

中央大学理工学部 正会員 林 泰造
中央大学大学院 学生員 ○岩 崎 光 隆

1. ま え が き

確率的現象とりわけ乱流拡散の問題に Monte Carlo 法を応用して研究がおこなわれた例は、我が国においては日野教授によるものがある^{1,2,3,4)}。それによると、本来 Monte Carlo 法は、“確率論的および決定論的な問題の解明に無作為抽出の方法を応用すること”と定義されているが、乱流現象の場合にはただ単にある確率分布にしたがうのみならず、相関あるいはスペクトルの統計的規則性の存在をとりいれることが重要である。そうすることにより、微分方程式を介することなく複雑な地形での拡散の状態をシミュレートすることができる。そのための準備として日野教授は乱流現象を乱子理論をモデルにして、粒子の Lagrange 的運動特性を表現できることをあらわし、数値モデルによる粒子の拡散実験を行なった。

本報においてはこれを基礎としてさらに、この方法によるものがいかに実際のスケールの拡散現象に応用できるものであるかを考察し、つぎに筆者らが以前に行った開水路の一樣乱れ部分中における中々浮遊粒子の拡散の水理実験と比較のための数値実験を行って、日野教授の数理モデルと水理実験との比較・考察を行った。

2. 乱れのシミュレーション

乱流場を周波数の異なる多くの travelling waves の和と考える“波動模型”に対して、乱流場をちりばめられた渦の集合の場とみなす“粒子模型”の考えかたがある。粒子模型による研究は Weizsäcker⁵⁾および井上博士⁶⁾によって確立されたものと考えられる。こゝでは以後井上博士の表現を用いることにすると、乱流場は多くの乱子 (turbulon) から成りたっており、各時刻 t の速度 $V(t)$ は各階級の渦速度の合成として得られ、次式のようにあらわされる。

$$V(t) = V_0(t) + V_1(t) + V_2(t) + \dots + V_n(t) + \dots + V_\infty(t) \quad (1)$$

ここに、最大渦については添字 0 を、最小渦については添字 ∞ を、中間渦には $1, 2, \dots, n$ をもってあらわし、各階級の乱子は各々の自乗平均平方根速度

$$\sqrt{\{V(t)\}^2}$$

の周りにガウス分布をするものとする。

日野教授の方法はこのような井上博士のモデルに基づいてコンピューターによるシミュレーションを考えたものであって、コンピュータシミュレーションのために同教授は $V_n(t)$ を次のように書き表わした：

$$V_n(t) = u_n \cdot R_n \quad (2)$$

ここに R_n は第 n 階級の乱子速度の見掛けの“振巾” u_n に掛けられるべき時間 t についてのランダムな関数（無次元）であり、日野教授はこれを中心 0 で標準偏差 1 の正規乱数にとられた。そこで (2) 式を (1) 式に代入すると

$$V(t) = u_0 \cdot R_0 + u_1 \cdot R_1 + \dots + u_n \cdot R_n + \dots + u_\infty \cdot R_\infty \quad (3)$$

ところで乱れのエネルギー・カスケード過程を仮定して、乱子エネルギー逸散率 ϵ が乱子の階級 n に無関係であるとすると、第 n 階級の乱子の寿命時間 τ_n は直ちに次のようにあらわされる。

$$\tau_n \sim u_n^2 / \epsilon \quad (4)$$

よって一般に乱子の寿命時間と乱子速度との相対的な関係は次のようになる。

$$(\tau_n / \tau_0)^{1/2} = u_n / u_0 \quad (5)$$

(5)式のような関係を用いて(3)式を書き改めると、一般に時刻 t における速度 $V(t)$ は相対的な渦の寿命時間 τ_n/τ_0 をつかって次式のように書きあらわされる。

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot (\tau_n/\tau_0)^{1/2} \cdot R_n \dots\dots\dots (6)$$

また、乱れ強度は次のようにしてあらわすことができる。

$$\overline{\{V(t)\}^2} = \overline{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot R_n \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cdot R_m \right\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_n \cdot u_m \cdot \overline{R_n \cdot R_m} \dots\dots\dots (7)$$

