

要 旨

異なった鉛直速度分布と渦動拡散係数をもつ交番流の分散係数を Aris のモーメント法を用いて解析的に導き、解析結果を瞬間瞬間の速度分布が指数型の交番流に拡張し、二次元開水路および円管路中の交番乱流の分散係数を得た。本解析では、分散は鉛直速度分布と鉛直乱流混合が一体となって生じる効果に起因すると仮定している。理論の適用性と交番乱流の水理特性を調べるために二次元開水路交番乱流で分散実験を行った。その結果、交番乱流の各瞬間の流速分布は指数型で近似でき、実験的に決めた二次元開水路、円管路交番乱流の分散実験は、流れが1周期にわたって乱流である時、理論値と良い一致をみた。

従来の解析的研究

潮汐湾や沿岸近くの水域の流れは、本文で扱う交番乱流の一型式と考えることができる。それゆえ交番乱流中の分散に関する研究の大部分は、湾内物質の分散との関連において論じられてきた。これらのうち解析的研究の主要なものに Bowden¹⁾, Okubo^{2), 3)}, Holley ら⁴⁾の研究がある。Bowden は鉛直速度勾配が卓越した交番流中の分散も、Taylor⁵⁾ による定常流中の分散のバイオニア的研究と同様、平均鉛直速度分布とその方向の拡散係数の結合によって生じた効果に起因すると考えた。Bowden はこの効果を“シア-効果”と呼び、準定常流の仮定のもとに交番流の表面速度振巾が定常流の表面流速に等しい時、交番流の分散係数は定常流の分散係数のほぼ半分であることを示した。Okubo は直線型速度分布、拡散係数一定の仮定のもとに、交番流の周期が濃度が断面内一様になるに要する時間より十分に大きい時交番流の分散に及ぼすシア-効果は定常流のそれと同程度に重要であることを示した。Holley, Harleman, Fischer は直線型流速分布、拡散係数一定の交番流に対し Taylor の方法を用いて分散係数を求めた。この値を異なった断面形状、流速分布、拡散係数を組合せた交番流に対して数値的に求めた分散係数と比較し、両者に大きな差が存在しなかったことから解析解が自然湾に適用可能であると主張している。

理論解析

x 軸を主流方向、 z 軸を鉛直上向きに選ぶ。分散係数を解析的に求めるために次の仮定をおく。

- (1) y 方向の物理量の変化は無視できる。(2) 乱流輸送は渦動拡散係数を用いて表現できる。(3) 交番流の流速振巾の鉛直方向変化は、定常状態の速度分布と同じである。(4) 流速振巾の主流方向変化は小さく無視し得る。(5) 水深は一定である。(6) 流体密度は一定である。(7) 交番流は長波の特性をもつ。

以上の仮定をおくと、交番流中の移流-拡散方程式は次式で与えられる²⁾。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + [u_s(z) + u_t(z) \sin \omega t] \frac{\partial S}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 S は拡散質の濃度、 $u_s(z)$, $u_t(z)$ はそれぞれ定常成分の流速、交番成分の流速振巾である。この後、添字 s , t はそれぞれ定常成分、交番成分に対応する諸量を示す。全拡散質が $t=0$, $x=0$ で投入されるものとし、濃度 S を標準化すると、初期条件、境界条件は次式で与えられる。

$$S(x, 0) = \frac{1}{H} \delta(x) \quad \dots\dots (2), \quad \frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=0, H} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 H は水深、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。濃度 S の n 次モーメントは

$$m_n(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n S(x, z, t) dx \quad \dots\dots\dots (4)$$

(1)式にそれぞれ x , x^2 を乗じた後, (2)(3)式を用いて積分すると, 全拡散質の一次モーメント $\bar{X}$, 二次モーメント $\bar{X}^2$ を得る。

$$\bar{X} = \int_0^H \int_0^t (u_s + u_t \sin \omega t') m_0 \, dz dt \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{X}^2 = \int_0^H \int_0^t (u_s + u_t \sin \omega t') m_1 \, dz dt \quad \dots\dots\dots (6)$$

