

有限要素・線形計画法 (Finite Element & Linear Programming Method) の考案および水系水質制御問題への応用

京都大学 工学部 学生員 二神 種弘

1. まえがき

有限要素法および線形計画法を結合させて、新しい計算手法「有限要素・線形計画法 (Finite Element & Linear Programming Method)」を考案し、流れを伴う拡散現象に支配される水系水質制御問題にその応用を試みた。本手法によって、水系を有効利用し、しかも水質規制を満足する最適な放出負荷量 (決定変数値) およびその場合の水系水質分布形態 (状態変数値) が同時に求められる。本手法において、いろいろな目的関数の設定の仕方が考えられるが、たとえば、本研究計算例のように目的関数を設定すると、目的関数は系の受け入れ可能な負荷の上限を与えることにもなるので、本手法は、水系水質制御問題のみならず、大気汚染など、いろいろな環境制御問題、環境計画、環境アセスメントおよび合理的な環境容量の算定のための有効な手段となると思われる。

なお数学的観点からは、本手法は、制約条件と目的関数を有する微分方程式系の1つの解法を与えるものであり、環境制御問題のみならず、他のいろいろな分野における時空間制御問題や最適設計への応用が期待できるとともに、有限要素法と非線形計画法を結びつけた「有限要素・非線形計画法 (Finite Element & Non-Linear Programming Method)」や有限要素法と整数計画法を結びつけた「有限要素・整数計画法 (Finite Element & Integer Programming Method)」などの可能性を与えるものと思われる。

本研究では、主として、「有限要素・線形計画法」について述べるが、同様な考え方で、差分法および線形計画法を結合した「差分・線形計画法 (Finite Difference & Linear Programming Method)」も考案したので若干述べることにする。

2. 有限要素・線形計画法

2.1 制約条件式と目的関数を有する基礎微分方程式系

以下のような制約条件式と目的関数を有する微分方程式系について考える。

$$\text{微分方程式 (狀態式)} \quad D.E. \left(x_k, \theta, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \dots \frac{\partial^n \phi}{\partial x_k^n} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{制約条件式} \quad g(x_k, \theta, \phi) \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{目的関数} \quad Z = \underset{\theta}{\text{opt}} \quad f(x_k, \theta, \phi) \quad (3)$$

ここで

$\theta = \theta(x_k)$: 決定變數 $\phi = \phi(x_k)$: 狀態變數 x_k : 座標 (x, y or z)

1 式は、たとえば、2 次元線形 2 階偏微分方程式の場合、その一般形は次式で与えられる。

$$\boxed{c_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + c_4 \frac{\partial \phi}{\partial x} + c_5 \frac{\partial \phi}{\partial y} + c_6 \phi} + \boxed{c_7 \theta} + \boxed{b} = 0 \quad (1)'$$

ϕ 關係項
 θ 關係項
定數項

したがって、問題は現象を支配する 1 式および制約条件を示す 2 式を共に満足し、3 式の目的関数を最適化する決定変数 θ を求めることとなるが、本手法では、以下に述べるように、決定変数 θ と状態変数 ϕ が同時に求められて最適制御がおこなわれる。

2.2 有限要素・線形計画法の定式化

2式で示される制約条件式および3式で与えられる目的関数の両方が、制御変数 θ および状態変数 ϕ の1次式で表現される場合には、1式に有限要素法を適用し、1～3式全体に線形計画法を適用すると、以下のようなMatrix-Vector表示による有限要素・線形計画法がえられる。

$$\begin{array}{l} \text{状態式} \\ (N \text{ 個}) \end{array} \quad \begin{bmatrix} A \\ (N \times N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ (N \times I) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_j\theta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_n \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{array}{l} \text{制約条件式} \\ (L \text{ 個}) \end{array} \quad \begin{bmatrix} G \\ (L \times N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ (L \times I) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_j\theta_i \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} {}_mB_l \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$${}_j\theta_i \geq 0, \quad \phi_n \geq 0 \quad (6)$$

$$\begin{array}{l} \text{目的関数} \end{array} \quad Z = \underset{{}_j\theta_i}{\text{opt.}} f({}_j\theta_i, \phi_n) = \underset{{}_j\theta_i}{\text{opt.}} \left(\sum_{i=1}^I {}_j\alpha_i {}_j\theta_i + \sum_{n=1}^N \beta_n \phi_n \right) \quad (7)$$

