

カルマン・フィルターによる洪水予測の二・三例

東京工業大学 工学部 日野 幹雄

建設省 石川 和秀

東京工業大学 大学院 矢戸 達行

1. はじめに

制御工学・システム工学の理論は、同じ工学の分野でありながらわれわれ水理学を専攻するものにはかなり異質のものに感じられる。それは、水理学なり流体力学は物理学の一分野として自然現象の根本原理・基礎機構の解明を基本として成立しているのに対し、制御理論は人為による秩序の組織を目指していることにある。

このように多分に異質な性格をもつ学門分野も互に無関係ではあり得ず、「環境汚染制御」の必要性の高まりとともに両分野の交渉は一段と深まりつつある。われわれは、この数年間制御工学における Kalman filter 理論を応用して洪水のオンライン予測や大気汚染制御の問題を研究して来た。こうした研究過程を通じて、制御理論を自然現象の分野に持ち込む場合単に機械的に制御理論を応用するのでは必ずしも望ましい結果を得ることは難しく、自然現象の基本的メカニズムの理解が制御理論の適用に欠かせないものであるとの認識を深めるに到った。

本論文は、洪水予測を例として如何に自然理解が制御理論の適用に有用であるかを示そうとするものである。

2. On-line予測の必要性

洪水流出の予測は、単位図法や貯留関数法をその代表例として種々の方法がある。最近では確率過程理論の導入により、より精度の高い信頼しうる方法が確立されている。にもかかわらず、洪水時の刻々の降雨量や流出量の観測値を用いて、洪水の On-line 予測の必要性が認識されるようになって来た。それは次のような理由によるものである。

- a) 流域の流出特性（例えば有効降雨率）は一定のものではなく、季節によりまた antecedent precipitation 等の水文学的要因により異なる。
- b) 流域特性は自然的ないしは人為的要因により変化するから、過去のデータによる単位図がそのまま使用しうるとは限らない。
- c) 降雨は流域に一樣とは限らず、ある場合には上流側に片寄り、ある場合には逆に下流域に強くなる。また、降雨域の移動などの現象も考慮されなければならない。

このように降雨特性や流域の特性が一定ではなく、洪水毎に異なるとすれば、その時点時点での最新の情報を活用して洪水予報の精度を向上させる必要性は理解されよう。最も信頼できる情報とは、現時点での実際の流量と過去のデータに基づく予測との誤差である。これまでの洪水予測法ではこうした認識が十分でなかったと思われる。このような観点から著者らは、近代制御理論の代表的理論である Kalman filter の自然系への応用について研究をすゝめ、二三の結果を発表して来た。

さて、人間の設計になる機械系電気系と自然系との大きな差異は、前者においては系の特性（システム・パラメータ）が確定的であるのに対し、後者の場合には系の特性が未定であるか、確率的に変動し、システム・パラメータの推定が必要であるという点である。近代制御理論のシステム構成は、極めて特異である。すなわち、システムをシステムそのものと、システムの観測系とに分けて考える。それゆえ、われわれの観測値には必然的に観測の誤差が伴うという点が考慮されるのみならず、 n 次元のシステムの状態の一部のみが観測しうるといふ点が考慮されている。このように、システムの一部の（誤差を伴う）観測値からシステムの全状態を推定しようとする理論構成は自然系を対象とする場合に、特に有効である。しかし、Kalman

理論が本来システム観測の誤差の方を重視し、この誤差の影響を除去したシステムの状態推定という考え方に立っているから、システム・パラメータの不確定性の強い自然系への応用に際しては工夫を要する。

カルマンの filtering 理論は、次のように要約される。時刻 k ($t=k\Delta t$)におけるシステムの状態 (n 次元ベクトル) $x(k)$ は、システム方程式(1)により記述される。

$$x(k)=\Phi(k|k-1)x(k-1)+w(k) \tag{1}$$

また、システムの状態は観測系を通して $z(k)$ (m 次元ベクトル、 $m\leq n$)として観測される。

$$z(k)=M(k)x(k)+v(k) \tag{2}$$

ここに、 $w \cdot v$ はそれぞれ n 次元、 m 次元の攪乱・誤差ベクトルである。このとき、システムの真の状態の最適推定値 $\hat{x}(k|k)$ は次のように与えられる。

$$\hat{x}(k|k)=\Phi(k|k-1)\hat{x}(k-1|k-1)+K(k)\{z(k)-M(k)\Phi(k|k-1)\hat{x}(k-1|k-1)\} \tag{3}$$

