

躍層面へ噴出する二次元 Jet

東京工業大学 正 吉川 秀夫
 東京工業大学 正 ○池田 駿介
 東京工業大学 学 川村 幸生

1. 序

本論文は密度差のある躍層面へ上層と下層の丁度中間の密度を持つ流体が噴出した時にどのような挙動をするのかという点について若干の理論的および実験的検討を加えたものである。このような現象は重力が働いている場における乱れを考察する上でも興味ある対象であり、その取り扱いに際しても噴流の中心軸上で密度の変化が無視できることから取り扱いが簡単になるという長所も有している。理論的な考察は Goertler による二次元噴流の理論を摂動法を用いて密度差を有する場に拡張するという方法で行なわれ、実験結果と比較を行なった。

2. 理論

座標系および流れの速度成分を図 1 のように定義する。噴出する流体の密度 ρ_0 は上層 ρ_1 と下層 ρ_2 の密度の丁度中間、すなわち $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ とする。このような噴流は y 方向の変化率に較べて x 方向の変化率が小さいと仮定することができるので運動方程式は次のように書ける。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\tau = \rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (3)$$

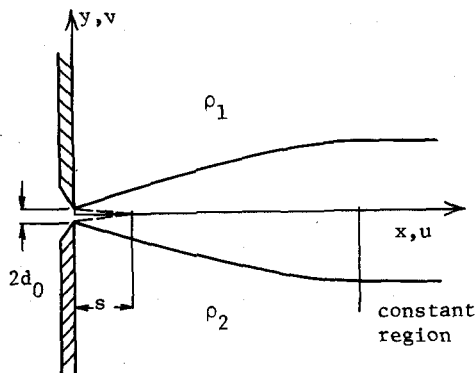


Fig.1. Schematic view of horizontal jet.

ここで(3)式は $\tau = -\rho \overline{u'v'} - u \overline{\rho'v'} - v \overline{\rho'u'}$ と表わされるべきであるがここでは $\partial \rho / \partial y$ が小さいので第 2, 3 項は無視する。又 ϵ に関しては Prandtl の第二仮説に従い、

$$\epsilon = k b u_{max} \quad \dots\dots\dots (4)$$

とする。体積および質量の保存は夫々次式によって表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_{mass} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

(1), (2)の両式から圧力 p を消去し、 τ の表示として(3)式を用いると次式を得る。

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (7)$$

体積から流関数 Ψ を定義すると,

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。(8)式を(7), (6)式の両式に代入すると

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \epsilon \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} + \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \epsilon_{mass} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。Goertler によれば homogeneous な場での二次元噴流は噴出源からある距離 $x = s$ での軸上最大流速を U_s , 幅を b_s とすれば Ψ , b , η は夫々次のように表わされることが知られている¹⁾。

$$\Psi(x, y) = b_s U_s \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \Psi_0(\eta)$$

$$b = b_s \frac{x}{s}$$

$$\eta = \frac{y}{b}$$

ここで考えられているような流れについても噴出源に近い地点では単位質量当りの運動量が非常に大きく、密度差による重力の影響はほとんど無視でき上の関係が成立するであろうが、噴出源から遠い地点では重力の効果が相対的に増大し上式関係を補正しなければならないと考えられる。このような浮力の効果を取り入れ、しかも(9), (10)の両式関係を満足させる為に Ψ , b , η を夫々次のように展開する。

$$\Psi(\eta) = b_s U_s \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \{ \Psi_0(\eta) - (\alpha x)^n \Psi_1(\eta) + (\alpha x)^{2n} \Psi_2(\eta) + \dots \} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$b = b_s \frac{x}{s} \{ 1 - (\alpha x)^n b_1 + (\alpha x)^{2n} b_2 + \dots \} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\eta = \frac{y}{b} = \frac{y}{b_s} \frac{s}{x} \{ 1 + (\alpha x)^n b_1 - (\alpha x)^{2n} b_2 + \dots \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここでこの関係は当然 $\alpha x < 1$ の領域についてのみ成立し、又 ϵ に関する(4)式においても b , u_{max} が含まれているので同様に αx で展開されることなどに注意しなければならない。密度の分布についても同様に、

$$\frac{\rho - \rho_1}{\rho_0 - \rho_1} = m(\eta) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$m(\eta) = m_0(\eta) - (\alpha x)^n m_1(\eta) + (\alpha x)^{2n} m_2(\eta) + \dots\dots\dots (15)$$

