分布型線形応答モデルによる長期流出予測

京都大学工学部　正員　高　棹　琢　馬
京都大学工学部　正員　○池　淵　周　一

1. はしがき

河川表流水の高度的利用をはかるには，従来のようにある一つの基準地点（多くは流域最下流端にとられる）における流況把握にとどまらず，多くの評価地点あるいは取水地点の流況把握が不可欠となってくる。

また最近，都市化あるいは人間活動による水循環系へのインパクトがクローズアップされており，とくに洪水流出に焦点をあわした研究もみられるが，長期流出系（ここでは中間流出，地下水流出を主要成分と考えている）においても，洪水流出ほど鋭敏な変化を示さないものの，今後の人間活動の働きかけによってはそのインパクトが予想される。

さらに，水文学上の関心事としてモデル構成におけるランピングスケールの問題がある。従来から長期流出は洪水流出に比してかなり広くランピングしてもいいといわれているが，その定量的な検討は長期流出系に関する限りほとんどなされていない。

こうした問題を考えると，長期流出系においても，従来からとられている lumped model（集中型モデル）では十分でなく，distributed model（分布型モデル）の展開が不可欠になってくる。

本研究はこうした立場から，長期流出系に対する分布型モデルの展開を考察したものであり，とくに中間流出，地下水流出を主成分とする長期流出系を対象としているので，モデル構成の基本に線形性を仮定している。

2. 流域面積比による流況予測

近年，降雨から流量への流出過程に内在する諸特性を把握すべく，いくつかの流域では試験地が設けられ多種類の水文データが蓄積されつつあり，しかもそれら小流域のデータを用いて下流域の流況を把握，予測しようとする方向の研究も見られるようになってきた。しかし，ほとんどの流域では観測データは下流域で得られており，その場合の方が観測記録も長いのが普通である。こうした水文データの状況下で開発がより奥地化あるいはきめ細かくなり，流域の多くの地点で流況特性を把握・予測する必要にせまられる機会が多くなってきた。

その場合，従来からよくとられる方法として観測流量に流域面積比（計画対象地点流域面積/観測地点流域面積）を乗じて計画対象地点の流況を把握・予測する方法が考えられる。もちろん，この方法は隣接流域あるいは類似流域の流況把握にも拡張されることがある。

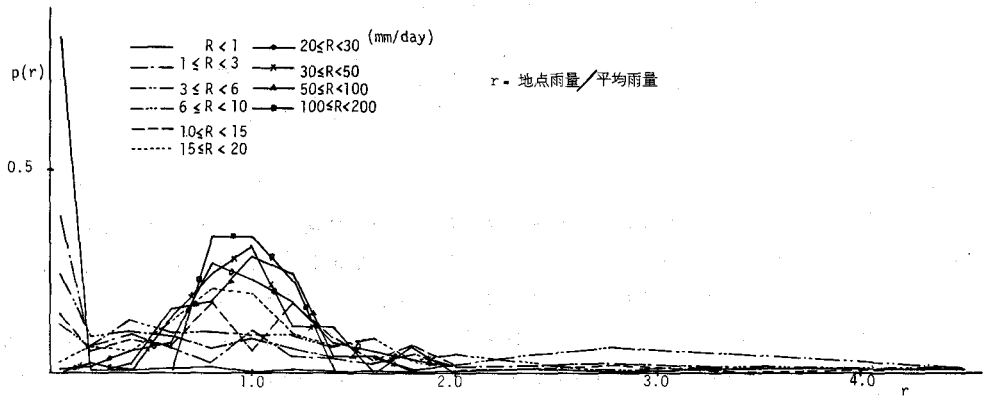
ところで，こうした方法の実際流域に適用した例をみると，なるほど流況パターンはかなり類似しており，対象地点が観測地点に近く，しかも両地点が主要幹川に沿っている場合には流況把握精度もかなり高い。しかし両地点が離れ，面積比が小さくなると一般的に大きな誤差をもたらしている。ちなみに由良川流域における荒倉（150 km²），角（556 km²）および福知山（1,344 km²）地点の降雨期（5月1日～11月30日）での観測流量に基づき，面積比による推定値 $Q^*(i)$ と観測値 $Q(i)$ の合致度Fを次式で評価したのが表－1である。

$$F=\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{Q(i)-Q^*(i)}{Q(i)}\right\}^2\right]^{1/2} \quad (1)$$