ここに、

$$K(k)=P(k|k-1)M^T(k)[M(k)P(k|k-1)M^T(k)+R(k)]^{-1} \tag{4}$$

$$P(k|k-1)=\Phi(k|k-1)P(k-1|k-1)\Phi^T(k|k-1)+Q(k-1) \tag{5}$$

$$P(k|k)=[I-K(k)M(k)]P(k|k-1) \tag{6}$$

ここに、 K は Kalman gain と呼ばれ、最も信頼しうる情報 z の予測と実測との誤差に関する荷重である。

また、 Q, R はそれぞれシステム雑音 w および観測系雑音 v の variance matrix である。

洪水流出系 (より一般的には自然系)への適用にあたっては、われわれの推定したいのはシステムの状態そのものよりも、むしろシステムの特性であるから、システム方程式を書き直して (仮想的な) システム・パラメータ系に関する観測方程式とみなす必要があることはすでに前論文に述べた通りである。すなわち、流量を $q(k)$ 、降雨を $r(k)$ 、単位図の縦座標を $h(i)$ とするとき、流出方程式は

$$\begin{aligned} q(k) &= h(1)r(k-1)+h(2)r(k-2)+ \dots + h(m)r(k-m) \\ &= [r(k-1) \ r(k-2) \dots \dots \ r(k-m)] \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(m) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

であるが、ここで

$$\begin{aligned} z(k) &\leftarrow q(k) \\ M(k) &\leftarrow [r(k-1) \ r(k-2) \dots \dots \ r(k-m)] \\ x(k) &\leftarrow [h(1) \ h(2) \dots \dots \ h(m)]^T \end{aligned} \tag{8}$$

とみなせば、式(7)はシステム・パラメータ $h(i)$ に関する観測方程式となり、kalman 理論を適用することができる。

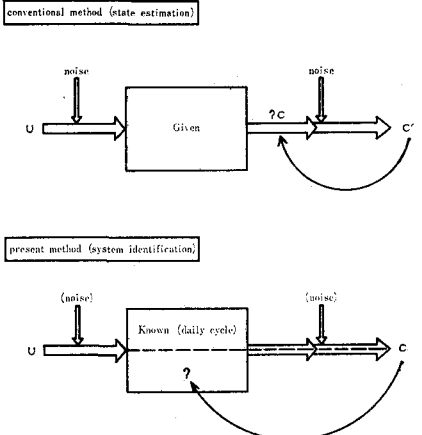
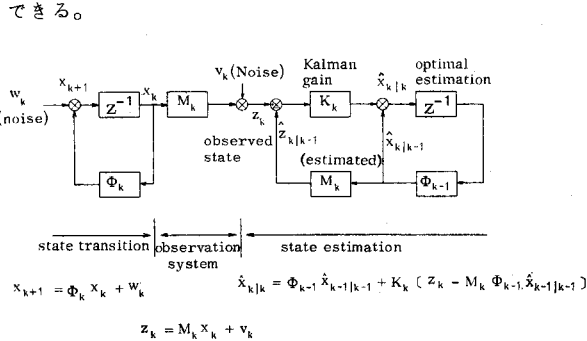


図 - 1

3. kalman filtering による洪水予測の問題点

これまでの著者らの種々の試みから、kalman filtering 理論を適用し、洪水流出系のパラメータ推定を行う場合に、次のような問題点のあることが認識されるに致った。

1) 洪水流出系を単位図法—単位降雨応答曲線—により表現する場合、一般に洪水の継続時間は、流出計算の時間単位に較べてかなり長いので、単位図を表わすための関数値 $h(\tau_i)$ ($i=0, 1, \dots, I$) の数—したがって同定すべきシステム・パラメータの数はかなり多くなる。この場合にはたゞ単に filtering 計算の次元が増加し online 予測に不利であるにとゞまらず、各時刻で観測される状態は流量たゞ一つに過ぎないため、システム・パラメータが仲々真値に収束しない。例えば、経験的には考えられない単位図形となつたり（極大値が3つあるとか）、 h_i が負の値をとつたりする。もつともこの場合でも同定されたシステム・パラメータによる同時刻推定流量は真値に近い値を与える。

2) 他方、システム・パラメータの数を少なくするために微分形式のシステム方程式

$$q(k) = \alpha_1 q(k-1) + \alpha_2 q(k-2) + \dots + \alpha_n q(k-n) + \beta_1 r(k-1) + \beta_2 r(k-2) + \dots + \beta_n r(k-n) \quad (9)$$