とおく。(1)~(15)式を(9), (10)の両式に代入し αx の各べきについて整理すると、

$$(\alpha x)^0 :$$

$$2 \frac{k_s}{b_s} \Psi_0'''' + \Psi_0 \Psi_0'''' + 3 \Psi_0' \Psi_0'' = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$4 \beta \frac{k s}{b_s} m_0'' + 2 \Psi_0 m_0' = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$(\alpha x)^n:$$

$$\left\{ -\frac{3}{2} b_1 \Psi_0 \Psi_0''' + \left(2n - \frac{3}{2}\right) b_1 \Psi_0' \Psi_0'' + \frac{1}{2} \Psi_0 \Psi_1''' + \left(\frac{3}{2} - n\right) \Psi_0' \Psi_1'' + \frac{3}{2} \Psi_0'' \Psi_1' + \left(\frac{1}{2} + n\right) \Psi_0''' \Psi_1 \right\}$$

$$(\alpha x)^n = \frac{k s}{b_s} (4 b_1 \Psi_0''' - \Psi_1''') (\alpha x)^n - \frac{(\rho_0 - \rho_1) g b_s}{\rho_0 U_s^2} \left(\frac{x}{s}\right)^2 \eta m_0' \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{1}{2} \Psi_0 m_1' - n \Psi_0' m_1 - \frac{b_1}{2} m_0' \Psi_0 - \left(\frac{1}{2} + n\right) m_0 \Psi_1 = \beta \frac{k s}{b_s} (2 b_1 m_0'' - m_1'') \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに $\beta = \frac{\epsilon_{\text{mass}}}{\epsilon}$ である。ここで Goertler と同じように $x = s$ における未定義の巾 b_s を $b_s = 4 k s$ と選び、又 18 式の両辺を比較することによって n と α を夫々、

$$n = 2, \quad \alpha x = \frac{x}{s} \left\{ \frac{(\rho_0 - \rho_1) g b_s}{\rho_0 U_s^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

と決定することができる。これからこのような重力噴流は内部フルード数 (リチャードソン数といってもよい) によって支配され、しかもその効果は距離の二乗に比例して増大することがわかる。これから 16, 17, 18, 19 の各式は簡単化され、

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Psi_0''' + \Psi_0 \Psi_0''' + 3 \Psi_0' \Psi_0'' = 0 \quad \dots\dots\dots (21) \\ \beta m_0'' + 2 \Psi_0 m_0' = 0 \quad \dots\dots\dots (22) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1''' + 2 \Psi_0 \Psi_1''' - 2 \Psi_0' \Psi_1'' + 6 \Psi_0'' \Psi_1 + 10 \Psi_0'' \Psi_1 = b_1 (2 \Psi_0' \Psi_0'' + 6 \Psi_0 \Psi_0''' + 4 \Psi_0''') - 4 \eta m_0' \quad (23) \\ \beta m_1'' + 2 \Psi_0 m_1' - 8 \Psi_0' m_1 = 2 b_1 m_0' \Psi_0 - 10 m_0' \Psi_1 + 2 \beta b_1 m_0'' \quad \dots\dots\dots (24) \end{array} \right.$$

となる。境界条件は $y = 0$ で $\Psi = 0$, $u = u_{\text{max}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\rho = \rho_0$, $y \rightarrow \infty$ で $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$ であることを考慮すると

$$\eta = 0: \quad \Psi_0 = 0, \quad \Psi_0' = 1, \quad m_0 = 1 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_1'' = 0, \quad m_1 = 0$$

$$\eta = \infty: \quad \Psi_0' = 0, \quad \Psi_0'' = 0, \quad m_0' = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\Psi_1' = 0, \quad \Psi_1'' = 0, \quad m_1' = 0$$

