

振動流の線形安定問題

東京工業大学工学部 正会員 日野幹雄

東京工業大学工学部 正会員 ○沢本正樹

1. はじめに

複雑な乱流過程の解析は流体力学上非常に興味ある問題である。そのため種々の面から、種々の方法で実験的にも解析的にも研究がすすめられてきている。著者らは最近非定常流のうち最も基本的な円管内振動流を取り上げ、実験的にその性質をしらべ、乱れの発生、発達、減衰などの機構のよりよい理解を得ようと試みた⁽¹⁾。本研究は、この研究に引き続いて行なわれ、振動流の安定性を線形理論よりしらべたものである。

振動流の安定理論としては、最近では von Kerczek・Davis⁽²⁾のものがある。彼らは、振動流の場合の Orr-Sommerfeld 方程式を Galerkin 法を用い梁関数で展開し、二つの準定常理論と、時間に関して数値積分を行なう一つの非定常理論とを論じている。それによると有限 Stokes 層では、おそらくすべての Reynolds 数に対して流れは安定であろうと結論している。このような数値積分を用いる方法は高周波のじょう乱を扱う場合には問題があるであろう。乱流の問題ではないが、同じように振動流の Orr-Sommerfeld 方程式の安定性を論じたものに、表面波に関する Yih⁽³⁾の研究、波状底面上の境界層に関する Lyne⁽⁴⁾、日野・宇多⁽⁵⁾の研究などがある。これらは摂動法を用いているため、波数 k が大きい場合には有効でない。

本研究は、振動流について、層流状態が保たれなくなる限界はどのような場合か、どのようなじょう乱が発生するか、発生したじょう乱はどのような発達、減衰の性質をもつかを、非定常線形安定理論よりしらべたものである。対象としている流れは二平板間の振動流であり、用いている理論は二次元の安定理論である。これは主流が二次元であれば、定常流の場合の Squire の定理と同じく振動流の場合にも三次元じょう乱問題は、二次元問題へ帰着させることができるからである。支配方程式は主流が周期的に変動する場合の Orr-Sommerfeld 方程式である。じょう乱は振動成分と振幅成分の積であらわすことができ、振動成分を固有値として、振幅成分を固有関数として求める。固有関数は、時間的には Fourier 級数で、空間的には境界条件をみたす関数列で展開され、その係数の決定に Galerkin 法が用いられる。このようにして偏微分方程式系を連立一次方程式系に直し、振動成分を表わす固有値を係数行列の固有値として、固有関数を固有ベクトルとして求める。このような手法をとることにより、摂動法などに必要な $k \ll 1$ という条件は必要なくなり、また高周波のじょう乱についても一括して取り扱うことが可能となっている。

この方法をいくつかの Reynolds 数と波数の流れに適用しその結果について考察を加えた。

2. 振動流の場合の Orr-Sommerfeld 方程式

定常流にじょう乱が重なった場合の流れの安定問題の支配方程式は、Navier-Stokes 方程式をじょう乱の流関数であらわし、さらに二次の微小項を無視した Orr-Sommerfeld 方程式としてよく知られている。主流が振動流の場合にも同様の線形化で支配方程式を求めることができる。まず、じょう乱を表わす流関数 $\psi(\xi, \eta, \tau)$ を導入する。

$$\begin{aligned} u &= U + u', \quad v = v' \\ u' &= -\frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v' = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{aligned}$$