を用いると、流量 q の項の影響が大きく流量予測は外挿的性格を強くする。その結果、同定されたパラメータによる流量予測を行うと予測時間ステップが長くなると洪水上昇期では予測洪水量が極端に増大してしまう。

図-2はこのような例の一つである。この場合、 $m=3$ $n=3$ としているが、一時間ステップ先の予測については、ほゞ良好な結果を与えるが、予測のステップ数が2時間、3時間と大きくなるにつれて、外挿予測の性格が強くなり、ピーク流量は大きく出現時刻は遅れる。

なお、次の2ケース

- (i) 回帰予測とフィルターによる予測
 - (ii) 回帰予測とフィルターによる予測（降雨データなし）
- についての例を図-3、4に載せる。

4. 微積分型二成分法による洪水予測

a) 流出の推定法には良く知られているように次のような方法がある。

単位図法：流出推定の代表的方法は、単位の降雨に対する流出応答（単位流出図 Unit—hydrograph と呼ばれる）を用いて降雨 $r(t)$ による流出は次のように表すものである。

$$q(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) r(\tau) d\tau \quad (10)$$

貯留関数法：一方、流出を表現するもう一つの代表的方法に貯留関数法がある。

$$\frac{dS}{dt} = r(t) - q(t) \quad (11)$$

$$S(t) = f_n\{q(t)\}$$

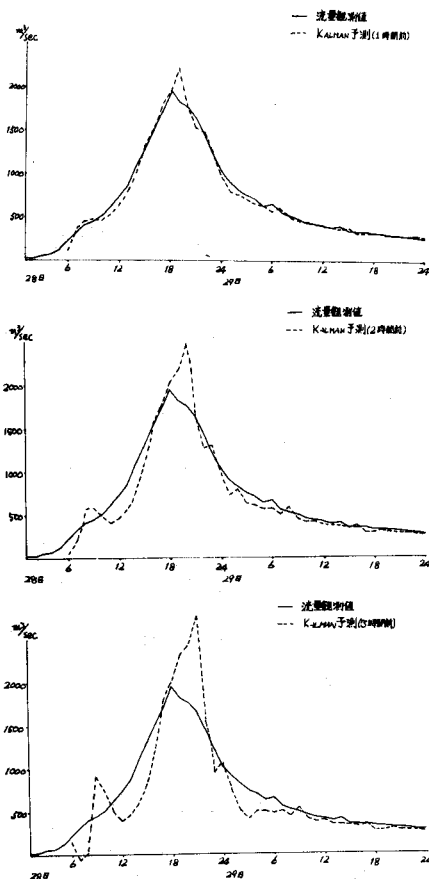


図-2

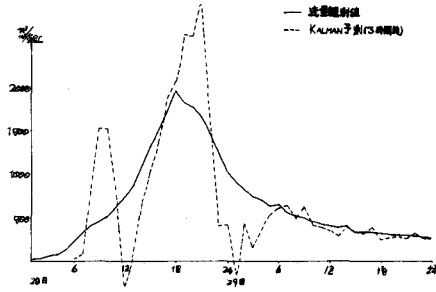
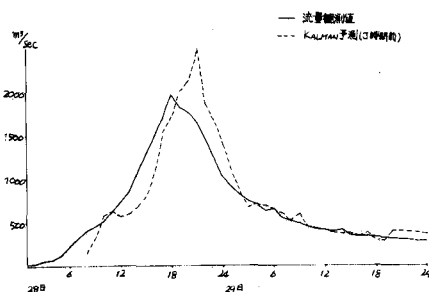
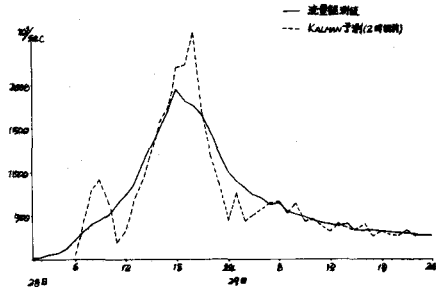
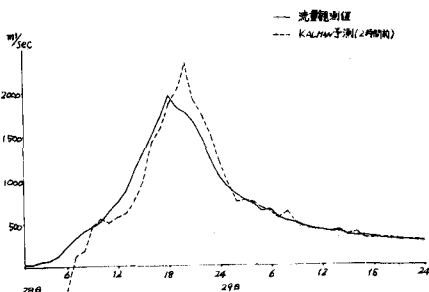
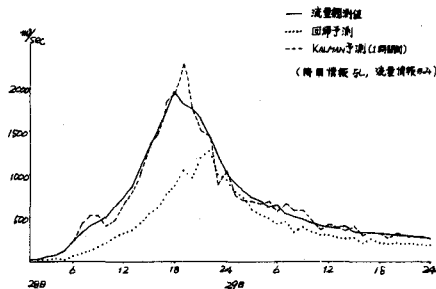
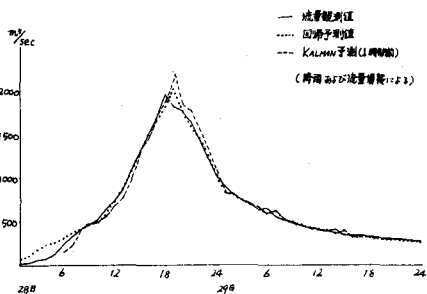