と定まる。24 式については Ψ_0 に関する境界条件を考慮して積分すると解は簡単に求まり、

$$\Psi_0(\eta) = \tanh \eta, \quad u_0(\eta) = \frac{d\Psi_0}{d\eta} = \frac{1}{\cosh^2 \eta} \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。密度分布を表わす式⑧も積分によって解が求まり、例えば $\beta = 1$ に対しては

$$m_0(\eta) = 1 - \tanh \eta \quad \cdots \cdots \cdots \text{⑧}$$

となる。塩水の場合には $\beta \simeq 1.2$ であるが、この場合には⑧式を直接数値積分して解を求めなければならない。 Ψ_1 に関する線型常微分方程式⑨については一回だけ積分可能で

$$\Psi_1''' + 2\Psi_0\Psi_1'' - 4\Psi_0'\Psi_1' + 10\Psi_0''\Psi_1 = b_1(4\Psi_0''' + 6\Psi_0\Psi_0'' - 2\Psi_0'\Psi_0') - 4\eta m_0 - 4\int_{\eta}^{\infty} m_0 d\eta \quad \cdots \cdots \text{⑨}$$

となる。これ以上直接積分することはできず、後は数値積分によらねばならない。数値積分は Runge-Kutta 法を用いて $\Psi_1(0) = 0, \Psi_1'' = 0$ の下に $\Delta\eta = 0.02$ の刻み巾で $\eta = 0$ から始められ、 $\eta \rightarrow \infty$ における境界条件を満足するように $\Psi_1'(0)$ の値を変えて行なわれた。数値計算の結果は表 1 にまとめられている。このとき Ψ_0 については⑧式を $m_0(\eta)$ については $\beta = 1.2$ の場合の数値解を用いた。又 b_1 は⑫式において明らかなように重力の影響によって噴流の中がどの程度減少させられるかの指標となるものであるが、実験によって決定せざるを得ないものであり、ここでは測定によって 0.4 と定めた。以上の計算結果を用いると $(\alpha x)^2$ の order までとると、 u, b は夫々

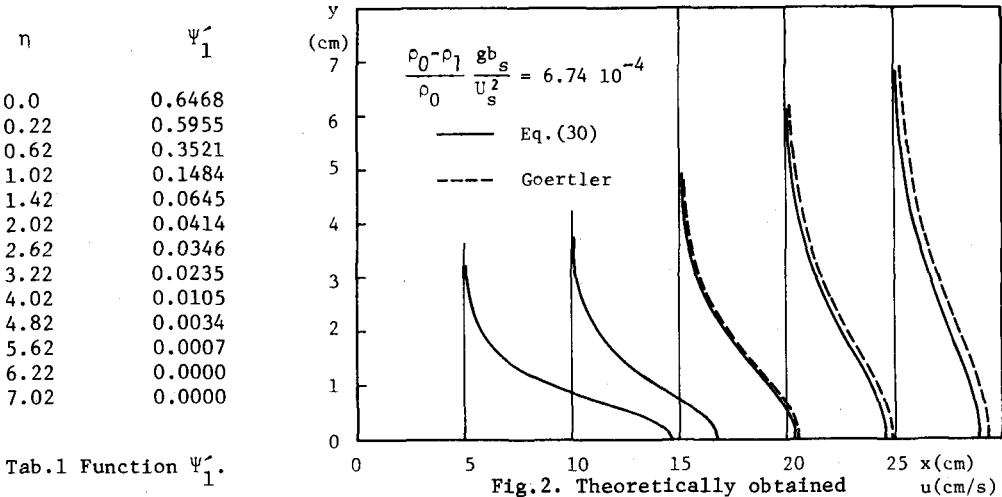
$$u = \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial y} = \frac{d\Psi d\eta}{d\eta dy} = U_s \left(\frac{s}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \Psi_0' + (b_1\Psi_0' - \Psi_1') \frac{(\rho_0 - \rho_1)gb_s}{\rho_0 U_s^2} \frac{x^2}{s^2} \right\} \cdots \cdots \text{⑩}$$

$$b = b_s \frac{x}{s} \left\{ 1 - b_1 \frac{(\rho_0 - \rho_1)gb_s}{\rho_0 U_s^2} \frac{x^2}{s^2} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots \text{⑪}$$

となる。⑩式を用いて流速を決定するには s, b_s, U_s の値を定めねばならないがそれには次のように考える。 $x = s$ における全運動量は s 地点が噴出口に近く、密度勾配に基く x 方向の圧力勾配が無視できるときには