表－1　面積比による推定誤差

年	荒倉（福知山基準）	荒倉（角基準）	角（福知山基準）
1953	0.482	0.339	0.854
1954	0.577	0.372	1.017
1955	0.507	0.374	0.346
1956	0.450	0.278	0.342

こうした方法による流況把握精度の誤差原因としてはもちろん流出機構の相違が考えられるが，著者らの由良川流域での解析結果をみる限りでは降雨の空間的分布特性の影響もかなり大きいと考えられる。D.A.



図－1　地点雨量/平均雨量の頻度分布

D. 解析の結果をまつまでもなく，対象面積が大きくなるにつれて面積雨量は小さくなる傾向があり，また降雨量が多いときには流域に一様に降る傾向にあるが，降雨量が少ないとその空間的分布はかなり変動する。図－1はその一例として由良川流域における11地点の降雨データから求めた面積雨量の大小による地点雨量の変動特性を示したものである。日雨量にして50 mm/day 以下の雨は長期流出の主要成分を構成するものと考えられ，こうした範囲の雨量の空間的分布特性も上記の方法の精度悪化の原因と考えられよう。こうした事実は，やはり降雨の空間的分布特性を考慮した分布型モデルの展開が必要であることを意味している。

3. 多重入力系の最適線形応答関数による流況予測

3.1　最適線形応答関数の導出

1入力・1出力系の最適線形応答関数はWienerの沪波・予測理論に基づいて導出され，その長期流出系への適用も多く試みられている。[1] ここではこれらの概念を多重入力・1出力系に拡張する。

いま，簡単のため図－2のように分割された流域を考えよう。線形流下を仮定すると，最下流端流量は各分割流域での線形応答関数 h_1，h_2，h_3，h_4 を用い，図－3のような流下プロセスをへて，離散的に次式のように表現される。

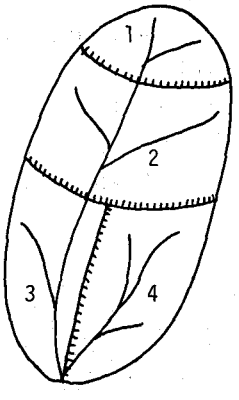
$$Q^*(i)=\sum_{k=\infty}^{\infty} f_1(k)\,h_1(i-r_1-r_2-k)+\sum_{k=0}^{\infty} f_2(k)\,h_2(i-r_2-k)+\sum_{k=0}^{\infty} f_3(k)\cdot h_3(i-k)+\sum_{k=0}^{\infty} f_4(k)\cdot h_4(i-k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ここに，f_i は i 分割流域の面積雨量，r_1，r_2 は流下の遅れ時間である。

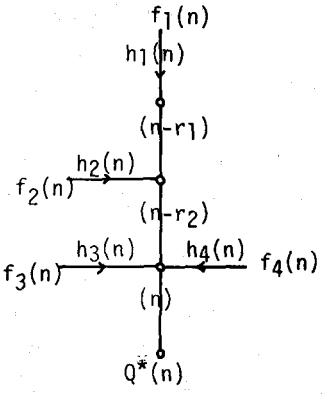
ところで，この各部分系の最適線形応答関数 $h_j(k)$ は上記 $Q^*(i)$ と実測値 $Q(i)$ の間の二乗平均値の最小化によって求められる。すなわち，$Q^*(i)$ と $Q(i)$ の差 $d(i)$ の二乗平均値を式内の変数 $h_j(k)$ で偏微分し，それを0におくと，$h_j(k)$ に関する連立一次方程式が得られ，それを解くことによって求められる。式で表現すると，

$$\frac{\partial}{\partial h_j(k)}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} d^2(i)\right\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