図 - 3

図 - 4

もし、 $S(t)=aq(t)$ とおけば式(1)は $q(t)$ に関する線形微分方程式となる。

一般化された微分表示：一般化された微分形式の流出方程式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{d^m q}{dt^m} + a_{n-1} \frac{d^{m-1} q}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{dq}{dt} + a_0 q \\ = \frac{d^n r}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r \end{aligned} \quad (2)$$

b) 微積分二成分系による表示：ここに新たに、次のような方法を提案する。

先にも指摘したように制御理論を応用するに際しては、単に機械的にこれらの理論を適用するのではなく現象の特性や物理機構の理解が不可欠である。さて単位図を思い直してみよう。この曲線は一般に単純で素直な形をしている。しかし、これを微分形式で数式的に表示しようとするとき単位図のピークを y 越すまでの前半部は微分の階数は高くならざるを得ず、むしろデュアメル型の積分形式が簡単である。一方、単位図の逓減部は単純で、低い階数の微分で表示することが可能である。それゆえ、ある時点の流量についても、単位図のピーク流量の出現時刻 t_p よりやや大きい $t_m (> t_p)$ を界にして、単位図の前半に相当する流量と後半の部分による流量に分割して表示しよう。

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \int_0^{\infty} r(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
 &= \int_0^{t_m} r(t-\tau)h(\tau)d\tau + \int_{t_m}^{\infty} r(t-\tau)h(\tau)d\tau
 \end{aligned} \quad (13)$$

すなわち、ある時点での流量 $q(t)$ を2つの成分 $q_1(t)$ と $q_2(t)$ に分割する。 $q_1(t)$ には比較的近い降雨による流出分で、Unit-hydrograph の極大値付近より τ の小さい部分による流出成分でデュアメル型の積分式で表示するのが適当である。

$$q_1(t) = \int_0^{t_m} r(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (14)$$

一方 $q_2(t)$ は単位図の逓減部分による流出で比較的早い時刻の降雨による流出成分である。

$$q_2(t) = \int_{t_m}^{\infty} r(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (15)$$

$q_2(t)$ はデュアメル型積分式よりも、微分形式で表現する方が適切である。もし、 $\frac{dq_2}{dt} = \alpha q_2(t)$ ならば $q_2(k+1) = e^{-\alpha \Delta t} q_2(k)$ 。式(13)より $q_2(t)$ は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
 q_2(t) &= \int_{t_m}^{\infty} r(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{t-t_m} h(t-\tau)r(\tau)d\tau
 \end{aligned}$$

右辺の積分を次のように分割する。

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_m}^{t_m+\Delta t} r(t-\tau)h(\tau)d\tau + \int_{t_m+\Delta t}^{\infty} r(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
 &= \int_{t_m}^{t_m+\Delta t} r(t-\tau)h(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t'-\Delta t-t_m} r(\tau)h(t-\tau)d\tau
 \end{aligned}$$

式の右辺の第2項は $\int_{-\infty}^{t'-\Delta t-t_m} h(t-\tau)r(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t'+\Delta t-t_m} h(t'+\Delta t-\tau)r(\tau)d\tau$ となる。単位図の逓減部に等比的減衰 $h(t+\Delta t) = \alpha h(t)$ の関係を確認すると

$$\int_{-\infty}^{t'-\Delta t-t_m} h(t'+\Delta t-\tau)r(\tau)d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{t'-t_m} h(t'-\tau)r(\tau)d\tau = \alpha q_2(t) = \alpha q(t'-\Delta t) \quad \text{となる。} \quad (17)$$

したがって

$$q_2(k) = \alpha_1 q_2(k-1) + \alpha_2 q_2(k-2) + \dots + \alpha_n q_2(k-n) + r(k-m)h(m)\Delta t$$

