

水文時系列解析における detection process

北海道大学工学部 正員 藤田睦博

1 緒 論

水文時系列解析における時間単位は、解析の目的及び時系列の特性により決定されるものであろう。しかし常に任意の時間単位の水文資料を入手できるわけではない。特に小時間単位の水文資料を必要とする場合に問題となる。又同一の時間単位の水文量であっても、日界等を変更すると最大値は異なるであろう。

時間単位 T の水文量は、処理時間 T の平滑化処理された系列を時間 T 毎にサンプリングしたもので、連続的不規則信号をサンプリングした離散的信号とは異なる。したがって detection process として大きな時間単位の水文量から、小時間単位の水文量の推定の可能性がある。

本論文は、与えられた水文時系列より更に小時間単位の時系列の推定法について考察し、2, 3 の実測の降水量系列を用いて吟味した。

2 不規則信号の平滑化処理と自己相関係数

一般に信号 $x(t)$ の平滑化は、次式で表わせる。

$$g_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (2.1)$$

水文時系列の場合、(2.1)式の核関数は、図2.1(a), (b)に示す矩形パルスである。すなわち

$$P_T(\tau) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \tau \leq T \\ 0 & \tau < 0, \tau > T \end{cases} \quad (2.2)$$

又は

$$P_T(\tau) = \begin{cases} 1/T & 0 \leq \tau \leq T \\ 0 & \tau < 0, \tau > T \end{cases} \quad (2.3)$$

したがって(2.2)式の核関数は、和をとる操作を示し、(2.3)式は平均を求めることを示している。

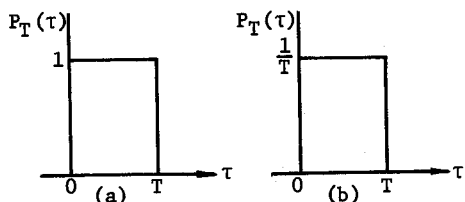


Fig.2.1 Smoothing function

一方水文時系列は、離散的系列であり図2.2に示

すインパルス列 $\delta_T(t)$ を変調波とする $g_T(t)$ の被変調波 $g_T^*(t)$ として定義できる。

$$g_T^*(t) = g_T(t) \delta_T(t) \quad (2.4)$$

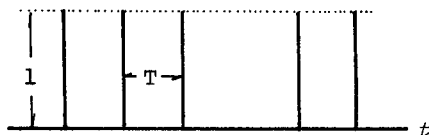


Fig. 2.2 Unit impulse series

水文時系列の detection process としては、(2.4)式で与えられる $g_T^*(t)$ 系列よりもとの信号 $x(t)$ を求めるものでなく、離散的系列を求めるものである。したがって(2.1)式の $x(t)$ を離散量で定義すると、 $g_T(t)$, $g_T^*(t)$ に相当する系列は、(2.2)の $P_T(\tau)$ を用いると

$$g_i = \sum_{k=1}^n x_{i+k-1} \quad (2.5)$$

$$g_i^* = \sum_{k=1}^n x_{(i-1)n+k} \quad (2.6)$$

すなわち g_i 系列は、 x_i 系列の重複する和の系列、 g_i^* 系列は重複しない和の系列である。

一方 x_i 系列が定常な系列である時、この自己相関係数と重複しない和の系列である g_i^* 系列の自己相関係数との関係は、すでに S. kotz, J. Neumann¹⁾ によって研究されている。すなわち x_i 系列の平均値、分散を μ , σ^2 とすると g_i^* 系列について

$$\begin{aligned} E\{g_i^*\} &= \mu_{g^*} = n\mu \\ \text{Var}\{g_i^*\} &= \sigma_{g^*}^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{i,j} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\rho_{i,j}$ は、 x_i 系列の自己相関係数でその定常性より

$$\rho_{i,j} = \rho_{|i-j|} = \frac{E\{x_i x_j\} - \mu^2}{\sigma^2} \quad (2.8)$$

又 g_i^* 系列の自己相関係数 $\rho_{g^*,i}$ は

$$\rho_{g^*,i} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{l=i+1}^{n(i+1)} \rho_{|k-l|}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \rho_{|k-l|}} \quad (2.9)$$

