

フラップゲートの自励振動について

東洋大学 正員 本間 仁

東洋大学 正員 ○荻原国宏

1) はじめに

フラップゲートに発生する振動現象は、過去において多くの人々によって指摘され、そのほとんどの場合には、フラップゲートより落下する水脈を切断するスポイラーをつけることによって振動の発生を防止して来ている。そのスポイラーの取付け間隔、形状等も種々なタイプのものが考案され利用されている。

このゲートに発生する振動（自励振動）は水流よりエネルギーの供給を受けて、振動が発生すればいつまでも持続するものである。このゲートの振動及びナップの脈動現象については、Petrikat¹⁾ 以来多くの人々によって研究されて来ているが、まだ不明の点が多い。振動の原因を越流水脈に求めた巻幡²⁾の研究、水脈下の空気に原因を求めた西川³⁾、Schwarz, H, Ivan⁴⁾の研究等があり、またナップとゲートの振動を結びつけたHans-Werner Partensky⁵⁾他のものがある。

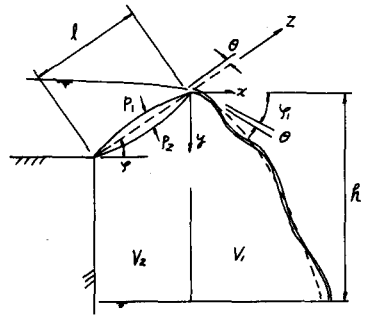


図 - 1

これらの研究によって、振動現象の不安定原因はかなり明確になって来ているが、i) ゲート上の流れ、ii) ゲート先端より落下する水脈、iii) 落下した水脈の下流水面上で発生する乱れ、iv) 水脈下の空気、v) 下流の流れの状況、等の各種の現象が相互に関連していて、どこに解析モデルを求め方程式化するかが重要な問題となる。ここではii)、iv)に主眼点をおき、自由度1の回転運動の方程式を作り不安定問題として解いてみた。

2) 基礎方程式

フラップゲートの振動方程式は、ゲートのたわみ振動を考えに入れられない限り、1自由度の回転運動によると考えて良い。したがってゲートの慣性モーメント I 、ゲート先端で、バネ定数 k のバネで支持されているとすると次のような式を得る。

$$I \ddot{\theta} + R_{\theta} \dot{\theta} + k l^2 \theta = F(\theta, t) \quad (1)$$

$\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ は回転角の時間による2階、1階の微分を示し、 R_{θ} は粘性減衰係数であり、ゲート上にある水の量とか、流れの状態によって決まる定数である。又 I はゲート質量による慣性モーメント I_0 の他に、ゲート上に存在する水による付加質量によって生ずる慣性モーメント I_a を加えてやらないといけない。

$F(\theta, t)$ はゲートに働く振動外力で、モーメントによる表示であるが、これはゲート上面に働く圧力 p_1 と、ゲート下面に働く圧力 p_2 をゲート表面について積分することによって求められる。但し p_1' , p_2' は変動圧である。これらは水流の中に含まれる乱れも考えられるが、ここでは自励振動に注目しているので、ゲートが θ だけ回転したために生ずる変動圧力のみを考えることにする。ゲート上面に働く圧力は開度 (φ) の関数と考えて良いので、ゲート上面よりの振動外力 P_1' は次式のごとくなる。

$$P_1' = \frac{dF_1(\varphi)}{d\varphi} \cdot \theta = \left[\int_A \frac{dp_1}{d\varphi} \cdot z \cdot dA \right] \cdot \theta \quad (2)$$

次にゲート下面に働く振動外力 P_2' は、ゲートの空気の体積の増減によって生ずる圧力変動に起因するものと考えれば、ボイルシャルルの法則を使うことによって表現できる。この場合に体積の増減はゲート自体の動きによるものと、ゲートの動きによって水脈の形状が変化して生ずるものの2つが考えられる。

$$P_2 V = RT, \quad p'_2 = \frac{dP_2}{dV} \cdot \Delta V = -\frac{RT}{V^2} \Delta V, \quad V = V_1 + V_2, \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \dots (3)$$

$$P'_2 = \int_A p'_2 dAZ = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{B l^2}{2} \Delta V \dots (4)$$

