

変分法による降雨－流出の決定論的解析

山梨大学工学部 正 員 荻原 能男

山梨大学大学院 学生員 ○ 河西 基

1. まえがき

洪水流出は、極めて複雑な発生機構をもっている。このため、数多くの研究成果が発表され、幾種もの流出モデルが提案されているにも拘らず、今なお水文学の主要テーマの一つを占めている。

最近の降雨－流出系に関する研究の動向としては、水理学（力学）的手法を用いて流出現象を解明しようとする立場と、情報理論に拠る確率統計的解析により系の特性を明らかにしようとする立場の二つに大別される。後者は、特に電子計算機の急速な発達に負うところが大きいが、いずれも従来の記述的な方法から解析的な方法への移り変りを示すものであり、この両面を融合しようとする研究も行われている。¹⁾

本研究は、降雨－流出の関係を変分問題に帰着させることにより、流出核を数学的に導き出す解析手法を示したものであり、Unit Hydrograph の本質を解明することが一つの目的である。この方法によれば、数学的に統一的に述べることができ、全系的な把握に有効である。また、与える関数形（汎関数）に物理的意味づけも可能である。変分原理は、最適化問題などに広く応用されているもので、水文現象にも多くの導入が見られ、汎用性が高い方法である。

水文現象の複雑さはその非線型性に起因するとされ、非線型系の解明に現在の研究の力点が注がれている。本論文では、線型系と仮定した場合の線型応答関数（流出核）を理論的に求め、その応用例も合わせて示し、さらに非線型系へ拡張することを提案している。

2. 変分問題への還元

線型応答関数を用いて降雨・流出の関係を記述すると、次のようなたみこみ積分

$$Q(t) = f \int_0^\infty h(\tau) \cdot R(t-\tau) d\tau \quad (1) \quad \int_0^\infty h(\tau) d\tau = 1 \quad (2)$$

（ $Q(t)$ ；時刻 t における流出量、 $R(t)$ ；同時刻の流域総雨量、 $h(\tau)$ ；線型応答関数、 f ；流出係数）として表わされる。ここにおける流出核は、ブラックボックスの立場において通常用いられるものであって Unit Hydrograph に相当し、単位図法はその代表的なものである。

著者らは、このようなブラックボックス 的モデル化という操作を行わずに、変分原理に基づき決定論的解析手法を用いて、数学的に応答関数形が得られることを示した。

2-1 汎関数の与え方

一般に汎関数は、降雨強度 $R(t)$ を既知関数（入力）、流出量 $Q(t)$ を未知関数（出力）と考えれば、

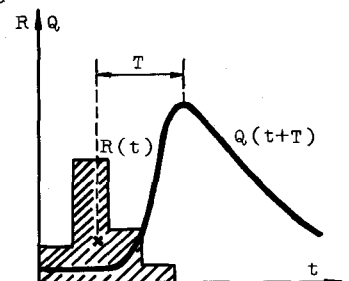
$$I[Q(t)] = \int_0^\infty F[Q(t), R(t)] dt \quad (3)$$

として与えることができる。ここでは、降雨・流出現象を、流出係数 f と遅滞時間 T の2つのパラメータを用いて取り扱い、汎関数を

$$I[Q] = \int_0^\infty \{Q(t+T) - f \cdot R(t)\}^2 dt \quad (4)$$

のように仮定して、これを最小化する変分問題とする。

2-2 汎関数の物理的意義



図－1

貯留関数法においては、流域貯水量を $S(t)$ 、流出量を $Q(t)$ 、流入量を $R(t)$ 、おくれ時間を T 、流出係数を f として、連続の条件から次式が成立する。

$$f \cdot R(t) - Q(t+T) = dS(t)/dt \quad (5)$$

式(4)の右辺被積分項は式(5)より、貯留量の時間的変化を二乗したものであることがわかる。すなわち、汎関数 I は、貯留量の時間的変化の大きさを、考えている系の時間について積分したものとして評価される。したがって、この変分問題は、流域への流入量に対して遅滞時間(T)だけ遅れた流出量が貯留効果を最小にして流れ出るように、系を選ぶ問題に帰着する。ただし、比較的理想化された表面流出を取り扱うものとする。このような条件を満足する停留関数は次のようにして求めることができる。