ここで

- A : 1式の状態変数 ϕ 関係項に有限要素法を適用してえられたMatrix。Galerkin法やRayleigh-Ritz法などいろいろな有限要素化によりえられる。
- E : 1式の決定変数 θ 関係項に關係してえられたMatrix。
- G : 2式の制約条件式における状態変数 ϕ に關係してえられたMatrix。
- O : 2式の制約条件式における決定変数 θ に關係してえられたMatrix。
- ${}_j\theta_i$: 決定変数、添字 i は決定変数番号を表し、添字 j は決定変数が關係する節点番号を表す。
- ϕ_n : 状態変数、有限要素の各節点における状態を表す。
- Z : 目的関数、制御変数 ${}_j\theta_i$ および状態変数 ϕ_n の1次式で表わされた関数。
- B_n : 1式の定数項を有限要素法化してえられたVector。
- ${}_mB_l$: 2式の制約条件式における定数項に關係してえられたVector、添字 l は制約条件式番号を表し、添字 m は制約条件式が關係する節点番号を表す。
- ${}_j\alpha_i$: 目的関数設定にあたり、決定変数 ${}_j\theta_i$ にかかわる係数。
- β_n : 目的関数設定にあたり、状態変数 ϕ_n にかかわる係数。
- i : $1 \sim I$ (I ; 決定変数の数、決定変数が關係する節点数)。
- n : $1 \sim N$ (N ; 状態変数の数、有限要素の全節点数)。
- l : $1 \sim L$ (L ; 制約条件式の数、制約条件が關係する節点数)。

したがって、有限要素・線形計画法は変数の数が $(I+N)$ 個、状態式の数 N 個、制約条件式の数 L 個の制御問題となる。従来の線形計画法からいえば、本手法における状態式も制約条件式となるので、変数の数が $(I+N)$ 個で制約条件式の数 $(N+L)$ 個の線形計画法になっている。4式の状態式を求めるために有限要素法を用いたので有限要素・線形計画法がえられたが、同様にして、差分法を用いた差分・線形計画法も考案した。

3. 水系水質制御問題への有限要素・線形計画法の応用

3.1 基礎偏微分方程式系

主として流れを伴う(速度項を含む)拡散現象に支配される水系水質制御問題に有限要素・線形計画法を応用する。以下のような、水質規制(制約条件式)および水系利用効用関数(目的関数)を有する流れを伴

う拡散現象の基礎偏微分方程式系を考える。

$$\begin{array}{l} \text{微分方程式} \\ \text{(状態式)} \end{array} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{2,3} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} D_{xk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - v_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) - K \phi} + \boxed{Q^c} + \boxed{Q^u} = 0 \quad (8)$$

ϕ 関係項 Q^c 関係項 定数項

$$\text{制約条件式} \quad \phi \leq \bar{\phi} \quad (9)$$

$$\phi \geq 0, Q^c \geq 0 \quad (10)$$

$$\text{目的関数} \quad Z = \text{Max. } f(Q^c, \phi) = \text{Max. } \sum Q^c \quad (11)$$

ここで

- Q^c : 決定変数 θ に相当, 制御可能負荷 (多孔ディフューザーから放出される熱負荷量やプラン
トから放出される汚濁物質負荷量など)。
- ϕ : 状態変数, 水系水質 (温度や濃度など)。
- Z : 水系利用効用関数, 一般的には, 制御可能負荷 Q^c と水系水質 ϕ の関数であり, その設定の
仕方は問題によりいろいろと考えられるが, ここでは制御可能負荷の最大化を考えてみる。
- $\bar{\phi}$: 状態変数の上限 (水質規制値など)。
- x_k : 座標 (x, y or z)。
- D_{xk} : x_k 方向の拡散係数。
- v_k : 流速 (v_x, v_y or v_z)。
- K : 減衰要素 (水面での熱交換係数や汚濁物自浄係数など)。
- Q^u : 制御不可能負荷 (不可避免的あるいは自然的発生の source or sink など)。