但し、 B はゲート長で、 l はゲートの扉高である。 R は気体定数、 T は絶対温度である。 V_1 はナップ下の体積、 V_2 はゲート下の体積である。ナップ下の体積はナップの形状が決まらなと決定できない。ここで、次のような仮定をする。ゲートの先端をはなれるときの水流の方向はゲートの角度に支配され、ゲートをはなれた水は自由落下運動するものとする。したがって水の軌跡はフラップゲートの角度 $(\varphi_1 + \theta)$ とそのときの流速 v_0 によって決定される。ゲートを離れて t' 時間後に水塊のある場所は

$$x = v_0 \cos(\varphi_1 + \theta) t', \quad y = v_0 \sin(\varphi_1 + \theta) t' + \frac{1}{2} g t'^2 \dots (5)$$

となる。水脈の各部分にある水は $t = t_n$ のときにゲートの先端をはなれていて、 $t = t$ の時間にどこにあるかは、(5)式で $t' = t - t_n$ とし、 θ は $\theta(t_n)$ とすれば良い。したがって水脈の形状は、(5)の2式より t_n を消去すれば良い。但し振動の発生する状況より $|\varphi_1| < 20^\circ$, $|\theta| < 2^\circ \sim 3^\circ$ である点を考えて式を簡略化すると(6)式を得る。

$$Y = \frac{x}{\cos \varphi_1} \cdot \sin\left[\varphi_1 + \theta\left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1}\right)\right] + \frac{g}{2} \frac{x^2}{(v_0 \cos \varphi_1)^2} \dots (6)$$

この式の第1項の θ の項は波速 $c = v_0 \cos \varphi_1$ で伝わる波を示している。次にこの水脈の θ の変動による体積の増減 ΔV_1 を求める。これは平均軌跡よりのづれとして与えられるので次式のごとくなる。

$$\Delta V_1 = \int_A \left[\frac{g}{2} \frac{x^2}{(v_0 \cos \varphi_1)^2} + \frac{x}{\cos \varphi_1} \sin \varphi_1 - y \right] dA = -B \int_0^{x_1} x \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1}\right) dx \dots (7)$$

但し、 $\varphi_1 \gg \theta$ として $\sin(\varphi_1 + \theta) = \sin \varphi_1 + \theta \cdot \cos \varphi_1$ としている。 V_1 については水脈の平均軌跡(6)式で $\theta = 0$ とした解を積分して求めれば良い。次にゲート下の体積は次のごとくなる。

$$V_2 = B l \cos \varphi_1 \cdot \left(h - \frac{l}{2} \sin \varphi_1\right), \quad \Delta V_2 = \frac{B l^2}{2} \theta(t) \dots (8)$$

これらの結果を使い $F(\theta) = P'_2 - P'_1$ を求め、パラメーターの整理をすると次のような自励振動の方程式を得る。

$$\ddot{\theta} + 2\gamma \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = M_1 \int_0^{x_1} x \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1}\right) dx \dots (9)$$

$$2\gamma = \frac{R\theta}{I}, \quad \omega_n^2 = \frac{1}{I} \left[k l^2 + \int_0^l B \frac{dP_1}{d\varphi} \cdot z dz + \frac{RT}{V^2} \frac{B^2 l^4}{4} \right], \quad M_1 = \frac{RT}{V^2} \frac{B^2 l^2}{2} \dots (10)$$

3) 振動方程式の特性方程式

(9)式の両辺のラプラス変換をとってまとめると次の式を得る。ただし $t = 0$ で $\theta = 0$ とし、 s はラプラス変換のパラメーターである。

$$F(s) \left[s^2 + 2\gamma s + \omega_n^2 - M_1 \left\{ \frac{c^2}{s^2} (1 - e^{-\frac{x_1}{c}s}) - \frac{c}{s} x_1 e^{-\frac{x_1}{c}s} \right\} \right] = \dot{\theta}(0) \dots (11)$$