となり，これに(2)式を代入すると最終的に



図－2　分割流域の例示



図－3　線形流下プロセス

以下の連立一次方程式系が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\phi_{1g}(l_1+j) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_1(k)\phi_{11}(j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_2(k)\phi_{12}(l_1-l_2+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_3(k)\phi_{13}(l_1+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_4(k)\phi_{14}(l_1+j-k) \\
\phi_{2g}(l_2+j) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_1(k)\phi_{21}(l_2-l_1+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_2(k)\phi_{22}(j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_3(k)\phi_{23}(l_2+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_4(k)\phi_{24}(l_2+j-k) \\
\phi_{3g}(j) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_1(k)\phi_{31}(-l_1+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_2(k)\phi_{32}(-l_2+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_3(k)\phi_{33}(j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_4(k)\phi_{34}(j-k) \\
\phi_{4g}(j) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_1(k)\phi_{41}(-l_1+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_2(k)\phi_{42}(-l_2+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_3(k)\phi_{43}(j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_4(k)\phi_{44}(j-k)
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ここに，$l_1 = r_1 + r_2$，$l_2 = r_2$であり，$\phi_{ij}(k)$ はiおよびj分割流域の面積雨量に関する相互相関関数，$\phi_{ig}(k)$はi流域面積雨量と最下流端実測流量の相互相関関数である。もちろん，r_1，r_2については流下特性を考えて，あらかじめ与えておく。

このようにして各$h_j(k)$が求められると，各分割流域での流出量はその地域の面積雨量とこの$h_j(k)$のたたみ込み積分によって推定でき，それらを線形合流させれば任意地点での流出量も推定できる。

以上は図－2に示す分割流域に対する最適線形応答関数の算定法であったが，異なる分割流域の構成に対しても，線形流下を仮定する限り同様の誘導が可能である。

3.2. 系の線形化

上述の方法を実際の流域に適用するとなると系を線形と仮定している以上，何らかの方法で系の線形化をはかる必要がある。その基本は降雨および流量系列から非線形性の強い表面流出成分を除去することである。

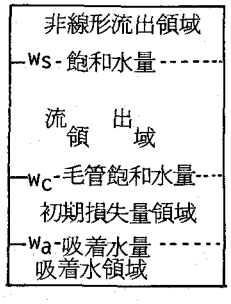
降雨期の流出現象においては，ある無降雨期間の後，流域に雨が降ると雨の一部は樹木や草の葉面で遮断され，あるものは凹地に貯留され，さらには土壌保湿量の不足分を補うために供給される。これらは初期損失量とよばれ，流量の増加には寄与しない雨量分である。またA層がある水位まで土壌水分で満たされていると，降った雨は全部A層内へ浸透して貯留されるのではなく，一部分は表面流出として地表面を流れる。このような実際現象を考えると線形流出系への入力を

$$R_e(i) = R(i) - L(i) - NL(i) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

で与えるべきであろう。ここに，$R_e(i)$；i日に線形流出系へ供給される降雨量，$R(i)$；i日降雨量，$L(i)$；i日降雨量のうちの初期損失量，$NL(i)$；i日降雨量のうちの非線形分量である。

表－2　降雨規模別林内外雨量差

雨量規模	林内外雨量差
0 - 1(mm)	0.3(mm)
1 - 3	1.1
3 - 6	1.6
6 -10	1.9
10 -20	2.4
20 -30	3.0
30 -40	3.2
40 -50	3.3
50 -60	3.2



図－4
A層内土湿量分布の概念図

降雨遮断量については，林内外雨量差で評価したり，実験による試みがいくつかあるが，平均的傾向としては表－2に示す降雨規模別林内外雨量差でもって降雨遮断量を評価するのも一方法であろう。