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy$$

となるが、これは噴出口から放出される運動量 $2\rho_0 b_0 U_0^2$ と等しくなければならない。ただし $2b_0$ は噴出口の中、 U_0 は噴出口における流速である。従って u として⑩式を用いることができ、又 ρ は近似的に ρ_0 と



考えても差し支えないから、次式が成立する。

$$\begin{aligned}\rho_0 b_0 U_0^2 &= \int_0^\infty \rho u^2 dy \\ &= \rho_0 U_s^2 \int_0^\infty \frac{s}{x} \Psi_0'^2 dy = \rho_0 U_s^2 s \frac{b_s}{s} \int_0^\infty \Psi_0'^2 d\eta = \frac{2}{3} \rho_0 U_s s \frac{b_s}{s} \dots\dots\dots (32)\end{aligned}$$

中心軸上 $x = s$ で $U_0 = U_s$ となる距離を求めると(32)から

$$s = \frac{3}{2} \frac{b_0}{\sigma} \dots\dots\dots (33)$$

となる。ここに $\sigma = b_s/s$ は Goertler によれば $1/7.67$ である。以上の諸式によって s , b_s , U_s の関係が決まった。図 2 には $U_0 = 28.7 \text{ cm/s}$, $(\rho_0 - \rho_1)/\rho_0 = 0.0025$, $b_0 = 0.05 \text{ cm}$ の場合(従って $U_s = 28.7 \text{ cm/s}$, $b_s = 0.075 \text{ cm}$, $s = 0.575 \text{ cm}$) の場合の流速分布の変化の状況が示されている。 x 方向の圧力勾配によって点線で示されている Goertler の解よりも流れの速度は減少することがわかる。

ここで考えられているような重力噴流においてもすべての x 地点で全運動量の保存が成り立っていないなければならない。すなわち x 方向に圧力勾配が存在することを考慮すれば

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^\infty \rho u^2 \alpha y + \int_0^\infty \int_y^\infty \rho g dy dy \right\} = 0$$

である。 u として(32)式を ρ として(34)式を代入し、夫々 $(\alpha x)^0$, $(\alpha x)^2$ の order について整理すると、 $(\alpha x)^0$ の order については既に考慮されているので自動的に満足され、 $(\alpha x)^2$ の order からは次の関係式が導びかれる。

$$b_1 = \frac{4 \int_0^\infty \Psi_0' \Psi_1' d\eta - \int_0^\infty \bar{m} d\eta}{2 \int_0^\infty \Psi_0'^2 d\eta}, \quad \bar{m} = - \int_\eta^\infty \frac{\eta}{m_0(\eta)} d\eta \dots\dots\dots (34)$$

すなわち Ψ_1 に関する常微分方程式(34)を解くに際して $b_1 = 0.4$ としたが、この値を用いて解かれた Ψ_1 の値を(34)式に代入すると b_1 が再び 0.4 とならなければならないことを示している。計算を行なってみると約 0.38 となりこの条件はほぼ満足されていることが判明した。

3. 実 験

実験は図 3 に示されているような巾 10.2 cm 、深さ 45 cm 、長さ 140 cm のアクリル製の二次元水路に tail tank を取り付けて行なわれた。上流端には正確に巾 1.0 mm のスリットが水路の全巾にわたって切られており、ここから Jet が噴出するようになっている。tail tank は下流端で噴流による流れが壁にあたって内部段波となってはね返ってくるのを防ぐ為に取り付けられたもので、はね返りをかなり遅くすることができる。実験の手順は次の通りである。まず塩水のタンクから塩水(密度 ρ_2)を水路のスリットの高さまで入れる。次に淡水の tank から真水(密度 ρ_1)を塩水と混合しないようにゆっくりと入れる。同時に head tank にはこの塩水と淡水を等量に入れよくかきまぜて噴出させる塩水(密度 ρ_0)を作っておく。実験は head tank の下にあるバルブによって流量を調節し、同時に tail tank 末端の躍層面から同量を取り出し、定常的な噴流を作ることによって行われた。この際に噴流による entrainment を予想して塩水と淡水の補給装置を設けたが、測定時間が短かく entrainment される量も小さいので補給の必要は全くなかった。噴流を流し始めてから下流端に達し内部段波としてはね返ってくるまで数分の order であるので、実験