したがって振動方程式(9)の特性方程式は(11)式より

$$s^2 + 2\gamma s + \omega_n^2 - M_1 \left\{ \frac{c^2}{s^2} (1 - e^{-\frac{x_1}{c}s}) - \frac{c}{s} x_1 e^{-\frac{x_1}{c}s} \right\} = 0 \dots (12)$$

となる。

振動方程式の安定性を判定する場合には特性方程式の実根の正負によって決められる。しかし、(12)式は無理方程式であるために、根が無数に存在する。したがってこのような場合には多くの場合、次のような方法がとられている。Exp の項を級数展開して適当な項までとり、高次方程式の根で近似する方法 (Routh の方法, Hurwitz の方法, Bilharz-Frank の方法) ⁷⁾ がある。この方法は展開項のどこまでとって近似するかによって問題が生ずる。ここでは複素平面を使った Nyquist ⁷⁾ の方法を適用する。特性根を $s = \sigma + i\omega$ とし、特性方程式の実部を $\bar{X}$, 虚部を $\bar{Y}$ とし、 $W = \bar{X} + i\bar{Y}$ を考える。 s 平面上の特性根は W 平面上ではすべて原点に対応していることが判る。(特性根は $\bar{X} = 0, \bar{Y} = 0$ とする根であるから、図-2)

S 面上での $\sigma > 0, \sigma < 0$ を分ける軸, $s = i\omega$ は、ちょうど振動を安定, 不安定に分けている境界である。したがって W 面上で、パラメーター ω を 0 より無限大まで変化させたときに $(\bar{X}, \bar{Y})$ の点の描く軌跡も安定, 不安定を示す曲線になる。 ω を増加させて、この曲線をたどるとき、原点, $\bar{X} = 0, \bar{Y} = 0$ を右にみる場合は不安定, 左にみる場合は安定になっている。

この方法を (12) 式に利用して実部, 虚部を求めると

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\bar{X}}{M_1 x^2} = C(x_n^2 - x^2) + \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} = F_2(x) \\ \bar{Y} &= \frac{\bar{Y}}{M_1 x^2} = Ax + \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} = F_1(x) \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } \beta &= x_1/c, A = \frac{2\gamma}{M_1 x_1^2 \beta}, C = \frac{1}{M_1 x_1^2 \beta^2}, x = \omega \beta \\ x_n &= \omega_n \beta \end{aligned} \right\} (14)$$

となる。Nyquist 軌跡の 1 例を図 3, 4 に示してある。

さて Nyquist の安定判別法では原点を右側にみて軌跡を進行する場合が不安定であるので、ベクトル $(\bar{X}, \bar{Y}) = R$ を考えて、このベクトルが時計方向に回転する場合が不安定となる。図-5 において、 x の dx の増加によって、 R は $d\bar{x}, d\bar{y}$ 増加することになる。したがって

$$\frac{d\theta}{dx} = \left[\frac{d\bar{Y}}{dx} \cos \theta - \frac{d\bar{X}}{dx} \sin \theta \right] / |R| \dots\dots\dots (15)$$

の式によって $d\theta/dx > 0$ を判定すれば良い。

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = A - \frac{2-x^2}{x^3} \sin x + \frac{2}{x^2} \cos x = F_3(x) \dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{d\bar{X}}{dx} = -2Cx - \frac{2-x^2}{x^3} \cos x + \frac{2}{x^2} \sin x = F_4(x) \dots\dots\dots (17)$$

