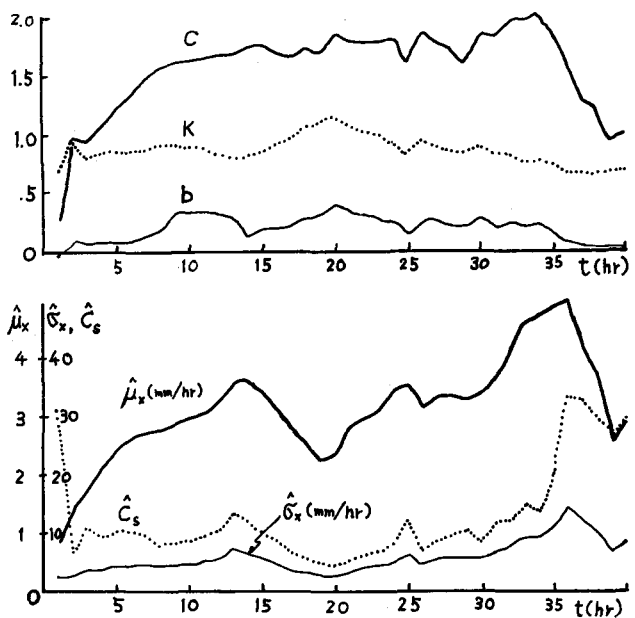


図 - 2 諸統計量の時間変化 (大阪・台風時)