3. 線型系の理論解

3-1 Euler-Lagrange の微分方程式

まず、式(4)において、 $Q(t+T)$ を Taylor 展開すると、汎関数は

$$I[Q] = \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^i}{i!} D^i Q(t) - f \cdot R(t) \right\}^2 dt \quad (D^j; \text{微分演算子 } d^j/dt^j) \quad (6)$$

となる。 T 及び f を定数、 $D^j Q(t)$ ($j=0, 1, \dots, n$) を比較関数として、汎関数 I の第一変分をとると

$$\delta I[Q] = 2 \int_0^\infty F \cdot \delta Q \cdot dt + 2 \cdot T \int_0^\infty F \cdot D Q \cdot dt + 2 \cdot \frac{T^2}{2!} \int_0^\infty F \cdot D^2 Q \cdot dt + \dots + 2 \cdot \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty F \cdot D^{n-1} Q \cdot dt \quad (7)$$

$$F = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^i}{i!} D^i Q(t) - f \cdot R(t) \quad (8)$$

である。ここに、 δ はそれぞれの変分を表わす。式(7)において、さらに部分積分を行なうとまとめると

$$\frac{\delta I[Q]}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty \frac{(-T)^k}{k!} D^k F \cdot \delta Q(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{T^k}{k!} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j [D^j F \cdot \delta D^{k-j-1} Q(t)]_0^\infty \right\} \quad (9)$$

のようになる。ゆえに、汎関数 I を極値にする停留関数が満足すべき Euler-Lagrange の微分方程式は

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-T)^k}{k!} D^k \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^i}{i!} D^i Q(t) - f \cdot R(t) \right\} = 0 \quad (10)$$

である。この式は、Quimpo の論文で紹介されている可分性を仮定した貯留関数法に関する微分方程式の形式と一致するものである。一般に、系を上式のような微分方程式で表わした場合の履歴特性は、その方程式の階数とおくれ時間 T によって支配される。また、実際の流出系は、本質的には無限次のおくれをもつ現象とされているので、理論的には、式(10)の n を大きくすることがその収束性を高めるものとする。ここで、式(9)の第2項からは、自然境界条件として次式が与えられる。

$$\left[\sum_{j=1}^{n-k-1} \frac{T^{j+k}}{(j+k)!} (-1)^{j-1} D^{j-1} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^i}{i!} D^i Q(t) - f \cdot R(t) \right\} \right]_0^\infty = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-2) \quad (11)$$

上式は、対象としている積分領域(時間)の初めと終りでの貯留水量の変化がないという条件を示すものである。ただこの際、上の境界条件は変分問題には必要としない。

3-2 線型応答関数と Unit Hydrograph

式(10)を t について Laplace 変換し、変換後のパラメータを s から S 、また $L\{R(t)\} = \bar{R}$ とすると、次式のようになる。

$$L\{Q(t)\} = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=m}^{n-1} \frac{n!}{j!} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{T^k}{(k-m)!} S^{k-j} D^{j-1} Q(0) + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=m}^{n-1} \frac{T^j}{j!} S^{j-m} D^{m-1} Q(0) + \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{T^{k+m}}{k!} S^{j+k} D^{m-j-1} Q(0) + f \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-TS)^m}{m!} \bar{R}(t) - f \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} S^{m-j} D^{j-1} R(0) \div \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(TS)^{j+m}}{j!} \quad (12)$$

さらに、式(12)において逆 Laplace 変換をほどこすと、オイラーの方程式(10)を満足する理論解 $Q(t)$ の式が得られる。これにより、汎関数 I を最小化する変分問題の停留関数として、 $Q(t)$ の関数形が決定された。式(12)において、降雨 R に関係する項は第4項のみであり、他の項は、流量・

降雨の初期値に関係するものであるので、第4項のみに注目して逆 Laplace 変換をとる。n=2、3、4 としたとき得られた結果は次式のとおりである。

$$\begin{cases} n=2; Q = f \int_0^t \frac{1}{T} e^{-\tau/T} R(t-\tau) d\tau \\ n=3; Q = f \int_0^t \frac{2}{T} e^{-\tau/T} \sin(\tau/T) \cdot R(t-\tau) d\tau \\ n=4; Q = f \int_0^t \frac{1}{T} \left\{ 1.476 e^{-1.591\tau/T} + e^{-0.702\tau/T} (0.780 \sin \frac{1.807}{T} \tau - 1.476 \cos \frac{1.807}{T} \tau) \right\} R(t-\tau) d\tau \end{cases} \quad (13)$$