(5), (6)式中の m_0, m_1 の関係式は(7)式, (10)式をそれぞれの条件によって解くことによって得られる。

$$\frac{\partial m_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial m_0}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (7) \qquad \frac{\partial m_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial m_1}{\partial z} \right) = (u_s + u_t \sin \omega t) m_0 \quad \dots\dots (10)$$

$$m_0(z, 0) = \frac{1}{H} \quad \dots\dots\dots (8) \qquad m_1(z, 0) = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \frac{\partial m_0}{\partial z} \right|_{z=0, H} = 0 \quad \dots\dots\dots (9) \qquad \left. \frac{\partial m_1}{\partial z} \right|_{z=0, H} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

濃度分布の分散を σ_x^2 で表わすと分散係数は(13)式で定義される。

$$D_x = \frac{1}{2} \frac{d \sigma_x^2}{d t} = \frac{1}{2} \frac{d}{d t} (\bar{X}^2 - \bar{X}^2) \quad \dots\dots\dots (13)$$

円管中の交番流に対しても開水路流に対して導かれた(1)式から(13)式と同等の関係式を得ることができ⁶⁾, したがって(13)式から分散係数が求まる。 D_x を見積るためには, 速度分布形, 渦動拡散係数を知る

表-1 解析に用いた流速分布と渦動拡散係数

Case	Flow Geometry	Velocity Profile		Eddy Diffusivity
		Steady Comp.	Alternating Comp	
1	Open Channel Flow	$2\bar{U}_s \frac{z}{H}$	$2\bar{U}_t \frac{z}{H}$	constant
2			$2\bar{U}_t \frac{z}{H}$	$K_0 \sin \omega t $
3		$3\bar{U}_s [\frac{z}{H} - \frac{1}{2}(\frac{z}{H})^2]$	$3\bar{U}_t [\frac{z}{H} - \frac{1}{2}(\frac{z}{H})^2]$	constant
4	Circular Pipe Flow	$2\bar{U}_s (1 - \frac{r^2}{a^2})$	$2\bar{U}_t (1 - \frac{r^2}{a^2})$	constant
5			$2\bar{U}_t (1 - \frac{r^2}{a^2})$	$K_0 \sin \omega t $

る必要がある。最初に表-1の流速分布形, 渦動拡散係数であらわされる二次元開水路流, 円管流中の分散を考える。表-1中 $\bar{U}_s, \bar{U}_t$ は, それぞれ定常成分, 交番成分の平均流速と平均速度振巾で, a は円管の半径である。Case 1は既にOkubo²⁾, Holleyら⁴⁾によって解かれ, Case 2の分散係数は数値的に求められている⁴⁾。Case 2と5は, 定常成分が存在せず交番成分のみからなる流れで, 鉛直拡散係数は平均速度に比例すると仮定している。この仮定は K_z が1周期にわたり一定であると仮定するよりも实际的である。これらの5 Caseの分散係数はFukuoka⁶⁾, ⁷⁾ によって求められている。

例えば, Case 1に対しては

$$D_x = K_x + \frac{\bar{U}_s^2}{30} \frac{H^2}{K_z} + \frac{\bar{U}_t^2 H^2}{K_z} \left\{ \frac{T_r^2}{4\pi^2} \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{T_r}} \right) + \frac{2T_r^2}{\pi^4} \frac{(1 - e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{T_r}})}{1 + \frac{\pi^2}{4} T_r^2} \right. \\ \left. - \frac{T_r^3}{\pi^3} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \sin \sqrt{\frac{\pi}{T_r}}}{1 + \frac{\pi^2}{4} T_r^2} - \frac{T_r^{\frac{5}{2}}}{4\pi^{\frac{5}{2}}} \left[1 - e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{T_r}} - \sin \sqrt{\frac{\pi}{T_r}} \right) \right] \right\} \quad (14)$$