次に g_i 系列についても同様の計算をすると

$$E\{g\} = \mu_g = n\mu \quad (2.10)$$

$$\text{Var}\{g\} = \sigma_g^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{i,j}$$

又 g_i 系列の自己相関係数 $\rho_{g,i}$ は

$$\rho_{g,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=i+1}^{n+i} \rho_{|k-l|} / \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \rho_{|k-l|} \quad (2.11)$$

(2.9), (2.10) 式より g_i , g_i^* 系列の自己相関係数には、次式の関係式が成立する。

$$\rho_{g,i} = \rho_{g^*,ni} \quad (2.12)$$

(2.12) 式は、detection process を考える場合極めて重要な式となる。

3 定常ランダム系列の detection process

水文時系列の detection process としては、(2.6) 式の g_i^* 系列が与えられて、 x_i 系列を推定する場合に相当しよう。今 $n = 2$ とし、 x_i 系列のサンプルサイズを $2N$ とすると g_i , g_i^* 系列は

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= x_1 + x_2 \\ g_2 &= x_2 + x_3 \\ &\vdots \\ g_i &= x_i + x_{i+1} \\ &\vdots \\ g_{2N-1} &= x_{2N-1} + x_{2N} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1^* &= x_1 + x_2 \\ g_2^* &= x_3 + x_4 \\ &\vdots \\ g_i^* &= x_{2i-1} + x_{2i} \\ &\vdots \\ g_N^* &= x_{2N-1} + x_{2N} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

(3.1) 式において g_i 系列が既知であると、未知数 $2N$ 個、条件式 $(2N-1)$ 個で他にもう 1 個独立な条件式を与えると解析的に x_i が求まる。しかし実際には g_i^* 系列のみが既知なので

$$g_{2i-1} = g_i^* \quad (3.3)$$

すなわち g_i 系列の奇数項のみが既知で、 N 個の条件式が不足している。この不足する条件式を g_i , g_i^* の両系列の自己相関係数を用いて補う。 g_i^* 系列が既知なので、その自己相関係数の推定値は

$$\hat{\rho}_{g^*,k} = \frac{1}{(N-K)\sigma_{g^*}^2} \sum_{i=1}^{N-K} (g_i^* - \mu_{g^*})(g_{i+k}^* - \mu_{g^*}) \quad (3.4)$$

一方 (2.12) 式より g_i 系列の自己相関係数は

$$\hat{\rho}_{g,K} = \hat{\rho}_{g^*,2K} \quad (3.5)$$

したがって $\rho_{g^*,k}$ より補間が可能であれば、 $\hat{\rho}_{g,k}$ を推定できる。(3.1) 式より g_i 系列の自己相関係数の推定値は

$$\hat{\rho}_{g,K} = \frac{1}{(2N-1-K)\sigma_g^2} \sum_{i=1}^{2N-1-K} (g_i - \mu_g)(g_{i+K} - \mu_g) \quad (3.6)$$

(3.6) 式で $K = 2m-1$ とおくと

$$\hat{\rho}_{g,2m-1} = \frac{1}{2(N-m)\sigma_g^2} \sum_{i=1}^{2(N-m)} (g_i - \mu_g)(g_{i+2m-1} - \mu_g) \quad (3.7)$$

(3.7) 式右辺の g_i 系列は、(3.3) 式より

$$\left. \begin{aligned} i=2l \quad g_{i+2m-1} &= g_{2(l+m)-1} = g_{l+m}^* \\ i=2l-1 \quad g_i &= g_{2l-1} = g_l^* \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