3.2 水系水質制御問題における有限要素・線形計画法の定式化

8～11式に先に述べた有限要素・線形計画法を適用すると, 流れを伴う拡散現象に支配される水系水質
制御問題に対する有限要素・線形計画法の定式化が以下のようにえられる。

$$\begin{array}{l} \text{状態式} \\ \text{(N個)} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc} A & E \\ (N \times N) & (N \times I) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{ \phi_n \} \\ \{ Q_i^c \} \end{array} \right\} = \{ Q_n^u \} \quad (12)$$

$$\begin{array}{l} \text{制約条件式} \\ \text{(L個)} \end{array} \quad \left[\begin{array}{c} G \\ (L \times N) \end{array} \right] \{ \phi_n \} \leq \{ \bar{\phi}_L \} \quad (13)$$

$$\phi_n \geq 0, Q_i^c \geq 0 \quad (14)$$

$$\text{目的関数} \quad Z = \text{Max. } f(Q_i^c, \phi_n) = \text{Max. } \sum_j Q_i^c \quad (15)$$

ここで

- A : 有限要素法を(8)式の ϕ 関係項に適用してえられたMatrix。簡単のため, Fig.1では
3節点三角形要素を用いているが, 実計算は6節点三角形要素を用いて有限要素法化をおこなった。
- E : 決定変数 (制御可能負荷) に関するMatrix。
- G : 制約条件式における状態変数 ϕ に関してえられたMatrix。

l : $1 \sim L$ (L : 制約条件式の数, 水質規制をうける節点の数)。

— 136 —

6. 謝 辞

本研究にあたり、著者の在職中、実社会から授けられた教育、能力や経験、および「日米温排水セミナー」でえられたことが著しく役立った。ここに関係各位に心から感謝の意を表します。本研究は、東京大学大型計算センターを利用し、同センターのプログラム・ライブラリー「HI/TC/LP02(伊倉一孝氏作成, 日立製作所改訂)」を改変し、本研究の全体プログラムの一部に取り入れさせて頂いた。

参考文献

1. Futagami, T., "Finite Element & Linear Programming Method for Water Pollution Control", 16th Congress IAHR, São Paulo, Brazil, 1975
(in Preparation)
2. 市川亀久弥, "創造性の科学 一図解・等価変換理論入門一", 日本放送出版協会, 1970
3. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science (2nd edition)", McGraw-Hill, 1971
4. Dantzig, B.G., "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, 1963
5. 原口忠次郎, "定差方程式による解法", 弾性基礎上の矩形板, 山海堂, 1964
6. 二神種弘, "有限要素法", 3・11節, 土木設計便覧, 丸善, 1974
7. 二神種弘, "数値解析(差分法・補間法)", 1・9節, 土木設計便覧, 丸善, 1974
8. Courant, R., Hilbert, D., "Methoden der Mathematischen Physik I", Springer Verlag, 1968
9. Smith, I.M., Faraday, R.V. and O'Conner, "Rayleigh-Ritz and Galerkin Finite Elements for Diffusion Convection Problems", Water Resources Research, June 1973
10. 川原睦人, 大阪一, 見浦安治, "自然対流の有限要素法による数値解析", 第18回水理講演会講演集, 1974
11. Koh, R.C.Y., Brooks, H.N., List, J.E., Wolanski, J.E., "Hydraulic Modeling of Thermal Outfall Diffusers for the San Onofre Nuclear Power Plant", W.M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, January 1974
12. Iwasa, Y., and Yatsuzuka, M., "Spread of Heated Waters from Multi-port Diffusers"
13. Wada, A., "Study on Prediction Method of Simulation Analysis for Diffusion of Discharged Warm Water"
14. Tamai, N., "Dispersion Models in Coastline Waters with Predominant Transverse Shear"
(12~14 papers presented at U.S.-Japan Joint Seminar on Engineering and Environmental Aspects of Heat Disposal, April 1974)
15. Fourier, B.J., "Théorie Analytique de la Chaleur" 1822
16. 川井忠彦, "これからの有限要素法", 有限要素法に関する講習会 — T.H.H. Pian 教授をむかえて — テキスト, 日本鋼構造協会, 1974
17. 小山昭雄, "線型計画入門", 日経文庫, 1967