ここに, T_r は, 交番流の周期と濃度が断面内で一様になるに要する時間の比で $T_r = T/H^2/K_z$ であらわされる。(14)式第1項は, 主流方向の乱れによる輸送項, 第2項は, 定常成分のシア効果による分散, 第3項以下は, 交番成分のシア効果による分散である。Case 2に対しては

$$D_{x,t} = K_x + \frac{8}{\pi^2} \frac{\bar{U}_a^2 H^2}{K_m} \left\{ \frac{T_r^2}{4\pi^2} \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{T_r}} \right) + \frac{2T_r^2}{\pi^4} \frac{(1 - e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \cos \sqrt{\frac{\pi}{T_r}})}{1 + \frac{\pi^2}{4} T_r^2} \right. \\ \left. - \frac{T_r^3}{1 + \frac{\pi^2}{4} T_r^2} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \sin \sqrt{\frac{\pi}{T_r}}}{4\pi^2} - \frac{T_r^{\frac{5}{2}}}{4\pi^2} \left[1 - e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T_r}}} \left(\cos \sqrt{\frac{\pi}{T_r}} - \sin \sqrt{\frac{\pi}{T_r}} \right) \right] \right\} \quad (15)$$

$$K_m = \frac{1}{T} \int_0^T K_0 |\sin \omega t| dt = \frac{2}{\pi} K_0, \quad T_r = T/H^2/K_m$$

D_x に関する関係式 (例えば (14), (15) 式) から T_r が 1 より十分大きいのか, 又は小さいかによって分散係数の極限值を求めることができる。結果は表-2 にまとめられている。定常成分が零で, 交番成分のみからなる流れの分散係数 $D_{x,t}$ がそれぞれの場合の $T_r \gg 1$ に相当する $D_{x,t} T_r \gg 1$ で無次元化し, T_r の関数として図-1 に示されている。図-1 と表-2 から次の点が明らかとなる。(1) 流れの断面形が同じならば, 無次元分散係数と T_r の関係は実質的には速度分布に無関係である。Case 1, 2, 3 と Case 4, 5 の T_r に対する無次元分散係数の差は, 断面形状の違いに起因する。(2) $T_r \gg 1$ の特性をもつ交番成分と定常成分からなる流れでは, 定常成分の平均流速と交番成分の平均速度振巾が等しくとられるならば, 交番成分のシア-効果による分散係数は, 定常成分のシア-効果による分散係数の半分である (Bowden¹⁾, Okubo²⁾)。 (3) 交番流の鉛直拡散係数が断面平均流速に比例すると仮定した場合の分散係数は, それが 1 周期にわたって一定であると仮定した場合の分散係数の $8/\pi^2$ である。

表-2 $T_r \gg 1$ および $T_r \ll 1$ の特性をもつ交番流の分散係数

Case	1	2	3	4	5
D_x $T_r \gg 1$	$K_x + \frac{\bar{U}_a^2}{30} \frac{H^2}{K_z}$ $+ \frac{\bar{U}_t^2}{60} \frac{H^2}{K_z}$	K_x $+ \frac{8}{\pi^2} \frac{\bar{U}_t^2}{60} \frac{H^2}{K_m}$	$K_x + \frac{2\bar{U}_a^2}{105} \frac{H^2}{K_z}$ $+ 0.0098 \bar{U}_t^2 \frac{H^2}{K_z}$	$K_x + \frac{\bar{U}_a^2}{48} \frac{a^2}{K_z}$ $+ \frac{\bar{U}_t^2}{96} \frac{a^2}{K_z}$	K_x $+ \frac{8}{\pi^2} \frac{\bar{U}_t^2}{96} \frac{a^2}{K_m}$
D_x $T_r \ll 1$	$K_x + \frac{\bar{U}_a^2}{30} \frac{H^2}{K_z}$ $+ \frac{\bar{U}_t^2}{4} \frac{H^2}{K_z} \left(\frac{T_r}{\pi} \right)^2$	K_x $+ \frac{2\bar{U}_t^2 H^2}{\pi^2 K_m} \left(\frac{T_r}{\pi} \right)^2$	$K_x + \frac{2\bar{U}_a^2}{105} \frac{H^2}{K_z}$ $+ \frac{9}{16} \bar{U}_t^2 \frac{H^2}{K_z} \left(\frac{T_r}{\pi} \right)^2$	$K_x + \frac{\bar{U}_a^2}{48} \frac{a^2}{K_z}$ $+ \bar{U}_t^2 \frac{a^2}{K_z} \left(\frac{T_r}{\pi} \right)^2$	K_x $+ \frac{8\bar{U}_t^2 a^2}{\pi^2 K_m} \left(\frac{T_r}{\pi} \right)^2$