ここに overbar は Lagrange 的時間についてとった平均を表わす。そうすると、明らかに

$$\overline{R_n \cdot R_m} = 0 \quad (n \neq m) \dots\dots\dots (8)$$

であるから、(7)式は次のように書き表わされる。

$$\overline{\{V(t)\}^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \{u_n \cdot (\tau_n/\tau_0)^{1/2}\}^2 \cdot \overline{R_n^2} \dots\dots\dots (9)$$

ところで、 $\overline{R_n^2} = 1$ であるから、

$$\overline{\{V(t)\}^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 \cdot (\tau_n/\tau_0) \dots\dots\dots (10)$$

この式から見られるように、所定の乱れ強度を得るために適当な u_n を決定することが必要であるが、このことは最大の乱子の乱子速度を規定することに相当する。

次に、 $V(t)$ の時間の面について考える必要がある。日野教授は各階級の乱子はその寿命時間 τ_n に応じた期間ごとに一定乱子速度を持続するとするモデル (図-1) を考えて $V_n(t)$ の値は $0, \tau_n, 2\tau_n, \dots\dots, n\tau_n, \dots\dots$ で不連続に変化するものとし、

$$V_n(t) = u_n \cdot R_n(J_n) \dots\dots\dots (11)$$

と書き表わした。ここに

$$J_n = \text{INTEGER}(t/\tau_n) + 1 \dots\dots\dots (12)$$

ただし、INTEGERはカッコの中の部分の整数部をとりだす操作を示す。次に一例として、 $\tau_n/\tau_0 = 1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4$ 、の5つのランクの乱子から成る乱れを考えると、 $V(t) = \sum_{n=0}^4 V_n(t) = \sum_{n=0}^4 u_n \cdot R_n(J_n)$ は(12)式を考慮することにより次のように表わされる。

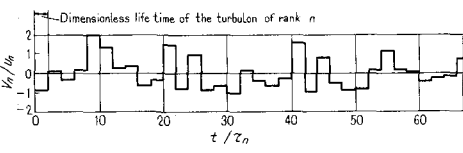


図-1. 特定のランクの乱子の乱れ速度についての井上・日野のモデル

$$\left. \begin{aligned} V(\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(1) + u_2 R_2(1) + u_3 R_3(1) + u_4 R_4(2) \\ V(2\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(1) + u_2 R_2(1) + u_3 R_3(2) + u_4 R_4(3) \\ V(3\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(1) + u_2 R_2(1) + u_3 R_3(2) + u_4 R_4(4) \\ V(4\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(1) + u_2 R_2(2) + u_3 R_3(3) + u_4 R_4(5) \\ V(5\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(1) + u_2 R_2(2) + u_3 R_3(3) + u_4 R_4(6) \\ V(6\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(1) + u_2 R_2(2) + u_3 R_3(4) + u_4 R_4(7) \\ V(7\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(1) + u_2 R_2(2) + u_3 R_3(4) + u_4 R_4(8) \\ V(8\tau_4) &= u_0 R_0(1) + u_1 R_1(2) + u_2 R_2(3) + u_3 R_3(5) + u_4 R_4(9) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

図-2は $V_n(t), (n=0, 1, 2, 3, 4)$ および $V(t)$ を(12)式により筆者らが計算してみたものである。日野教授は(12)式までに記述されたようなモデルを使用して Lagrange 相関係数, Lagrange スペクトル等が計算できることを示した。