降雨遮断後の雨量は浸透するが，その浸透水の線形流出成分への供給は概念的に図－4のA層内土湿量分布で議論できる。詳しくは文献1)を参照されたい。ここでは，以下の議論のため結果のみを記しておく。

i) 降雨遮断以外の初期損失量領域への供給量 L(i)：

$$\left.\begin{aligned}
L(i) &= W_c - S(i) \quad ; \quad S(i) + R(i) \geq W_c \\
L(i) &= R(i) \quad ; \quad S(i) + R(i) < W_c
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

ii) 表面流出成分への供給量 NL(i) ：

$$NL(i) = S(i) + R(i) - W_s \quad ; \quad S(i) + R(i) \geq W_s \qquad \cdots\cdots (7)$$

iii) 中間流出成分への供給量 $R_s(i)$ ：

$$R_s(i) = DS(i) - (f_c + e_v(i)) \quad ; \quad DS(i) \geq f_c + e_v(i)$$
$$R_s(i) = 0 \quad ; \quad DS(i) < f_c + e_v(i) \qquad \cdots\cdots (8)$$

iv) 地下水流出成分への供給量 $R_g(i)$:

$$R_g(i) = f_c \quad ; \quad DS(i) \geq f_c + e_v(i)$$
$$R_g(i) = DS(i) - f_c \quad ; \quad DS(i) < f_c + e_v(i) \qquad (9)$$

ここに，S(i)は土湿貯留水で無降雨のとき次式のようにてい減する。

流出領域；

$$S(i+1) = \{S(i) + (f_c + e_v(i))/\alpha\} e^{-\alpha} - (f_c + e_v(i))/\alpha \qquad (10)$$

初期損失量領域；

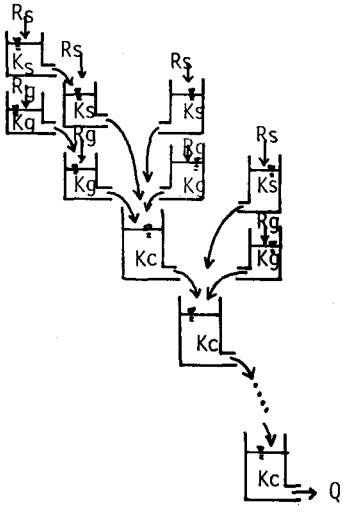
$$S(i+1) = S(i) - e_v(i) \qquad \cdots\cdots (11)$$

また，DS(i) はその日の土湿貯留水の減少量で S(i)－S(i+1) で与えられ，α は中間流出のてい減係数，$e_v(i)$は日蒸発散量，f_cは最終浸透能である。

一方，流量系列からの表面流出量分離の一つの基準として，中間流出成分への供給量の最大値を考えると，その値 DS_{max} は土湿貯留水の日変化量 DS(i) の最大値から近似的に次式で与えられる。

$$DS_{max} = (\gamma D + f_c/\alpha)(1 - e^{-\alpha}) - f_c \qquad (12)$$

ここに，γD はA層厚である。



図－5　複合線形貯水池系の概念図

以上のようにして線形流出系への降雨および流量系列が算定できる。ちなみにこれらの方法を由良川流域に適用した結果によれば，降雨系列と流出高に換算した流量系列の差は降雨期5月から11月までの期間で30～50㎜の誤差を生じるにとどまっており，水収支的にも合理的な算定法といえよう。

したがって，こうした線形化によって得られた入・出力値を前述(4)式の相互相関関数の計算に用いれば，多重入力系の最適線形応答関数が求まることになる。

4. 分布型線形貯水池モデルによる流況予測

以上は有効降雨系列および流量系列から統計的基準において各分割流域の最適線形応答関数をブラック・ボックス的に求める方法であった。以下では，さらに流域分割をきめ細かく考察することができ，しかも幾分なりとも流出の内部構造を考慮した立場から分布型線形貯水池モデルを展開する。