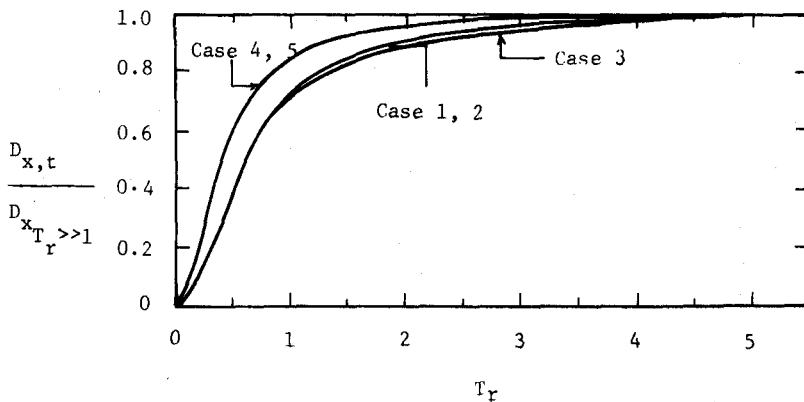


図-1 交番流の無次元分散係数と T_r の関係

任意の T_r をもつ交番流の分散係数は $D_{x,t} T_r \gg 1$ の値が求まりさえすれば, 図-1 から決定することができる。前述の知見から任意の鉛直速度分布を有する定常流の分散係数が求まると, 各瞬間に同様な速

度分布をもつ交番流の分散係数を得ることができる。Gerrard の円管内交番流の実験⁸⁾は壁付近の流速分布が指数則で表わし得ることを示した。開水路交番流に対しても指数型速度分布で表わし得るものと仮定する。すなわち

$$u = (n + 1) \bar{U}_t \left(\frac{z}{H} \right)^n \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (16)$$

鉛直速度分布が(16)式の型で表わされる定常乱流の分散係数は容易に求まるので⁷⁾、結論(2)から指数型速度分布で $T_r \gg 1$ の特性をもつ開水路と円管交番流の分散係数はそれぞれ(17)式、(18)式で与えられる。

$$D_{x,t} T_r \gg 1 = \frac{\bar{U}_t^2 H^2}{K_z} \left\{ \frac{n+1}{4(n+3)} + \frac{1}{2(n+2)(n+3)} - \frac{n+1}{2(n+2)(2n+3)} - \frac{1}{12} \right\} \quad \dots\dots (17)$$

$$D_{x,t} T_r \gg 1 = \frac{\bar{U}_t^2 a^2}{K_r} \left\{ \frac{n+2}{8(n+4)} + \frac{1}{2(n+2)(n+4)} - \frac{1}{8(n+2)} - \frac{1}{16} \right\} \quad \dots\dots (18)$$