ここに ξ, η は、二平板の間隔 d で無次元化された座標で

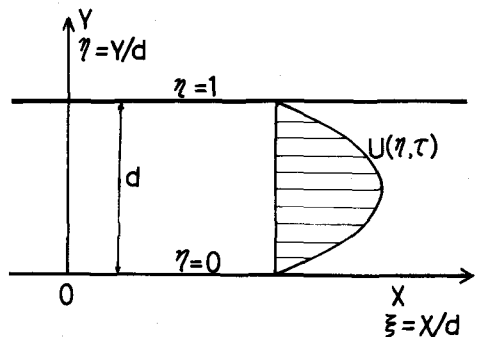


図-1 座標系

あり、流速、流関数も断面平均流速の振幅 $\hat{U}$ で無次元化したものである。時間 t については主流の角振動数 ω を用いて $\tau = \omega t$ と無次元化する。これらを Navier-Stokes 方程式に代入して二次の微小項を無視すると次の線形偏微分方程式が得られる。

$$C(L\psi)_\tau + U(L\psi)_\xi - \psi_\xi U_{\eta\eta} = \frac{1}{R_e} L^2 \psi \quad (2-1)$$

$$C = d\omega/\hat{U}, \quad R_e = \hat{U}d/\nu, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

境界条件は、

$$\eta = 0, 1 \quad \psi_\xi = \psi_\eta = 0$$

である。 C は Strouhal 数、 R_e は Reynolds 数である。式 (2-1) は線形であるから、

$$\psi(\xi, \eta, \tau) = \phi(\xi, \tau) \cdot \exp(ik\xi)$$

としても一般性は失わない。さらに、 $U(\eta, \tau)$ が、周期 2π の関数であることを考慮すると、Floquet の定理より、 $\phi(\eta, \tau)$ は、次の形であらわされる。

$$\phi(\eta, \tau) = A(\eta, \tau) \cdot \exp(i\sigma\tau)$$

ここに $A(\eta, \tau)$ は周期 2π の関数である。これらを式 (2-1) に代入すると、

$$\begin{aligned} & (A_{\eta\eta} - k^2 A) i\sigma + (A_{\eta\eta} - k^2 A)_\tau \\ & + U(A_{\eta\eta} - k^2 A) i \frac{k}{C} - U_{\eta\eta} A i \frac{k}{C} \\ & = \frac{1}{4\lambda^2} (A_{\eta\eta\eta\eta} - 2k^2 A_{\eta\eta} + k^4 A) \end{aligned} \quad (2-2)$$

となる。ここに λ は Stokes のパラメータで

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{R_e C}$$

である。境界条件は次のようになる。

$$\eta = 0, 1 \quad A = A_\eta = 0 \quad (2-3)$$

式 (2-2) が振動流の場合の Orr-Sommerfeld 方程式に相当する支配方程式であり、問題は条件 (2-3) のもとで式 (2-2) を満たす固有値 σ と、周期 2π の固有関数 $A(\eta, \tau)$ を求めることである。

3. 数値計算

式 (2-2) の近似解を求めることを考える。主流としては、二平板間の層流振動流を考えると、 U は解析的に容易に与えられ、

$$\begin{aligned} U(\eta, \tau) &= W(\eta) \cdot \exp(i\tau) + W^*(\eta) \cdot \exp(-i\tau) \\ W(\eta) &= \frac{1}{2i} \frac{\left\{ 1 - \frac{(e^{r\eta} - e^{-r\eta}) + (e^{r(1-\eta)} - e^{-r(1-\eta)})}{e^r - e^{-r}} \right\}}{\left| 1 - \frac{2(e^r + e^{-r} - 2)}{r(e^r - e^{-r})} \right|} \\ r &= \sqrt{i} \quad 2\lambda \end{aligned}$$

となる。ここに $*$ は複素共役をあらわす。

Floquet の定理より、 $A(\eta, \tau)$ は周期 2π の関数であることがわかっているから、Fourier 級数に展開することが可能である。すなわち、

$$A(\eta, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\eta) \exp(in\tau) \quad (3-2)$$