ここに、 n ; $Q(t+T)$ の Taylor 展開次数 である。

上式はいわゆる流出関数法に対応しているが、流出関数法が応答関数形を仮定して記述するのに対して、本方法はある程度の物理的説明がなされる汎関数を選び、変分原理に基づいて応答関数を導き出すものである。f と T のパラメータにより流域特性を表現することもでき、数学的な理論展開によって系統的に降雨-流出の関係式が決定されることは有意義であると考ええる。さて式 (13) からそれぞれの式に

おける線型応答関数の波形を図-2に示した。この線型応答関数が、Unit Hydrographに相当することは周知のとおりである。実測値との比較については後述する。図-2を見ると、n=2のときが指数曲線のなす減速曲線であり、n=3、4 と n が大きくなるにしたがい、たち上りが滑らかになるとともに Sine Curve 的振動が顕著な曲線となる傾向を示している。この中では、n=3のとき応答関数の波形が比較的一般の単位図に近い結果となっている。しかしながら、h(τ) 曲線の減速部において負の値が表われていて、物理現象としては不自然である。⁴⁾ n ≥ 0 なる条件を加えて改善する方法もあるが、n が大きくなるにしたがって h(τ) がある曲線に収束するものと考えられる。いずれにしても、上述の不自然さは、式 (13) を得るにあたって、式 (12) の第4項のみで評価した影響とも考えられ、検討を要する問題である。

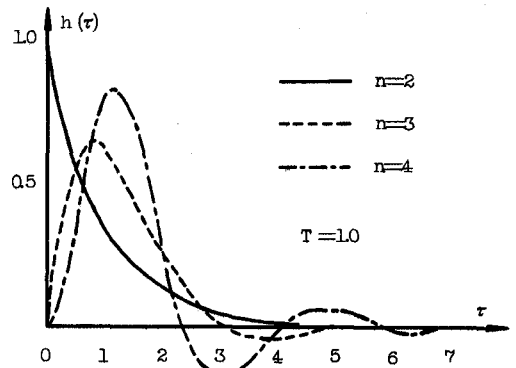


図-2 線型応答関数

4. 非線型系への拡張

流出解析が困難なことの大きな要因として、現象の非線型性があげられる。非線型性にはさまざまなものがあるが、実用的には“線型近似できる非線型系”として取り扱う場合が多い。

本論文では、式 (4) あるいは式 (6) において、遅滞時間 T を流出量 Q の関数とし、流出係数 f を流域総雨量 R の関数とすることにより非線型系への拡張を試みた。理論展開は、線型系の場合と同様に行えばよい。

4-1 汎関数とオイラーの方程式

式 (6) において、T を Q の関数、f を R の関数として書き改めることにより、汎関数を

$$I[Q] = \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^i(Q)}{i!} D^i Q(t) - f(R) \cdot R(t) \right\}^2 dt \quad (D^j; \text{微分演算子 } d^j/dQ^j) \quad (14)$$

のように選ぶ。前節と同様に、 $D^j Q(t)$ ($j=0, 1, \dots, n$) を比較関数として汎関数 I の第一変分を取り、オイラーの方程式を得るためにさらに部分積分を行なうと、次式のようになる。

$$F = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T^j(Q)}{j!} D^j Q(t) - f(R) \cdot R(t) \quad (15) \quad \text{として、}$$

$$\frac{\delta I[Q]}{2} = \int_0^\infty \left[F \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{D} T(Q) \cdot \frac{T^{i-1}(Q)}{(i-1)!} D^i Q(t) + \sum_{i=1}^{n-1} D^i \left\{ F \cdot (-1)^i \frac{T^i(Q)}{i!} \right\} \right\} \delta Q dt \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{k-1} \left[D^{k-1} \left\{ \frac{T^j(Q)}{j!} \cdot F \right\} \cdot \delta D^{j-k} Q(t) \right] \right]_0^\infty \quad (16)$$