図-1と(17)式、(18)式から指数型速度分布をもつ任意の交番乱流の分散係数を得ることができる。指数 n の値は、実験から決めるものとする。

実験結果と考察

水路は長さ14.2m、巾0.4m、高さ0.4mの矩形断面を有する銅製水路である。平均粒径2mmの一樣粒径砂が水路床にはりつけてある。流路上流端に据えつけてあるブランジャーによって交番流を発生させることができる。流路下流端の3個のゲートとwater circulating system は流路内の水面変化を最小にするようにつくられている。実験結果は、表-3にまとめられている。レーノルズ数は $Re = 4 \bar{u} R / \nu$ で定義され、 $\bar{u}$ は半周期平均の断面平均流速である。交番流の分散に最も影響する要素の1つである T_r は0.4~1.3の範囲で変化した。流速分布は水素気泡を映写機で撮影して測定した。1例として Run 5の流速分布を図-2に示す。写真(a), (b), (c)は流速加速時 $(t_0 < t/T < t_0 + \frac{1}{4})$ (d), (e)は減速時 $(t_0 + \frac{1}{4} < t/T < t_0 + \frac{1}{2})$ の流速分布である。減速時には、著しい逆圧力勾配のために境界層剥離が起っているのが見られる。同一のデータを図-3では log - log スケール紙上に示してある。図から、流速分布は近似的に指数型に従うことは明らかである。大きな n の値は、流速減少にともなう乱流強度の減

表-3 実験結果のまとめ

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Run No.	T	H	$\bar{U}_t$	$\bar{u}$	u_*	$R \times 10^{-4}$	T_r	$D_{x,obs.}$	$D_{x,t,calc.}$	$D_{x,t,calc.} \frac{D_{x,obs.}}{D_{x,t,calc.}}$
	(sec)	(cm)	(cm/sec)	(cm/sec)	(cm/sec)			(cm ² /sec)	(cm ² /sec)	
1	142	7.1	8.5	5.4	0.50	1.30	0.68	26.0	14.7	1.77
2	112	9.0	13.2	8.4	0.73	2.37	0.60	30.0	28.2	1.06
3	134	8.6	14.5	9.3	0.79	2.56	0.82	38.0	39.0	0.97
4	106	8.9	9.6	6.1	0.54	1.65	0.43	20.0	13.6	1.47
5	219	5.5	7.9	5.0	0.48	0.96	1.30	38.0	15.5	2.45
6	106	7.3	13.0	8.3	0.72	2.16	0.69	26.0	25.2	1.03
7	106	7.3	13.0	8.3	0.72	2.16	0.69	26.0	25.2	1.03
8	120	10.6	13.5	8.6	0.72	2.86	0.54	35.0	31.0	1.13
9	142	8.0	11.3	7.2	0.63	2.01	0.74	30.0	25.6	1.17
10	106	7.3	13.0	8.3	0.72	2.16	0.69	26.0	25.2	1.03
11	120	9.3	15.6	9.9	0.82	3.01	0.71	40.0	41.5	0.96
12	165	6.6	9.9	6.3	0.58	1.45	0.94	29.0	21.0	1.38

少と、流れの“層流化”に関係する。flow visualization によれば、流れの層流化は最大でも周期の15%以上には達しなかった。この比率は大きなレーノルズ数のグループに属する Run 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11では小さかった。流速分布形の詳細な検討から、(10)式によって交番流の1周期の速度分布を最も適切に表わし得る n の値は、本実験の場合には $1/4$ と $1/5$ の間にあった。各瞬間の流速分布から計算された半周期平均の断面平均流速は $1/4$ 乗則から計算された値と最大で10%程度異なった。 $1/4$ 乗則から求めた断面平均速度振巾と半周期平均断面平均流速を表-3に示す。

拡散質は濃度 4.2×10^5 ppm の塩水で水と同一挙動を示すように比重が調節されている。4本のプローブを主流又は水路巾方向に水深の $1/2$ の位置に置き濃度を時間の関数として同時測定した。一定量のトレーサーを流速零の瞬間に $x=0$ の断面で濃度が一様になる様に注入した。濃度のサンプリング間隔は0.5, 1.0, 2.0秒のいずれかで交番流の周期と実験時間から決めた。本実験では、トレーサー注入後6~7周期で、濃度が断面内でほぼ一様となりその後の濃度変化は主流方向のみであった。