境界条件は, $\eta=0, 1$ で $A_n = \frac{dA_n}{d\eta} = 0$

となる。式(3-1), (3-2)を, 式(2-2)に代入し, $\exp(in\tau)$ の各成分ごとに整理すると, 偏微分方程式系は連立常微分方程式系になる。さらに連立常微分方程式系を解くために, 「 $A_n(\eta)$ を, 境界条件を満たす有限個の関数列で展開し, その係数をGalerkin法で決定する」という手順を採用する。すなわち,

$$A_n(\eta) = \sum_{i=1}^m B_{ni} \chi_i(\eta) \quad (3-3)$$

を常微分方程式系に代入し, その時の残差を展開関数 $\chi_i(\eta)$ と直交するように B_{ni} を決定する。具体的には, 式(3-3)を式(3-2)に代入し, さらにそれを式(2-2)に代入してから, 各項に $\chi_i(\eta)$ をかけて, $\eta=0$ から1まで積分をすればよい。以上の演算を行なうと,

$$\begin{aligned} M_1 \vec{B}_n(\sigma+n) + \frac{k}{C} M_2 \vec{B}_{n-1} + \frac{k}{C} M_3 \vec{B}_{n+1} \\ - \frac{k}{C} M_4 \vec{B}_{n-1} - \frac{k}{C} M_5 \vec{B}_{n+1} = \frac{1}{i4\lambda^2} M_0 \vec{B}_n \end{aligned} \quad (3-4)$$

となる。ここに M_0, M_1, M_2, M_4 は次のような要素をもつ $m \times m$ 元の行列で, M_3, M_5 は夫々 M_2, M_4 の複素共役である。又, $\vec{B}_n$ は $(B_{n1}, \dots, B_{nm})$ を成分にもつベクトルである。

$$\begin{aligned} M_0(I, J) &= \int_0^1 (\chi_I'' \chi_J - 2k^2 \chi_I' \chi_J + k^4 \chi_I \chi_J) d\eta \\ M_1(I, J) &= \int_0^1 (\chi_I' \chi_J - k^2 \chi_I \chi_J) d\eta \\ M_2(I, J) &= \int_0^1 (\chi_I' \chi_J - k^2 \chi_I \chi_J) W(\eta) d\eta \\ M_4(I, J) &= \int_0^1 \chi_I \chi_J W''(\eta) d\eta \end{aligned}$$

式(3-3)に, M_1 の逆行列を左からかけると, 次の式が得られる。

$$\sigma \vec{B}_n = \{M_6 - nE\} \vec{B}_n + M_7 \vec{B}_{n-1} + M_8 \vec{B}_{n+1} \quad (3-5)$$

$$M_6 = \frac{1}{i4\lambda^2} M_1^{-1} M_0$$

$$M_7 = \frac{k}{C} M_1^{-1} (M_4 - M_2)$$

$$M_8 = \frac{k}{C} M_1^{-1} (M_5 - M_3)$$

Fourier級数を有限で打ち切って, 式(3-5)をとくと, 結局

$$M \vec{B} = \sigma \vec{B} \quad (3-6)$$

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} M_6 & & \\ -(n-1)E & M_8 & \\ M_7 & M_6 & M_8 \\ & M_7 & M_6 \\ & & -(n+1)E \end{matrix}} \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} \dots \\ \vec{B}_{n-1} \\ \vec{B}_n \\ \vec{B}_{n+1} \\ \dots \end{bmatrix}$$

となる。このようにして、偏微分方程式(2-2)は、連立一次方程式(3-6)に帰着され、固有値 σ は、係数行列 M の固有値として求められる。実際の計算は、展開関数として次のものを選んだ。

$$\chi_n(\eta) = \sin^2 \pi \eta \cos(n-1) \pi \eta$$

これは、図2に示すような関数で、境界条件を満たしていることは明らかである。この関数は変形すると余弦関数のみで表わすことができ、結局この関数での展開は係数の間に制約条件をつけた Fourier 余弦展開に相当する。数値計算にあたっては東京工業大学情報処理センターの HITAC-8700 を使用した。また、固有値、固有ベクトルの計算には、東京大学大型計算機センターから公表されている「複素非対称行列」の固有値計算プログラムを利用した。