ここに、 $\widetilde{D}^j$ は微分演算子であり、 d^j/dQ^j を意味する。

さて、 $Q(t)$ が停留関数のとき $\delta I = 0$ であるから、式(16)の第1項より Euler-Lagrange の微分方程式は

$$F \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{D} T(Q) \cdot \frac{T^{i-1}(Q)}{(i-1)!} D^i Q(t) + \sum_{i=1}^{n-1} D^i \left\{ F \cdot (-1)^i \frac{T^i(Q)}{i!} \right\} \right\} = 0 \quad (n \geq 2) \quad (17)$$

となり、自然境界条件として次式が与えられる。

$$\left[\sum_{i=k}^{n-1} D^{i-k} \left\{ (-1)^{i-k} \frac{T^i}{i!} F \right\} \right]_0^\infty \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (18)$$

上の2式のもつ性格については、3-1において既に述べられている。そこで、解を与える微分方程式(17)の具体例として、 $n=2$ 及び3のときの場合を次に示しておく。

$$\begin{cases} n=2; T(Q) D^2 Q(t) + \widetilde{D} T(Q) \cdot \{ D Q(t) \}^2 - Q(t)/T(Q) + f(R) \cdot R(t)/T(Q) - D_{**} f(R) \cdot D R(t) \cdot R(t) - f(R) \cdot D R(t) = 0 \\ n=3; F \cdot \left[1 + 2 T(Q) \cdot \widetilde{D} T(Q) \cdot D^2 Q(t) + \{ \widetilde{D} T(Q) \cdot D Q(t) \}^2 + T(Q) \cdot \widetilde{D}^2 T(Q) \{ D Q(t) \}^2 \right. \\ \left. - \{ T(Q) - 2 T(Q) \cdot \widetilde{D} T(Q) \cdot D Q(t) \} \cdot D F + \{ T^2(Q)/2 \} \cdot D^2 F \right] = 0 \end{cases} \quad (19)$$

ここに、 D_{**} ; 微分演算子 d^j/dR^j とする。

これらが、変分問題を解くことによって得られた降雨一流出の関係を表わす微分方程式である。前節で得られたオイラーの方程式が線型常微分方程式で、比較的解き易いのに対して、式(17)、式(19)は当然のことながら非線型常微分方程式で、低次なものでも複雑な式を解かねばならない。したがって電子計算機による数値計算に頼らざるを得ないと考える。本論文でも、数値積分を行なうことにより解を求めてみた。この数値解の例については、次の節で述べることにする。

4-2 関数としての T と f について

本節においては汎関数を選ぶにあたり、おくれ時間 T と流出係数 f がそれぞれ Q と R の関数として与えられることを前提としている。よって、実際に計算値を求める場合に、 $T(Q)$ 及び $f(R)$ の関数形を決める必要がある。しかしながら、一般にこれらのパラメータは、流域特性、降雨あるいは出水の規模、季節等の種々かつ複雑な要素に関連するものであり、関数形として一義的に表わすことは困難であると思われる。そこで、本論文では、次のようにして便宜的に関数形を仮定して次節の計算に用いることにした。まず、おくれ時間 T は、図-3のような通減曲線で表現できると考え、次式に関数形を仮定した。

$$T(Q) = \alpha (Q + r)^\beta + \zeta \quad (20)$$

ここに、 α 、 β 、 r 、 ζ は任意定数であり、流域特性などに合わせて適当な数値を選ぶ。

また、流出係数 f については、図-4のような1に漸近する曲線を考え、次式で表わせると仮定してみた。

$$f(R) = \frac{R}{R + \eta} \quad (\eta; \text{任意定数}) \quad (21)$$

ただし、 T 、 f は物理的に明確な意味をもつ値ではないから、実測や公式によって決められた値を用いて関数形を仮定することになる。充分に T と Q 、あるいは f と R のデータがあれば、最小二乗法によって定係数 α 、 β 、 r 、 ζ 、 η を決めればよい。