したがって (3.5) 式が成立しているので、 $\hat{\rho}_{g^*,k}$ から $\hat{\rho}_{g,k}$ を線形補間により推定できると (3.7), (3.8) 式より g_i 系列の未知である g_{2l} は、 $\hat{\rho}_{g^*,k}$ と線形関係におくことができる。この場合未知数は、 $g_2, g_4, \dots, g_{2(N-1)}$ の $(N-1)$ 個である。しかし条件式の数を $(N-1)$ 個用意できない場合が、一般的であろう。ここでは、最短右側インバース法によりその近似解を求める。この手法は、次式で $n > m$ の時近似解を得る一手法で $\mathbf{X}$ の最短解 (Minimum Norm Solution) を求めるものである。

$$\mathbf{F}\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (3.9)$$

$\mathbf{F}$: $m \times n$ の係数マトリックス

$\mathbf{X}$: n 元の未知数の列ベクトル

$\mathbf{Y}$: m 元の数値項の列ベクトル

最短解 $\mathbf{X}^0$ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{X}^0 = \mathbf{F}^T (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{F}^0 \mathbf{Y} \quad (3.10)$$

(3.5) 式における g_{2l} 系列を $\mathbf{X}$ ベクトルとして近似解である最短解 $\mathbf{X}^0$ を、求めることができる。これで g_i 系列は、全て既知となり (3.1) 式に再び最短右側インバース法を適用すると x_i 系列の近似解を得ることができる。

4 シミュレーションした系列による detection process の計算例

3章に述べたように水文時系列の detection process は、条件式の不足する連立1次方程式の解を求めることに帰着する。ここでは、まず最短右側インバース法による解の精度について簡単にふれる。

100個の $[0, 10]$ の矩形乱数を発生させて、この乱数系列を $(3 \cdot 1)$ 式の x_i とし、 $g_1, g_2, \dots, g_m$ を求める。この g_i 系列より x_i 系列を求めてみる。この時未知数は、条件式より1個多く、 $(3 \cdot 9)$ 式の F は、 $m \times (m+1)$ のマトリックスになる。

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}} \right\} m \quad (4.1)$$

したがって $(3 \cdot 10)$ 式に示されるマトリックス F^0 は

$$F^0 = \frac{1}{m+1} \begin{pmatrix} m & -(m-1) & (m-2) & \cdots & -2 & 1 \\ 1 & (m-1) & -(m-2) & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 2 & (m-2) & \cdots & -2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & \cdot & \cdots & (m-1) & 1 \\ 1 & -2 & 3 & \cdots & -(m-1) & m \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

表4・1は、 x_i 系列を求めた結果の1例である。第1欄には発生させた x_i 系列の値、第2, 3, 4欄には、発生させた100個の x_i 系列の最初から10, 20, 30個までとって g_i 系列を求めて、 $(4 \cdot 2)$ 式により x_i 系列の推定値 $\hat{x}_i$ を求めたものである。表に示されているように推定誤差は、 m が定まると各項ともその絶対誤差が等しい。又 $(3 \cdot 1)$ の条件式は、完全に成立しており、最短右側インバース法による解が detection process に極めて適合していることを、示している。図4・1は、未知数 $(m+1)$ と絶対誤差の関係を図示したものである。このように最短右側インバース法による近似解法は、精度の高い手法であることがわかる。

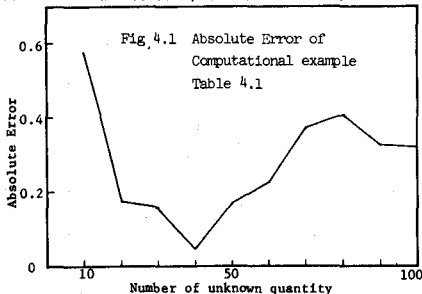


Table 4.1 Computational example by Minimum Right Inverse

i	x_i	$\hat{x}_i$			g_i
		$m=9$	$m=19$	$m=29$	
1	1.440	2.018	1.267	1.599	5.363
2	3.922	3.345	4.097	3.764	5.589
3	1.667	2.244	1.492	1.825	3.538
4	1.871	1.294	2.045	1.713	6.365
5	4.494	5.071	4.320	4.652	12.994
6	8.500	7.923	8.674	8.341	16.615
7	8.115	8.692	7.941	8.273	17.186
8	9.071	8.494	9.245	8.913	13.933
9	4.862	5.439	4.687	5.020	7.848
10	2.987	2.409	3.161	2.829	4.194
11	1.207		1.033	1.365	4.998
12	3.791		3.965	3.632	11.555
13	7.765		7.591	7.923	16.931
14	9.166		9.340	9.008	18.455
15	9.289		9.115	9.448	10.227
16	0.938		1.112	0.780	5.613
17	4.675		4.501	4.833	9.746
18	5.071		5.246	4.913	12.029
19	6.958		6.783	7.116	8.630
20	1.672		1.846	1.514	4.985
21	3.313			3.471	8.299
22	4.986			4.828	10.044
23	5.058			5.216	8.459
24	3.401			3.243	11.050
25	7.649			7.808	17.093
26	9.444			9.286	10.130
27	0.686			0.844	10.469
28	9.783			9.625	17.689
29	7.905			8.064	13.133
30	5.228			5.070	