展開に際し，つぎの前提をおいている。

i) 長期流出系とくに中間流出，地下水流出を主成分とする系においては，分布型モデルを構成する場合にも線形系で近似できる。

ii) 流出系は斜面流出系と河道流出系から構成され，さらに前者はA層貯水池系（中間流出貯水池系）と地下帯水層貯水池系からなっている。そして，流域は格子状に分割され（その分割の大きさをどのようにとるかは今後の検討課題であるが），各単位分割流域に降った雨はA層貯水池および地下帯水層貯水池へそれぞれ補給されると貯留流出し，流出水が河道に達するまでは何段階かの単位分割流域を経過する。河道に達してからは河道貯水池系を流下し，最下流端に達する。この場合，各貯水池系は線形貯水池系で近似でき，しかも線形合流流下を仮定する。

iii) A層貯水池，地下帯水層貯水池，河道貯水池は異なる貯留係数 K_s，K_g，K_c をもつが，分割流域ごとに

は一定である。したがって，分布型モデルの構成にあっては降雨のA層貯水池および地下帯水層貯水池への供給特性を重視しており，いったん降雨が各貯水池に補給されると，流出プロセスは一定の貯留係数をもつ複合貯水池系で与えられ，分布特性は最下流端に達するまでの貯水池数によって評価されることになる。

図－5は上記の複合線形貯水池系の概念図である。

以上の前提をおくならば，分布型線形貯水池モデルがNash モデルの概念を用いて以下のように組立てられる。

Nashモデルは元来，洪水流出に適用されていたが，系の線形性を仮定している以上，むしろ長期流出系への適用が合理的と考えられる。いま，Kなる貯留係数をもつn個の線形貯水池系に対するNash単位図は次式で与えられる。

$$u(t)=\frac{1}{K\Gamma(n)}\,e^{-t/K}\,(t/K)^{n-1} \tag{13}$$

さらに，貯留係数K，集中係数nの異なる2つの貯水池系を直列に連結したときの単位図は上式がガンマ分布関数であるので，ガンマ分布の和分布から近似的に次式によって与えられる[2]。すなわち，各貯水池系の単位図が

$$U_1(t)=\frac{1}{K_1\,\Gamma(n_1)}\,e^{-t/K_1}\,(t/K_1)^{n_1-1} \tag{14}$$

$$U_2(t)=\frac{1}{K_2\,\Gamma(n_2)}\,e^{-t/K_2}\,(t/K_2)^{n_2-1} \tag{15}$$

で与えられると，両者の直列系に対する単位図は，

$$U^*(t)=\frac{1}{K^*\Gamma(n^*)}\,e^{-t/K^*}\,(t/K^*)^{n^*-1} \tag{16}$$

で与えられる。ここに，

$$\left.\begin{aligned} K^* &= n_1K_1+n_2K_2/n_1K_1^2+n_2K_2^2 \quad , \\ n^* &= (n_1K_1+n_2K_2)^2/n_1K_1^2+n_2K_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

である。

したがって，ある単位流域iに降った雨が，たとえば前述の(8)，(9)式により中間流出系へR_s，地下水流出系へR_g 補給されると，最下流端流量への寄与分はつぎの単位図とのたたみ込み積分によって与えられる。すなわち，中間流出成分に関する単位図は次式で与えられる。

$${}_sU_i(t)=\frac{1}{{}_sK_i^*\Gamma({}_sn_i^*)}\,e^{-t/{}_sK_i^*}\,(t/{}_sK_i^*)^{{}_sn_i^*-1} \tag{18}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} {}_sK_i^* &= (n_i^s\cdot K_s+n_i^cK_c)/(n_i^s\cdot K_s^2+n_i^cK_c^2), \\ {}_sn_i^* &= (n_i^s\cdot K_s+n_i^cK_c)^2/(n_i^sK_s^2+n_i^cK_c^2) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

であり，n_i^s はi単位流域に降った中間流出補給分が河道に達するまでにたどるA層貯水池数，n_i^c は河道に達してから最下流端に達するまでの河道貯水池数，K_s，K_c はそれぞれA層貯水池および河道貯水池の貯留係数である。