正弦的に変化する流速をもつ交番流で流れの断面積、分散係数が x に無関係であるとき瞬間面源の条件に対し Holley⁹⁾ は一次元分散方程式を解いた：

$$S = \frac{W}{r A \sqrt{4\pi D_{x,t} t}} \exp \left[-\frac{\left\{ x + \frac{\bar{U}t}{\omega} (\cos \omega t - 1) \right\}^2}{4 D_{x,t} t} \right] \quad (10)$$

ここに W は注入物質の量 (gram), r は水の単位体積重量である。 $D_{x,t}$ を仮定し (10) 式から求まる濃度分布が実測濃度分布と最も一致する $D_{x,t}$ を実験的に求めた分散係数とした。実測値と $1/4$ 乗則を用いて計算した理論値を表-3に示し、理論と実測値の分散係数の比較を図-4に示す。レーノルズ数が 2.0×10^4 より大である時、理論値は実験値とかなり良い対応を示す。しかしレイノルズ数がこの値より減少するにつれて観測値は理論値よりも大きくなる。この理由として次の2つを考えることができる：

- (1) $D_{x,t}$ の理論解に粘性底層の影響を無視している。
- (2) 低流速時に流れの層流化が起る。

分散に及ぼすこれらの2つの影響は互に関係しあっていることはいうまでもない。Elder¹⁰⁾ Holley⁹⁾ は粘性底層の存在によって分散が影響されることを指摘している。Chatwin¹¹⁾ は定常流における Taylor,⁵⁾ Fischer¹²⁾ の実験結果を再整理した結果、粘性底層の影響を無視した理論では、実際の分散係数より20%程度小さめに見積ることになり、差の程度は、レーノルズ数とシュミット数に関係すると指摘している。交番流では定常流に比し同一のレーノルズ数では、拡散質が粘性底層にさらされる時間(距離)は大きく、粘性

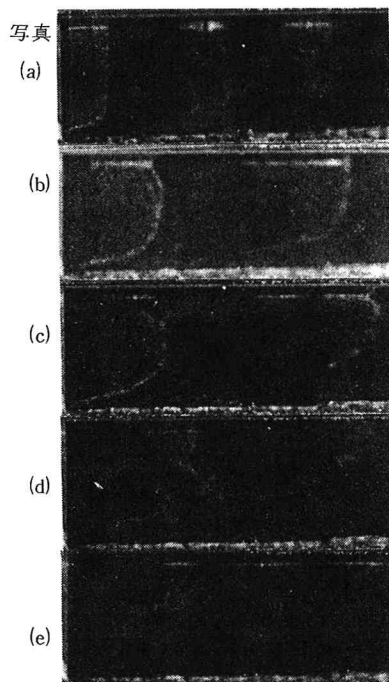


図-2 交番乱流の流速分布 (Run5)