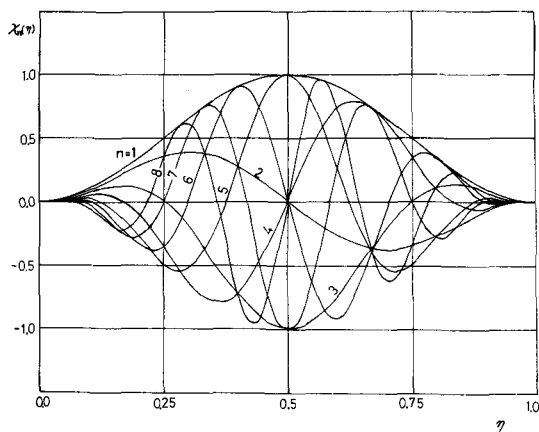


図-2 展開関数

4. 結果および考察

4-1 固有値および固有関数

$\lambda=5.0$ の場合の計算例を示す。計算にあたっての Fourier 展開は 9 項、 $\chi_n(\eta)$ の展開は 10 項である。この展開により、係数行列は 90 元となり 90 個の固有値と 90 個の固有ベクトルが得られる。得られた固有ベクトルは $\chi_n(\eta)$ の奇数項のみのものと偶数項のみのものとにわかれる。このことを利用して始めから奇数項だけの展開と偶数項だけの展開を分離して計算すると、行列の大きさを半分に減らすことができる。

計算された固有値の大きさの例は、図-3に示されている。図-3に示してあるものは σ_i が最小値となる固有値である。 σ_r の大きさは主流の振動数に比して非常に大きなものとなっており、じょう乱は非常に細かく振動することがわかる。

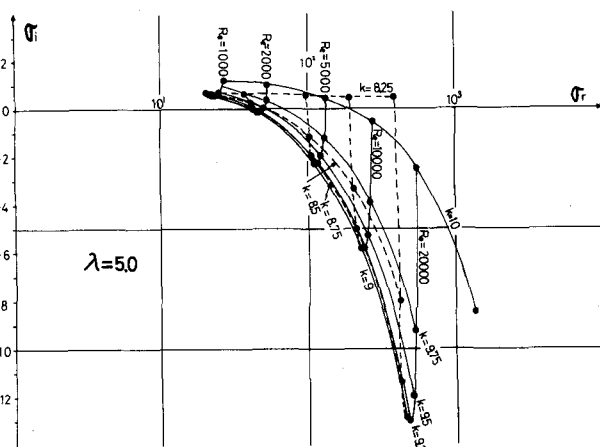


図-3 固有値の大きさ

得られた 90 個の固有値は、 σ_r がゼロのものと、そうでないものとにわけられる。 σ_r がゼロでない場合には、一つの固有値 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ に対し、それと組をなす $\sigma = -\sigma_r + i\sigma_i$ が必ず存在する。じょう乱は $\exp\{i(k\eta + \sigma_r i)\}$ という形の変動であるから σ_r が正の場合には負の進行波を、負の場合には正の進行波をあらわしている。 $(\sigma_r + i\sigma_i)$ と $(-\sigma_r + i\sigma_i)$ に対応する固有関数をしらべてみると両者はちょうど位相が π だけずれている。すなわち、順流である向きのじょう乱があらわれると、逆流時には反対方向へ進むじょう乱があらわれるわけである。その例は図-4に示してある。図-4の下の方で、実線は正の進行波型のじょう乱を、破線は負の進行波型のじょう乱をあらわしている。上の対応する主流と比較してみると、順流時に正の進行波が、逆流時に負の進行波があらわれていることがわかる。

4-2 流れの安定性

定常流の場合の流れの不安定性は、 σ_i の正負により簡潔に定義しうる。しかし、振動流の場合、じょう乱は一周の間で発達減衰をくり返し、実験的にも乱流と層流が交互にあらわれる現象が見られ⁽¹⁾、必ずしも単