となる。結局、 $q(k)$ は次のようになる。

$$q(k) = \alpha_1 q_2(k-1) + \alpha_2 q_2(k-2) + \dots + \alpha_n q_2(k-n) + h_1 r(k-1) + \dots + t_m r(k-m) \quad (18)$$

c) Multiple-use による情報の増加

式(8)はシステム方程式であり、われわれの場合これを書き替えてシステム・パラメータの観測方程式とする。しかし同定すべき多くのパラメータに較べて観測量 (= 流量) は一つという欠点を補うために、流量の過去の観測値もくりかえし使用し、次式のように式(8)を変形する。

$$q(k) = M(k)x(k) \quad (\text{システム・パラメータの } x \text{ の観測方程式}) \quad (19)$$

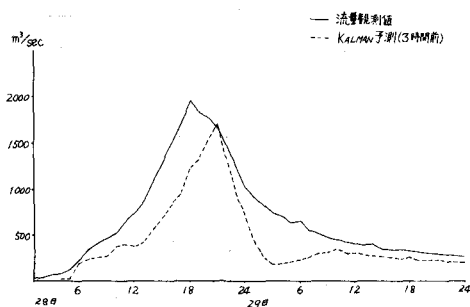
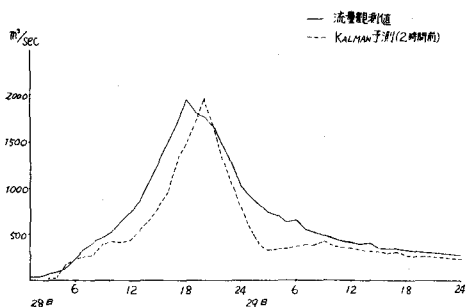
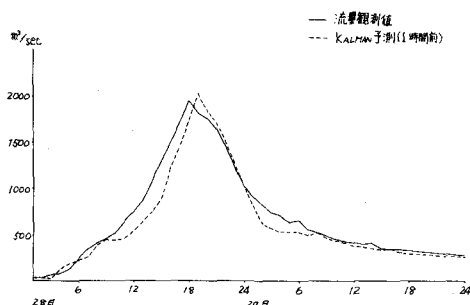
こゝに

$$q(k) = \begin{bmatrix} q(k) \\ q(k-1) \\ \vdots \\ q(k-\ell) \end{bmatrix} \quad (\text{観測量}) \quad x(k) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \quad (\text{システム・パラメータ}) \quad (20)$$

$$M(k) = \begin{bmatrix} q_2(k-1) & q_2(k-2) & \cdots & r(k-1) & r(k-2) & \cdots & r(k-m) \\ q_2(k-2) & q_2(k-3) & \cdots & r(k-2) & r(k-3) & \cdots & r(k-m-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_2(k-\ell) & q_2(k-\ell-1) & \cdots & r(k-\ell) & r(k-\ell-1) & \cdots & r(k-m-\ell+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_2(k-1) \\ q_2(k-2) \\ \vdots \\ q_2(k-\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(k-1) \\ q(k-2) \\ \vdots \\ q(k-\ell) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r(k-2) & r(k-3) & \cdots \\ r(k-3) & r(k-4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ r(k-\ell-1) & r(k-\ell-2) & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h \end{bmatrix}$$

図-5に二・三の適用例を示す。



参 考 文 献

- 1) Kalman, R.E. : A new approach to linear filtering and prediction problems, J. Basic Eng., Trans. ASME, Ser. D., vol. 82, 35-45 (1960)
- 2) 日野 幹雄 : カルマンの予測推定理論の平易な誘導について, 東工大・土木工学科研究報告, №15, (1973)
- 3) Jazwinski, A.H. : Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press (1970)
- 4) Hino, M. : On-line Prediction of hydrologic system, Proc. IXth IAHR, Istanbul (1973)
- 5) 日野 幹雄 : 水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, №221, 1月 (1974)
- 6) 日野 幹雄, 森 義一, 吉川信二郎 : カルマン・フィルターによる大気汚染の予測, 土木学会論文報告集, №224, 4月 (1974)
- 7) 日野 幹雄 : 因子分析・回帰分析およびカルマン・フィルターによる環境汚染の予測, 文部省特定研究「環境汚染制御」昭和48年度研究報告書, P137~144, 3月 (1974)
- 8) 日野 幹雄 : カルマン・フィルターと多変量解析を組み合わせた確率過程の予測法, 土木学会論文報告集, №228, 8月 (1974)