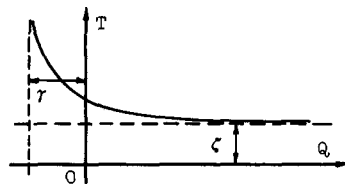


図-3 $T(Q)$ の関数形

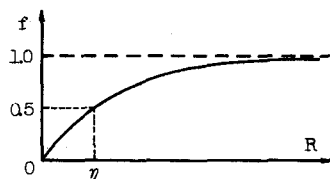


図-4 $f(R)$ の関数形

実際に式 (19) を数値積分した結果については、次の節でまとめて述べることにする。

5. 実測値との比較および考察

本研究室では、昭和43年より甲府市下積翠寺の梓川流域を対象として、降雨量と流量の観測を続けている。この流域は、流域面積約 0.40Km^2 で南南東に面し本流の平均こう配が $1/4.7$ 、流路延長が約 770m の小流域であり、比較的水もちが良く、下流部落の簡易上水道の水源地にもなっている。ここでは、これら過去に得られた観測資料および解析資料を用いることにより、線型および非線型系それぞれの理論計算値と実測値との比較をしてみた。

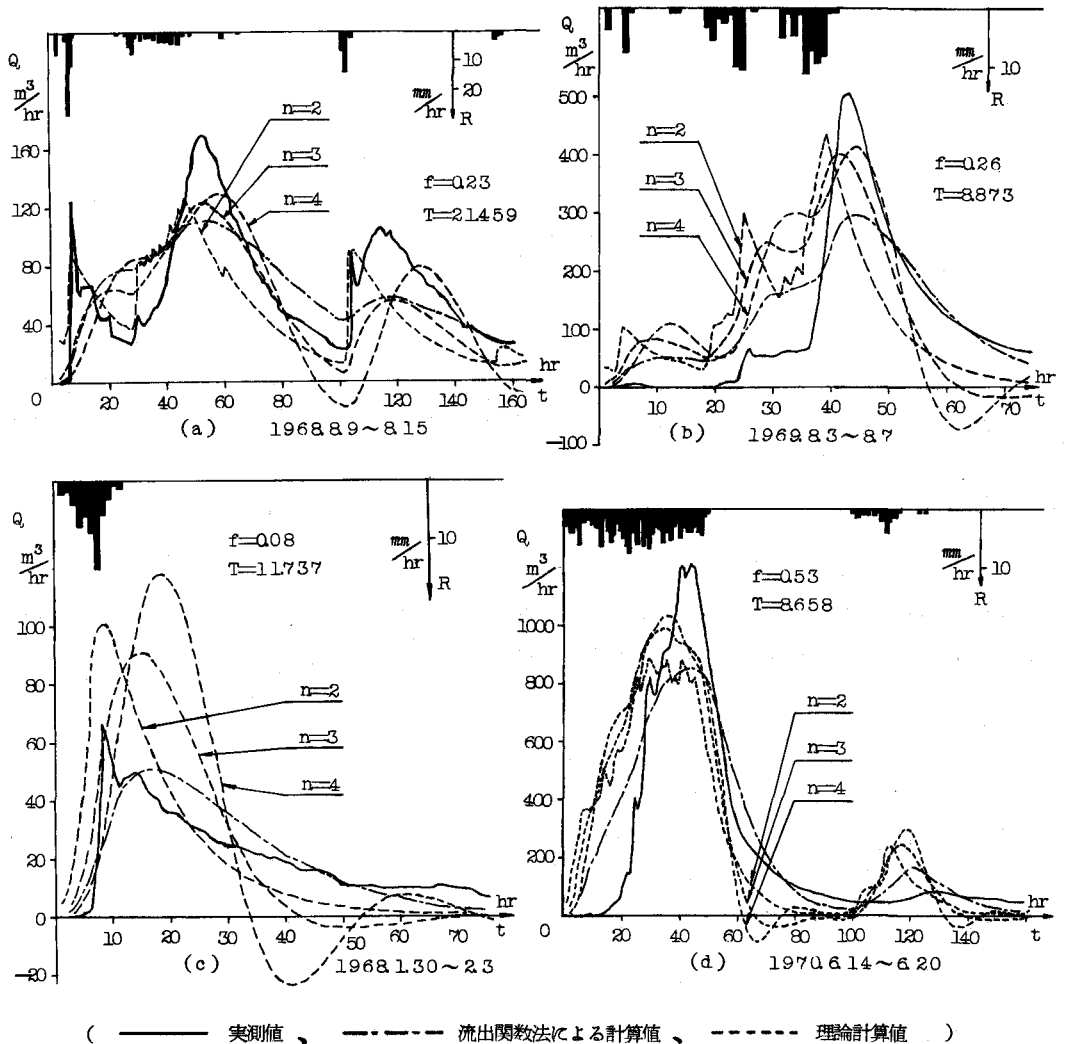


図-5 実測値との比較

5-1 線型流出系のHydrograph

図-5は、過去の研究資料から定数 f と T を決め、実際に入力データを式 (13) に input させて流出量を計算し、実測値及び佐藤・吉川・木村の流出関数法による計算結果とを比較したものである。前述の Unit Hydrograph (図-2) で現われた逡減部に負の値をとる影響が出て、流量が負となる物理的に

不自然さが残されていることがこれから読みとれるなど、よく一致しているとは言えない。しかしながら、流量のピーク量を比較的良好に表わして、また(a)図の $n=2$ の場合のように急激な流出の特徴を非常によく表わすこともできた。このように、特別に応答関数形を仮定することなく、数学的に一義性のある方法で導き出して応答関数を得ることにより流出現象を把握することができた。

5-2 非線型流出系のHydrograph

前節でも述べたように、式(19)は非線型常微分方程式であり、本論文ではRunge-Kutta法及びRunge-Kutta-Gill法を用いて数値解を求めることにした。 $T(Q)$ および $f(R)$ の関数形については、4-2の仮定にしたがい、実測データをもとにしてそれぞれの係数を図-6中の様に定めた。入力としては、流域全体にわたり1時間に1mmの降雨が3時間継続した場合を用いた。この結果、得られた計算流出量から描いたHydrographは図-6であり、良好な結果を得るに至らなかった。ここでは、 T を Q 、 f を R の関数として1つの曲線形式に仮定してみたが、さらに検討を加える必要がある。