純ではない。

今、じょう乱の流関数は、

$$\psi(\xi, \eta, \tau) = A(\eta, \tau) \exp(-\sigma_i \tau) \cdot \exp\{i(k\xi + \sigma_r \tau)\}$$

の形であらわされている。もし σ_i が負であるならば、流関数は必ず発散し、流れは不安定となる。von Kerczek・Davis⁽²⁾はおそらくすべての Reynolds 数で σ_i が負になることはないと推論している。しかし、今回の計算では図-3にも示すように、 σ_i はある波数、Reynolds数の範囲では負の値をとり流れは不安定となりうる。両者の差は、対象としているじょう乱の波数が大きく異なっているためである。図-5には、じょう乱の不安定特性を示してある。これによると、中立曲線は、波数 $k=9.25$ で最小 Reynolds 数 $R_\delta=1850$ となる。これは δ を用いて定義した Reynolds 数 R_δ に直すと $R_\delta=260$ となる。この値はCollins⁽⁶⁾が実験的に求めた限界 Reynolds 数160と、オーダー的にはあっている。

σ_i が負の場合には、じょう乱は全断面にわたって発達する。しかし σ_i が正の場合であっても

$$\frac{\partial}{\partial \tau} |A(\eta, \tau) \exp(-\sigma_i \tau)|$$

が正となる位相、場所があれば、じょう乱は一時的、局所的に発達する可能性がある。図-4の下の方で一点鎖線の左側では、この微分が正となることが確かめられた。すなわち、図で一点鎖線の左側では、じょう乱が一時的局所的に発達する可能性がある。この領域は主流の速度分布から見ると、ちょうど加速域と一致しており、文献(1)で述べた加速時にあらわれる速度変動と対応しているように見え興味深い。

4-3 支配方程式の各項の大きさ

図-6は、支配方程式の各項の大きさの時間的変化を示したものである。例は、図-4に示したじょう乱と同じもので $\eta=0.2$ におけるものである。図中、①は局所慣性項

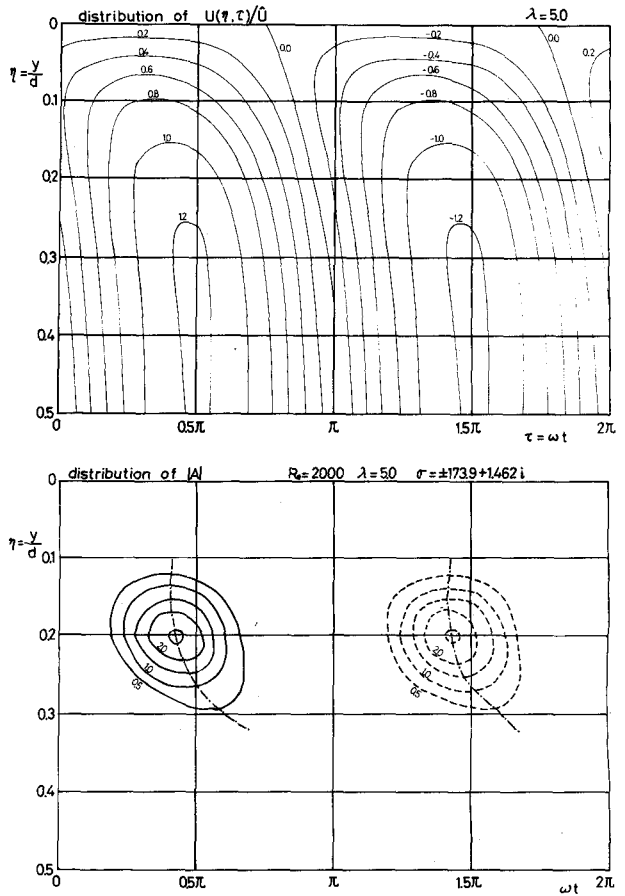


図-4 主流の流速分布(上)と固有関数の分布(下)