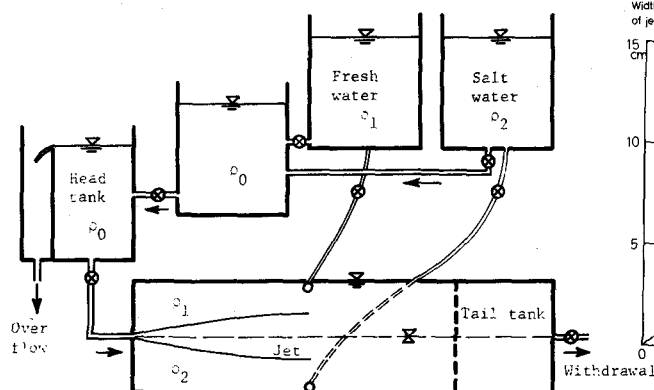


Fig.3. Experimental apparatus.

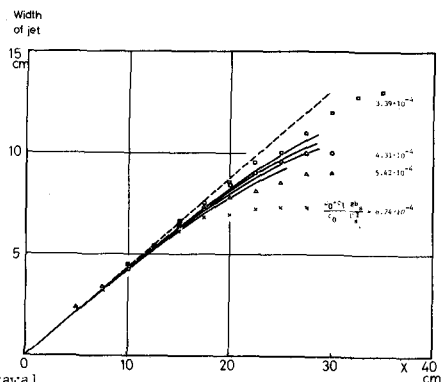


Fig.4. Spread of the jets.

はその範囲で修了せねばならず、従って流速分布の測定には水素気泡法を用い連続写真の平均値から流速を読みとった。図5には測定結果と(30)式から計算された値の比較を行なっている。噴出源近くでは水素気泡法を用いることは困難で、円錐型のホットフィルムプローブを用いた熱線流速計によって速度分布の測定を試みたが乱れ自身が大きく信頼性のある結果を得ることは困難であるように思われた。

噴流の拡がり巾は head tank の塩水に過マンガン酸カリウムを少量投入し着色して写真撮影を行なって測定した。その結果は図4に示されているが噴流の拡がり巾は明らかに内部フルード数によって支配され、

$$\frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0} \frac{gb_s}{U_s^2}$$

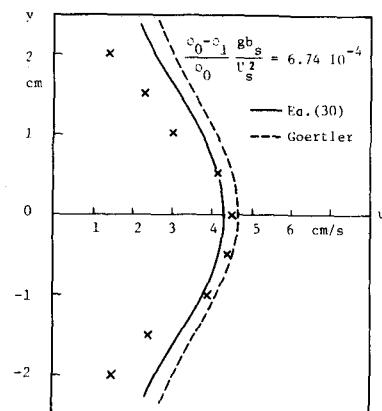


Fig.5. Measured velocity distribution.

が大きい程、広がりの中はおさえられ早く一定値に達することがわかる。ここで渦動粘性係数 ϵ について考えてみると ϵ は(4)式から $\epsilon = k b u_{max}$ と表現されているので、homogeneous な場での噴流と較べて、 b, u_{max} が減少するので ϵ も小さくなるが、それでもなお乱れがかなりおさまったと考えられる噴流の巾が一定値に達した領域でも ϵ はある大きさの値を持つことになる。図5において内部フルード数の大きい実験では理論曲線と実験値が早くからずれ始め、理論曲線の方が拡がり巾が大きく見積られるのはこのような理由によるものと思われる。理論においてこのように仮定された乱れの条件が x 方向のどの位置まで成立しているのか、拡がり巾が一定となった領域でも乱れは存在しているのか、あるいは重力が乱れの構造にどのような影響を与えるのかといった疑問に答える為に熱線流速計を用いて乱れの測定を行なった。塩水中の乱れの測定に際してはwire型(円筒型)のホットフィルムプローブを用いると時間的にかなり出力が低下する傾向が見られたので円錐型のプローブを用いたが、この場合には時間的な出力低下はほとんど見られなかった。このような流れの流れを調べるには $u'v'$ 、特に v' について測定する必要があるが前記の出力低下がもしwire型であることに起因するものであるとすれば x 型プローブによる v' の測定は実質上困難であると思われる。ここでは x 方向の乱れ u' についてのみ測定を行なった。図6には内部フルード数 $\left\{ \frac{(\rho_0 - \rho_1) gb_s}{\rho_0 U_s^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 2.79 \times 10^{-2}$ の場合の u' の生のデータが示されている。拡がり巾が一定となってくる $x = 20$ cm では噴流の中心軸では乱れは少し残っているが、軸から離れるにつれて乱れはおさまり変動は内部波動的となっている。 $x = 30$ cm 付近では乱れはほとんど見られず、速度の変動は内部波によるものであると思われる。