5-3 単位図についての若干の考察

図-5では、図-2で表わされる線型系としての3つの応答関数を用いた計算結果と実測値とを比較している。このことから、いわゆる一般的なUnit Hydrographの考え方に対し、次のような考慮が必要であることを付記する。すなわち、Unit Hydrographがおくれ時間と降雨継続時間あるいは初期値などに影響して異なるものと思われる。日野はUnit Hydrographに対して種々検討を加え問題点を明確にした。⁶⁾

6. まとめ

本研究は、流出現象という本質的に複雑なことがらに対して、変分原理に基づく数学的なアプローチを提案したものである。この方法によれば、複雑な流出現象の統一かつ一般的な理論展開が可能となり、Unit Hydrographの考え方を明確にする一つの有効な手段になると考える。本論文では、線型系とそれを非線型系に拡張した場合について論じた。線型系については一応の成果と実用性が得られたと考える。しかしながら、非線型系に関しては現段階において良好な結果を得ておらず、今後の研究と理論の確立を待つことにする。

最後に、本論文の作成にあたり協力いただいた小林哲郎技官、相原真樹、栗山修両君はじめ研究室の各位に深く感謝する次第であります。

参考文献

- 1) 日野幹雄：流出の非線型性について—流出現象の質的理解への寄与— 第16回水理講演会、pp105~110、Feb. 1972
- 2) Rafael G Quimpo: United States-Japan Bilateral seminar in hydrology, Jan. 1971
- 3) 四俣、吉川：水資源の最適計画に関する基礎的研究(その2)、昭47年度研究報告書、Mar. 1973
- 4) 応用水理学下II：丸善pp81~133
- 5) 荻原、砂田、小林：第8回自然災害科学総合シンポジウム、pp103~106 Oct. 1971
- 6) 例えば1)の文献
- 7) 高木不折：土木学会論文報告集、1974. 7月 pp23~28

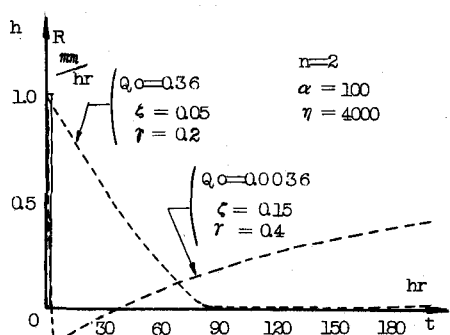


図-6 Unit Hydrograph (非線型)