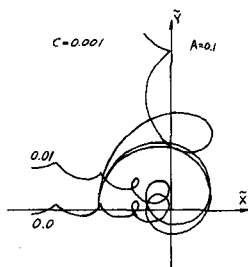


図-4

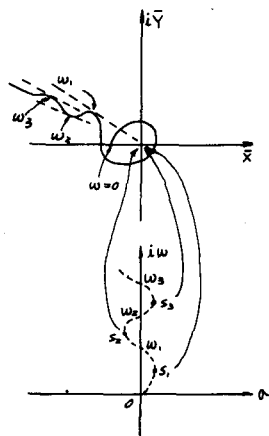


図-2

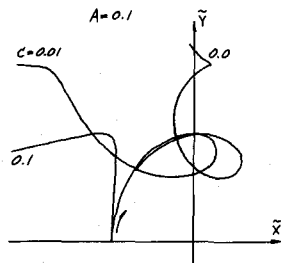


図-3

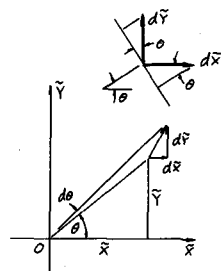


図-5

$$\cos \theta = \bar{X} / |R|$$

$$\sin \theta = \bar{Y} / |R|$$

を考えると、(15)式は

$$F_3(x) \cdot F_2(x) - F_4(x) \cdot F_1(x) \geq 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$\text{又は } \frac{d\bar{Y}}{dx} \cdot \bar{X} - \frac{d\bar{X}}{dx} \cdot \bar{Y} \geq 0$$

である。

$F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x)$ は A, C, x_n の 3 つのパラメーターを含んでいるが、 x_n は $F_2(x)$ のみに入っているの、この項は後で考えることにして、 $F_1 \sim F_4$ の値が A, C, x の値で決まり、その正、負は $F_1 \sim F_4 = 0$ の曲線を求めれば境界線が定まる。すなわちこの曲線によって分けられる領域の組合せによって、安定、不安定の判定がつけられるはずである。そこで $A \sim x, C \sim x$ の関係を 1 つのグラフに書いて領域に分けたのが図-6 である。この領域の I ~ IV はそれぞれ $\tilde{X}, d\tilde{X}, \tilde{Y}, d\tilde{Y}$ の値が (+), (-) のいづれかになっている。これをまとめたのが表-1 である。この A と C の領域の組合せによって必ず $d\theta/dx < 0$ となるものがある。その組合せを表-2 の中に $\times$ 印で書いてある。又同表中の $\circ$ 印は必ず安定になる場合である。これ以外の組合せは場合によって安定、不安定になるものである。この点を考えて図-6 をみれば A, C の各値が小さい程不安定になる事が判る。次に x_n の影響であるが、これは $\tilde{X}$ だけに関係するので C の領域のみを考えれば良い。図-6 をみれば判るごとく、 $x = x_n$ で C の値が ∞ になる部分が生じている。すなわち IV の領域が広がっている。この点を考慮して最も不安定になる条件を求めると、 A の III と C の IV の組合せが最も不安定となることが判る。したがって $x_n = 2m\pi, m = 1, 2, \dots$ 付近で不安定となることが判る。又、 $x_n = 2m\pi$ になると、この $C = +\infty$ の部分はなくなり、 C の I と A の IV の領域の組合せになって、これも不安定になる条件になっている。以上の事を考えると不安定になる場合に、大きく分けて 2 つのタイプの振動があることが判る。1 つは表-2 に示した不安定となる A, C の各領域に入るような、振動系のパラメーターで構成されている場合。もう 1 つは $x = x_n$ で、ゲートの固有振動で振動する場合で、 $x_n = 2m\pi$ となる場合で、 C の値には関係なく起るタイプのものである。これは系の固有振動と共振して起る自励的な振動で、多くのフラップゲートの振動はこれに起因していると考えられる。

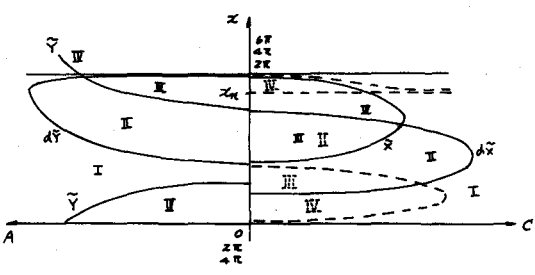


図-6

	$\tilde{X}$	$d\tilde{X}$	$\tilde{Y}$	$d\tilde{Y}$
I	-	-	+	+
II	-	+	+	-
III	+	+	-	-
IV	+	-	-	+