一方，地下水流出成分に関しても同様に，単位図は

$${}_gU_i(t)=\frac{1}{{}_gK_i^*\Gamma({}_gn_i^*)}\,e^{-t/{}_gK_i^*}\,(t/{}_gK_i^*)^{{}_gn_i^*-1} \tag{20}$$

で与えられる。ここに，

$$\left.\begin{aligned} {}_gK_i^* &= (n_i^gK_g+n_i^cK_c)/(n_i^gK_g^2+n_i^cK_c^2) \\ {}_gn_i^* &= (n_i^gK_g+n_i^cK_c)^2/(n_i^gK_g^2+n_i^cK_c^2) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

であり，n_i^g は i 単位流域に降った雨量のうち，地下水流出成分に補給される量が地下帯水層をへて河道に達するまでの地下帯水貯水池数であり，n_i^s と等しいと考える。K_g は地下帯水層貯水池の貯留係数である。なお，浸透水が地下帯水層に達するまでに顕著な遅れがある場合には補給日を遅らせることによってその効果を考慮することができる。

さて，このように各単位流域に降った雨が中間流出成分および地下水流出成分に補給され，それぞれに関する単位図とのたたみ込み積分によって与えられると，それらを合計したものが最下流端のハイドログラフになる。

現時点ではパラメータ K_g，K_s，K_cの適切な値を与える基準はないが，少なくとも $K_c < K_s < K_g$ の関係は肯定できる。したがって，上記方法によって得られた最下流端ハイドログラフと実測ハイドログラフの合致性から，これらの関係を保持しながら試行錯誤的にパラメータを決めるのが実際的であろう。

また，Nash単位図の実際の適用例をみると，集中係数は河道流下長と結びつけて議論されており[3]，この考えを拡張するならば，$a_s(n_i^s)^{b_s}$，$a_g(n_i^g)^{b_g}$，$a_c(n_i^c)^{b_c}$ を新たに n_i^s，n_i^g，n_i^c とおきかえるほうが実際ハイドログラフとの適合性がよい。ここに，各 a，b は定数である。わが国の流域形態から考えて，格子をかなり細かく分割しない限り，斜面系から河道系への流入は直接的であり，n_i^s，n_i^g はいずれの単位流域でも 1 とおき，河道貯水池系の集中係数のみを $a_c(n_i^c)^{b_c}$ で与えることも近似的には十分精度があるものと考えられる。この場合には未知パラメータは貯留係数 K_g，K_s，K_c および集中係数を定める a_c，b_c の 5 つとなる。これらのパラメータの最適化は大きな労力とはならないであろう。

なお，3.1 の展開におけると同様に，下流端流量の線形貯水池系による推定値と実測値との差の何らかの基準によって最適パラメータを決定する方法も議論できようが，現時点では定式化しておらず，今後の検討課題としたい。

いずれにしても最適なパラメータが決定されたならば，任意地点の流況把握は各単位流域からその地点までの河道貯水池数を算定することによって実用的精度で推定できよう。また，流域の開発行為はA層系，地下帯水層系の改変によることが多いのでこれらの系への降雨補給特性の変化を本モデルに導入すれば，開発行為の長期流出系へのインパクト調査もある程度可能であろう。

5. あとがき

本研究では，長期流出系に対しても分布型モデルの展開が必要であることを述べるとともに，その方法として多重入力系の最適線形応答関数および分布型線形貯水池モデルの基本的概念を考察した。理論の構成にはいくつかの仮定を設けているので，今後はそれらの仮定の妥当性を検討していくとともに，実際流域への適用を通じて本方法の有効性を実証していきたい。

参考文献

1) 石原・高棹・池淵；長期間流出解析法に関する 2，3 の考察，土木学会論文報告集 No.196, 昭46. 12.

2) 室田・江藤・田中；時間単位と水文量の統計的特性との関係について，土木学会関西支部年次学術講演会，Ⅱ－3, 昭47. 6.

3) 茶谷・五十嵐・上村他 4 名；農地の雨水保留機能の変化に関する研究，防災科学技術総合研究報告，第 29 号，昭47. 3.