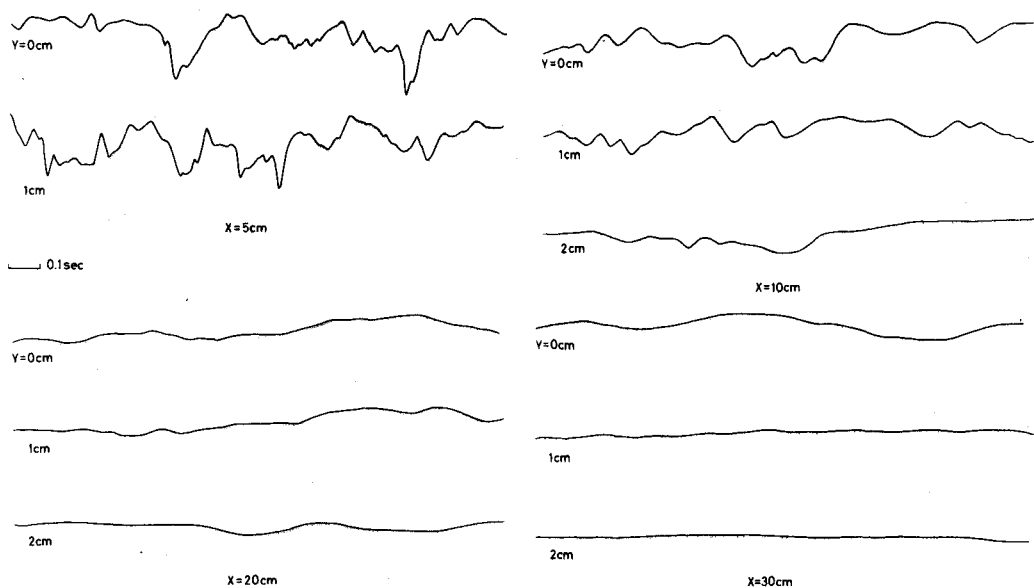


Fig.6. Fluctuation of flow velocity in a jet (u').

4. 結 び

以上の考察によって明らかになった諸点を下に列記する。

(1) 躍層面に噴出する二次元 Jet は噴出口近傍では運動量が卓越し密度差に起因する重力の影響はほとんど受けないが、流下するに従ってその影響を受け遂にはその拡がり巾は一定となる。重力の影響は噴流が拡がりつつある領域では理論的には内部フルード数によって規定され、その効果は距離の二乗とともに増大する。

(2) 密度差のない一様な場における噴流の場合よりも流速は減少する。これは x 軸方向に生まれる圧力勾配の為であると思われる。流速分布の測定に際しては時間的な変動が大きかったのでこれらの理論的な予測を実験によって明確に立証するまでには至らなかった。

(3) 拡がり巾が一定となった領域では乱れはほとんど存在しない。

この研究は主に理論的な興味から出発したものであって、実用的には三次元問題の方がより重要な意味を持つものと思われ、従って筆者等は三次元問題についても現在理論的、実験的検討を加えており、近い将来にその結果を発表する機会を持てるものと思っている。

最後にこの研究をすすめるに当って日野幹雄教授を始め水工研究室の方々から有益な助言をいただいた。記して謝意を表わします。

参 考 文 献

- (1) Goertler, Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, ZAMM 22 (1942). 又は Schlichting, H., Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill.
- (2) Mori, Y., Buoyancy Effects in Forced Laminar Convection Flow over a Horizontal Flat Plate, Jour. of Heat Transfer, Trans. of ASME (1961).
- (3) 林泰三, 首藤伸男, 川上克巳, 火力又は原子力発電所より放出された温噴流の湾内拡散, 第 15 回海岸工学講演会講演集 (1968)。