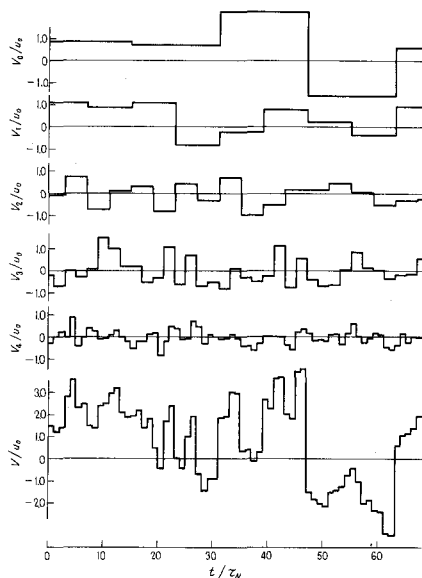


図-2. 5つのランクからなる乱子による
乱れの合成

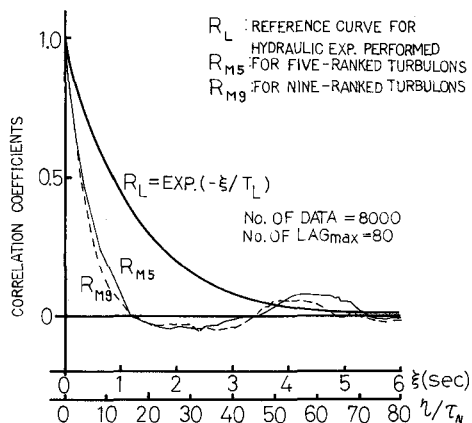


図-3. 乱れ速度の相関係数

3. 実物のスケールへの変換方法

コンピュータによって作られた乱れを実際の粒子の運動と関連づけるためには、既述のように最大乱子の乱子速度 u_0 の他にさらに考える最終ランクの渦の寿命時間 τ_N を知る必要があるが、これは換言すると時間のスケールを実物と数値モデルとで一致させる必要があるということである。そこで、比較的正確に計測しうる時間としての Lagrange タイム・スケール T_L に着目して、その値が実物と数値モデルとで一致するように数値モデルの時間のスケールを次のようにして定める。

水理実験および数値実験における拡散時間をそれぞれ ξ および η とおき、また水理実験および数値実験における Lagrange 相関係数をそれぞれ R_L および R_L' とおけば、

$$R_L(\xi) = \overline{u'(t) u'(t+\xi)} / \overline{u'(t)^2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$R_L'(\eta/\tau_N) = \overline{V(t/\tau_N) V((t+\eta)/\tau_N)} / \overline{V(t/\tau_N)^2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに $u'(t)$ は水理実験における粒子の乱れ速度、 $V(t)$ は既述のように数値実験における粒子の乱れ速度である。これにより、数値実験における粒子の Lagrange タイムスケール T_L' と水理実験における粒子の Lagrange タイムスケール T_L との間には次式が成りたたねばならない。

$$T_L \equiv \int_0^\infty R_L(\xi) d\xi = T_L' \equiv r \tau_N \int_0^\infty R_L'(\eta/\tau_N) d\eta/\tau_N \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 r は上式を満たすようにとるべき無次元定数であり、次のようなものである。

$$r = T_L / \tau_N \int_0^\infty R_L'(\frac{\eta}{\tau_N}) \frac{d\eta}{\tau_N} \quad \dots\dots\dots (17)$$

4. 水理実験並びに数値実験結果

(1) 浮遊粒子を用いた水理実験及び実験結果

第18回水理講演会において筆者らは、開水路の流れの水面近くに浮遊する粒子を用いた拡散の実験についての報告をおこなった。本報ではコンピューターによってこの実験と同じ水理条件のもとに粒子の拡散のシミュレーションを行ない考察をする。ここでを行った実験の要領を以下に示す。

原点から十分離れた所における分散 σ^2 はTaylorの理論により次式で与えられる。

$$\sigma^2 = 2 \overline{u'^2} T_L X / U \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 U ：平均流速 X ：原点からの距離

一方浮遊粒子を用いた実験から拡散巾に対する距離の関係 σ^2/X が測定され、他方において、Lagrange的な乱れの強さとEuler的に測定された乱れの強さが等しいことを仮定する立場に基づいてホットフィルムによる一定点における乱れの測定から u' を求めた。 $(\sqrt{\overline{u'^2}} = 2.32 \text{ cm/s})$ 。これらの値を用いて(18)式からLagrangeタイムスケール T_L を計算したものが($T_L = 1.163 \text{ s}$) Lagrangeタイムスケールの実測値と考えられる。

実験において使用した水路は長さ30^{cm}、巾1 m、高さ08 mの水路で底面には大きい粗度を設け横断方向への乱れの変化が完全に無視できるようにしてある。この水路に原点から粒子を1個づつ放出し、下流側に設けられた網でそれらを捕え、粒子の拡がり計算した。網は粒子の投下点から0.25 m、0.4 m、0.6 m、0.8 m、1 m、1.5 m、2 m、2.5 mさらに1 mごとに9 mまでの15ヶ所に变化させ、各々300個を流す作業を1ケースとして合計6ケース行なった結果が図-6および7の黒丸で示される。水理条件はつぎのようである。