表-1

C \ A	I	II	III	IV
I		$\times$		$\circ$
II	$\circ$		$\times$	
III		$\circ$		$\times$
IV	$\times$		$\circ$	

表-2

4) 摂動法による近似解

振動方程式(9)をみると振動の外力項は $x/v_0 \cos \varphi_1$ の時間だけ前のゲートの動きに支配されていることが判る。そこで $\theta_0 = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ の微小振動があったときに、これが起因となってどのような振動が起るかについて検討してみる。そこで $\epsilon = M_1 x_1^2$ として

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \epsilon \theta_1(t) + \epsilon^2 \theta_2(t) + \dots \quad (19)$$

の解を仮定して、これを(9)式に代入して ϵ のオーダー毎にまとめると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_0(t) + 2\gamma \theta_0(t) + \omega_n^2 \theta_0(t) &= 0 \\ \theta_1 + 2\gamma \theta_1 + \omega_n^2 \theta_1 &= \int_0^1 x \theta_0(t - \beta x) dx, \quad \beta = x/v_0 \cos \varphi_1 \\ \theta_2 + 2\gamma \theta_2 + \omega_n^2 \theta_2 &= \int_0^1 x \theta_1(t - \beta x) dx \end{aligned} \right\} \dots \quad (20)$$

(19)式の第2項は第1項の第3項は第2項によって決まることを示している。 θ_0 の解は固有振動であるが、ここでは一般の外力が作用したものとして $\theta_0 = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ とすることにし、 θ_1 以下の解を求めると即式のごとくなる。

$$\theta_1 = \epsilon_0 \delta_1 e^{i\omega t}$$

$$\theta_2 = \epsilon_0 \delta_2 e^{i\omega t}, \quad \delta = \frac{N(\omega\beta)}{[(\omega_n^2 - \omega^2) + i2\gamma\omega]}, \quad N(\omega\beta) = \int_0^1 x e^{-i\omega\beta x} dx \quad \dots\dots (21)$$

したがって

$$\theta = \epsilon_0 e^{i\omega t} [1 + \epsilon\delta + \epsilon^2\delta^2 + \dots] = \frac{\epsilon_0}{1 - \epsilon\delta} e^{i\omega t}, \quad |\epsilon\delta| < 1 \quad \dots\dots (22)$$

となる。振巾の拡大率は次式で与えられる。

$$\left| \frac{1}{1 - \epsilon\delta} \right| = \left[\frac{(Ax)^2 + C^2(x_n^2 - x^2)^2}{[C(x_n^2 - x^2) - (\cos x + x \sin x - 1)/x^2]^2 + [Ax - (x \cos - \sin x)/x^2]^2} \right]^{1/2} \quad \dots\dots (23)$$

A, C, x は (13) 式と同じである。分母は (13) の $F_1(x), F_2(x)$ に相当していることが判る。振動が不安定となる条件は (23) 式が 1 より大きいことであり、 $F_1(x) = 0, F_2(x) = 0$ となることである。

そこで、フラップゲートの振動が大きくなる場合に固有振動に近い事を考慮して、 $x = x_n$ の場合を考えてみる。

$$F_1(x_n) = Ax_n - (x_n \cos x_n - \sin x_n)/x_n^2, \quad F_2(x_n) = (1 - \cos x_n - x_n \sin x_n)/x_n^2 \quad \dots\dots (24)$$

この両式を 0 とする x_n を求めれば良い。第 2 式より $x_n = 2m\pi (m = 1, 2, 3 \dots)$ で第 1 式より $A = 1/x_n^2$ の条件が出てくる。これは先の特性方程式による検討に一致していることが判る。 $x_n = \omega_n \beta$ で、 β は (20) 式で判るごとく、水の落下に要する時間である。したがって、これを t_0 とし、固有振動の周期を T とすれば不安定条件として

$$x_n = \omega_n \beta = 2m\pi, \quad t_0/T = m, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad \dots\dots (25)$$