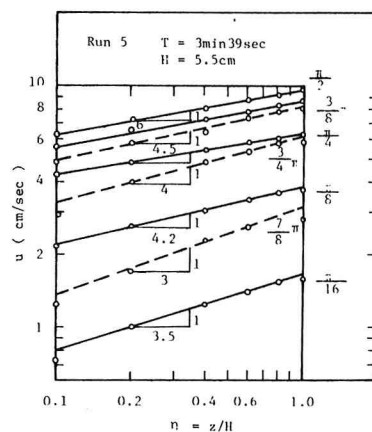


図-3 流速分布の log-log plot

底層が分散に及ぼす影響はかなり大きくなるであろうと予想される。より大きいレーノルズ数での分散実験は粘性底層と流れの層流化による影響をかなり軽減することができる。Holleyら⁹⁾の円管交番乱流中での分散実験はこの目的に適合する。実験はレーノルズ数の範囲が 1.88×10^4 から 6.1×10^4 で T_r は 3.7 と 5.9 の範囲で行なわれた。図-1から明らかなようにこの範囲の T_r の値は、実質的には $T_r \gg 1$ の特性を持つ交番流に相当する。図-4にはHolleyらの実験結果と理論値の比較も示されている。流速分布式として $1/5$ または $1/6$ 乗則が用いられる時、理論値は実測値とかなり良い一致を示す。レーノルズ数が増加するにつれて当然のことながら $1/6$ 乗則が実測値とより良い対応を示す。レーノルズ数が 3.0×10^4 以下では開水路実験と同じ理由により実測値は理論値よりも大きくなる。この範囲に対し $1/4$ 乗則から求めた値を図-4にプロットしてある。筆者とHolleyらの実験の共通レーノルズ数は 2.0×10^4 から 3.0×10^4 の範囲であり両実験の理論値と実測値の比はほぼ等しく開水路流と円管流では同等のレイノルズ数の時分散機構は相似であることを意味している。

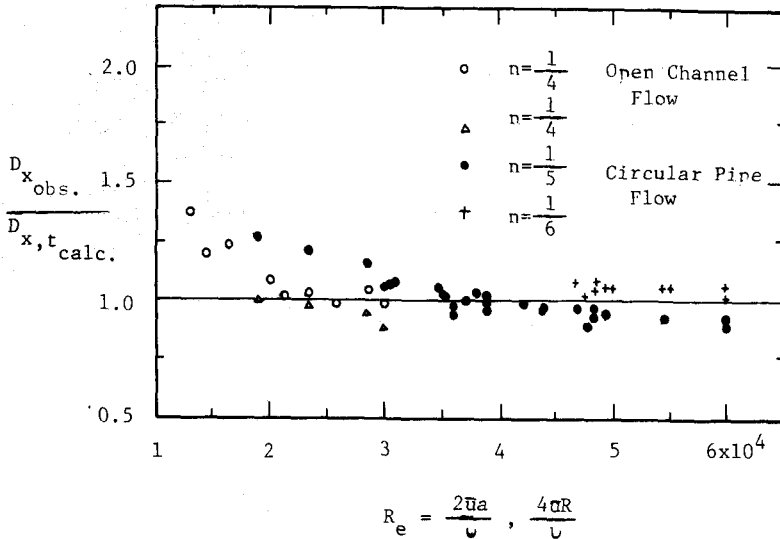


図-4 分散係数の理論値と実測値の比較

参考文献

- 1) Bowden, K. F. (1965), J. Fluid Mech., 21 Pt. 2, pp. 343-356.
- 2) Okubo, A. (1967), Int. J. Oceanogr. and Limnology, 1, pp. 194-204.
- 3) Okubo, A. (1968), J. Oceanogr. Soc. Japan, 24, No. 2, pp. 60-69.
- 4) Holley, Harleman, Fischer, (1970), J. Hy. Div. Proc. ASCE, 96, Hy. 8, pp. 1691-1709.
- 5) Taylor, G. I. (1954), Proc. Roy. Soc. London, A, 223, pp. 446-468.
- 6) Fukuoka, S. (1973), Res. Bull. C9, Dept. of Engng. James Cook Univ. Aust. 110 pp.
- 7) Fukuoka, S. (1974), Res. Bull. C12, Dept. of Engng. James Cook Univ. Aust. 112 pp.
- 8) Gerrard, J. H. (1971), J. Fluid Mech., 46, Pt. 1, pp. 43-64.
- 9) Holley, E. R. and Harleman, D. R. F. (1965), Rep. 74, Hydrodynamics Lab. MIT. 202 pp.
- 10) Elder, J. W. (1959), J. Fluid Mech. 5, Pt. 4, pp. 544-560.
- 11) Chatwin, P. C. (1971), J. Fluid Mech. 48, Pt. 4, pp. 689-702.
- 12) Fischer, H. B. (1967), J. Hy. Div. Proc. ASCE, 93, Hy. 6, pp. 187-216.