流量 = 18.9ℓ/s, 表面平均流速 = 21.1 cm/s, 摩擦速度 $U_* = 3.51 \text{ cm/s}$,
エネルギー勾配 $I = 0.00115$ 区間中央水深 $h = 10.9 \text{ cm}$
レイノルズ数 $Re = 18,600$

(2) コンピュータによる数値実験結果

実際の粒子の実験と同様なモデルを設定し、拡散のシミュレーションを行なった。すなわち巾を1 m、測定区間を8 mとし、粒子投入点より下流側を13ヶ所に設置し、網を25等分して4 cm各に区分する。時刻 t における粒子の座標を(X_n, Y_n)とすると、 Δt 後の時刻 $t = (n+1) \Delta t$ には粒子の位置は次の式で与えられる。なお、 Δt は前に述べた τ_N に相当する。

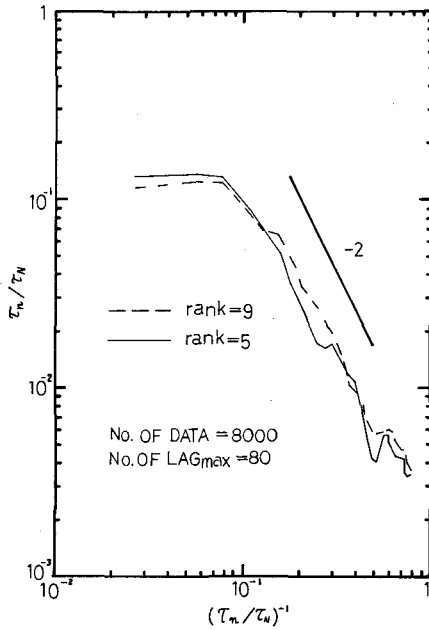
$$\left. \begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + (U + U'_n) \cdot \Delta t \\ Y_{n+1} &= Y_n + V_n \Delta t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 U は平均流速21.1 cm, V_n は(6)式で与えられるものを用い、局所的な等方性の仮定を用い U'_n は V_n と同様な方法で得られたものを用いた。

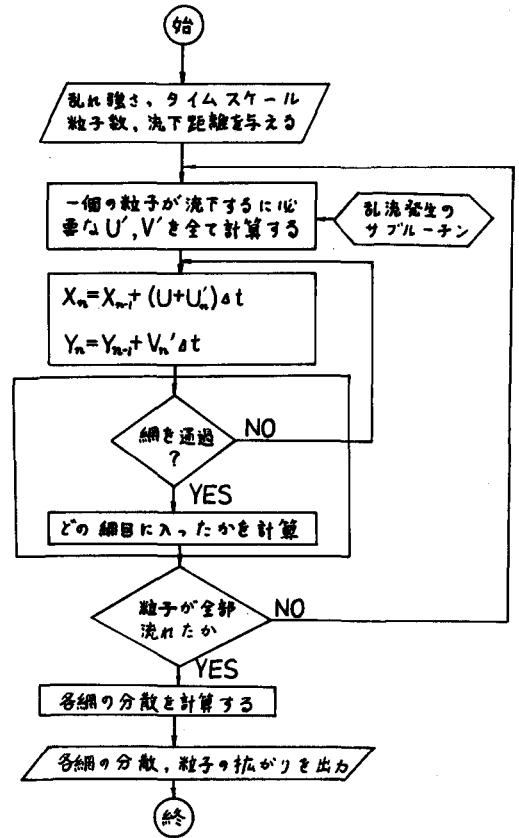
一方、乱れの場合は異なる大きさの渦の集合と考えられるが、そのランクの数をいくにするか、またその相対的な渦の寿命時間 τ_n/τ_0 をどのようにとるかにについては以下のように定める。一回目に用いた階級の数(ランク数)は5つであり、前に述べたように τ_n/τ_0 を16/16、8/16、4/16、2/16、1/16とした。二回目にはrank数を9とし、 τ_n/τ_0 の値はランク5にそのそれぞれの中間の値を加えて16/16、10.7/16、8.9/16、8/16、5.3/16、4/15、3.2/16、2/16、1/16とした。

このようにして得られたランク5の乱れ速度は既述のように図-2に示される。また自己相関係数およびスペクトルは図-3、4に示される通りであり、一様流にこのような乱れが一様にのせられている場合について粒子の拡散の数値実験を行う。