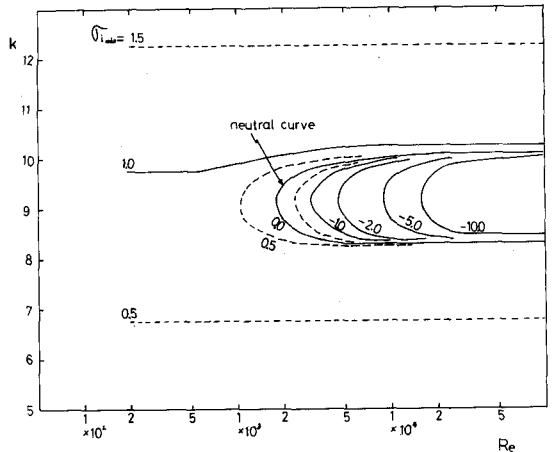


図-5 じょう乱の不安定特性($\lambda=5.0$)

②は移流慣性項のうち U のかかった項, ③は移流慣性項のうち $U_{\eta\eta}$ のかかった項, ④は粘性項, ⑤は級数展開を有限で打ち切ったことによる残差である。ここで示した計算例は $\chi_n(\eta)$ の展開10項, Fourier 展開9項であるが, 一見してわかるように, 残差は十分に小さいとはいえない。しかし定性的な議論には大過ない。計算例では, 粘性項が非常に小さい様子がよくわかる。局所的慣性項, 移流慣性項の変化は粘性効果に比べてはるかに大きい規模でおきており, このことは, じょう乱が主流からエネルギーを得て粘性により逸散するという単純な機構ばかりでなく, 主流からじょう乱へ, じょう乱から主流へという相互的なエネルギーのやりとりが存在することをうかがわせるものである。

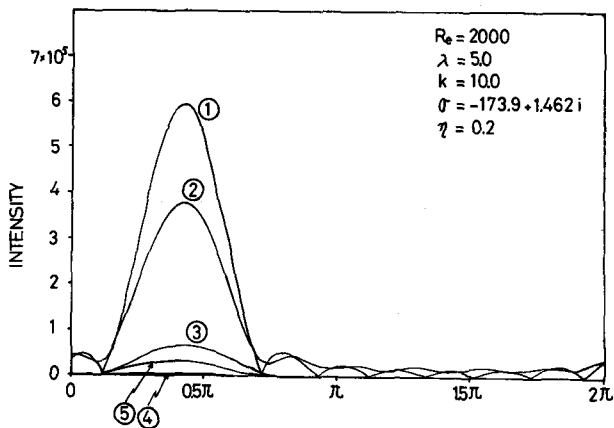


図-6 各項の時間変化

5. おわりに

本稿で示した解析法で, 二次元振動流の線形安定問題は, 短波長, 高周波のじょう乱をも含めて一括して取り扱うことが可能である。しかし, いくつかの問題点も残っている。線形安定問題に共通していることであるが, この種の解析では固有関数の分布形は求まるが, その絶対的な大きさは定まらない。じょう乱が本当に有意な大きさにまで発達するか否かは別の解析法によらなければならない。

参 考 文 献

- (1) 日野・沢本・高須, 土木学会論文報告集(投稿中), 又は, 土木学会第29回年次学術講演会, II-174, 1974
- (2) von Kerczek, C., Davis, S.H., Jour. Fluid Mechanics, Vol. 62, 1974
- (3) Yih, C-S., Jour. Fluid Mechanics, Vol. 31, 1968
- (4) Lyne, W.H., Jour. Fluid Mechanics, Vol. 50, 1971
- (5) 日野・宇多, 土木学会論文報告集(投稿中)
- (6) Collins, J.I., Jour. Geophysical Research, Vol. 68, No. 21, 1963