を得る。これはゲート先端より下流水面の間に波が、1 波長、2 波長と入っていることを示している。

5) 実験について

フラップゲートの模型実験は、ここ数年来つづけて来ているが、仲々その発生条件がつかめなく、初期の頃は振動が起らずに卒論のとりまとめに苦労するありさまであった。1 昨年より発生条件が判明して、本年度にとりまとめの実験を行なっている。ここにまとめる実験の部分は、それらの一部である。模型としては円曲線を組合せた木製模型 (S47 年, S48 年, S49 年), 直線形状のプラスチック模型 (S49 年) の 3 種類であり、図-7 に概略を示してある。これらの模型実験で振動の大きくなるケースは固有振動で、板バネ、ゲート質量、ゲート上にある水の付加質量、ゲートの空気によるバネ等に関連して決定される。

このことを考慮すると図式で示されるように水の落下時間と振動周期 T の間に直線関係があることが判る。

そこで水の落下高を h として、水の平均落下所要時間を放物運動の式より求める。

$$h = \frac{1}{2} g t_0^2 + v_0 \sin \varphi_1 t_0 \quad \dots\dots (26)$$

測定流量とゲート先端の水深より v_0 を計算し、 $\sin \varphi_1$ は写真又は実測値より求め、2 次方程式より t_0 を求めた。又 T はストロボ又は板バネの振動記録より求めた。この t_0 と T の関係をプロットしたのが図-8 である。

又ゲートの振動が起っている場合の 1 つのケースをストロボ写真として撮映したものを次頁に示してある。いづれも落下高 $h = 27\text{cm}$, $\sin \varphi_1 = 0.5$ で $v_0 = 99.5\text{cm/sec}$ のケースである。

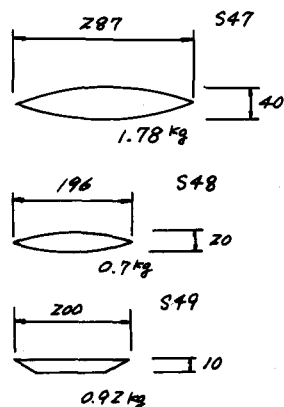


図-7



写真-1



写真-2

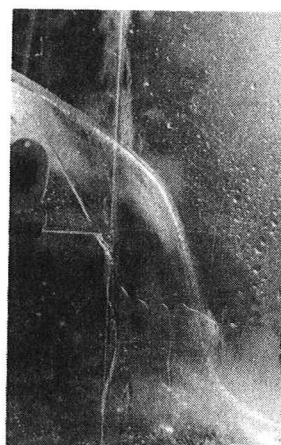


写真-3



写真-4

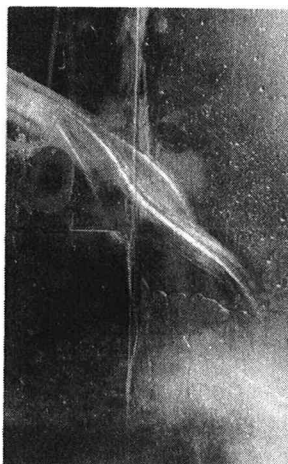


写真-5



写真-6

写真1～3は振動周期とストロボの発光回数をほぼ同じにした場合で(410回/分, 6.38Hz)あって, 1, 2, 3と波が若干づつ落下していつている。写真4, 5, 6はストロボの発光回数を倍の820回/分にした場合で波が 180° の周期づれて2つ写っている。この写真をみれば判ることく, 丁度1波長の波がゲート先端より水面の間に入っていることが良くわかる。図-8で t_0 が T より小さめにでている原因は良く判らないが, $v_0 \sin \varphi_1$ の測定上に誤差が含まれているためか, 否かについて検討中である。