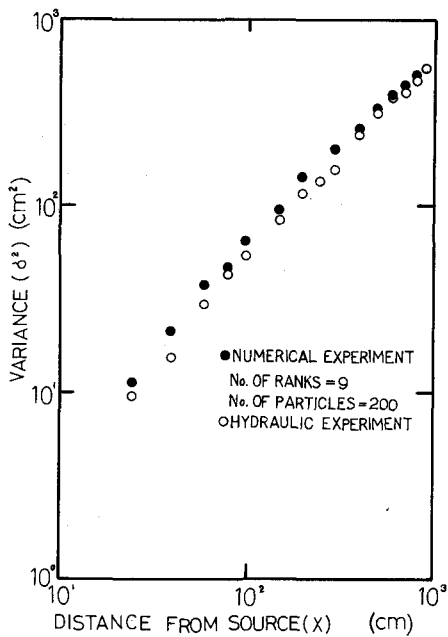
計算のフローチャートは図-5に示され、このような数値実験による拡散変動巾についての数値実験結果はランク5およびランク9の場合についてそれぞれ図-6、7に示される。これらを水理実験結果と比較するといずれも、ほぼ良い一致をみているように認められる。



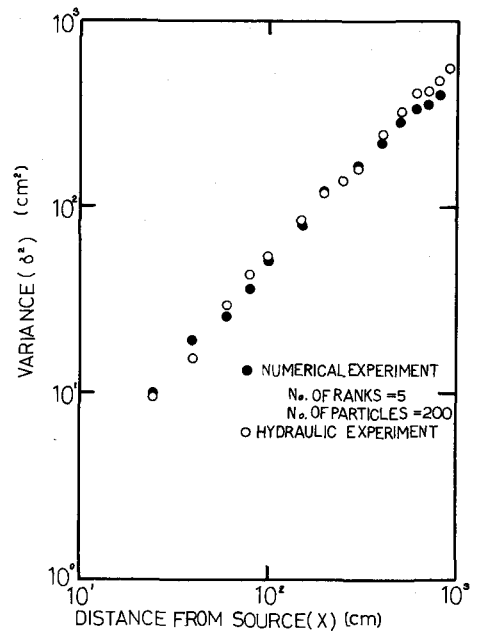
図一 4. 乱れのスペクトル



図一 5. 数値実験のフローチャート



図一 6. 拡散巾(ランク 9 の場合)



図一 7. 拡散巾(ランク 5 の場合)

なお、計算時間に関しては、CPU用時間のほとんどは乱数を作るために費やされ、 1×10^4 個の乱数をつくるのに約1分であった。必要な乱数の個数はランク5の場合、1個の粒子の流下に 2×10^8 ケであり、この乱数の発生に約12sを必要とした。なお、計算はすべて中央大学計算機センターのFACOM230-25を用いて行った。

5. 結 論

モンテカルロ法を応用した乱流拡散の数値実験を一様な二次元の流れの場において行ない、同様な水理条件の結果と比較することにより、ランク5程度のシミュレーションでも水理実験結果とかなりよく一致する結果をうるができることが確認された。今後はこのような方法を用いて shear flow 中での拡散のシミュレーションを行うことが大きな課題であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) 日野幹雄；モンテカルロ法による乱流現象のシミュレーションへの試み，土木学会第19回年次学術講演会前刷 第II部 4月，1964，pp. 27.1～2.
- 2) 日野幹雄；モンテカルロ法による乱流拡散の二，三の計算について，第9回水理講演会講演集，2月，1965，pp. 67～72.
- 3) Hino, M.: Digital computer simulation of turbulent diffusion. Proc. 11th Congress of the (Leningrad), Vol. 2, 1965, pp. 1～11.
- 4) Hino, M.: Digital computer simulation of random phenomena, Trans of JSCE, No. 123, Nov., 1965, pp. 33～43.
- 5) 井上栄一；地表風の構造，農業技術研究所報告，A (物理，統計) 第2号，Sep. 1952，p.p. 1～93
- 6) Weizsäcker, C.F. von : (introduced by G. K. Batchelor) Nature, vol. 158, 1964
- 7) 林泰造，岩崎光隆；開水路における拡散の実験，第18回水理講演会講演集，1973，p.p. 151～155