次に x_i 系列が相互に従属している場合の計算例として、 x_i 系列に1次マルコフモデルを適用してその detection process を試みた。

$$x_i = \rho x_{i-1} + \sqrt{1-\rho^2} \epsilon_i \quad (4.3)$$

ϵ_i は、平均値0、分散1の正規乱数で、 $\rho = 0.6$ として100個の x_i 系列を発生させた。発生させた x_i 系列の平均値、分散の理論値との比較を、表4・2に示す。資料数が少なく理論値とは若干異なっているが、次式はほぼ成立している。

$$\mu_g = \mu_{g^*} \quad \sigma_g^2 = \sigma_{g^*}^2 \quad (4.4)$$

Table 4.2 Comparison of theoretical value with simulated value

	simulated value	theoretical value
μ	-0.31324	0
σ^2	0.88276	1
μ_g	-0.63534	0
σ_g^2	2.70677	3.2
μ_{g^*}	-0.62648	0
$\sigma_{g^*}^2$	2.75179	3.2

$(3 \cdot 1)$ 式より求まる g_i 系列の自己相関係数は $(2 \cdot 1.1)$ 式において $\rho_i = \rho^i$ と置く

$$\rho_{g,i} = \begin{cases} \frac{\rho(\rho^{n-i} - 2\rho^i + \rho^{n+i}) + (n-i)(1-\rho^2)}{n(1-\rho^2) + 2\rho(\rho^n - 1)} & (i \leq n) \\ \frac{\rho^{i+1}(\rho^n/2 - \rho^{n-i}/2)}{n(1-\rho^2) + 2\rho(\rho^n - 1)} & (i > n) \end{cases} \quad (4.5)$$

又(2.9)式において $\rho_i = \rho^i$ とおくと S.kotzらの導いた結果と一致し次のようになる。

$$\rho_{g,i}^* = \frac{\rho(p^n/2 - p^{-n/2})^2 \rho^{in}}{n(1-\rho^2) + 2\rho(\rho^n - 1)} \quad (i \geq 1) \quad (4.6)$$

図4.2は、(3.4)、(3.6)式で求まる $\hat{\rho}_{g,k}^*$ 、 $\hat{\rho}_{g,k}$ 及び(4.5)式の $\rho_{g,i}$ の計算結果を示す。

lagが大きくなると推定誤差が大きく理論値との適合性はよくない。しかしここで問題となることは、理論値との適合性ではなく、 $\hat{\rho}_{g,k}$ と $\hat{\rho}_{g,k}^*$ が十分な精度で(2.12)式を満足していることである。 $\hat{\rho}_{g,2i+1}$ を $\hat{\rho}_{g,i}^*$ 、 $\hat{\rho}_{g,i+1}^*$ より直線式で補間し、(3.8)式でmの最大値を25として最短右側インバース法で求めた未知数 g_{2i} の推定値 $\hat{g}_{2i}$ と、発生させた x_i 系列より直接求めた g_{2i} を図4.3に示す。未知数が条件式より不足するdetection process としては、ほぼその波形を再現しているものと思う。 g_{2i} が推定できたので(8.1)式の右辺は、全て既知となり(4.2)式より x_i 系列の推定値 $\hat{x}_i$ を得ることができる。図4.4にその結果を示す。

5 実測の水文資料による detection process の計算例

水文時系列を代表する降水量系列について、実測資料を用いた計算例を示す。比較的単位が大きく、観測期間の長い石狩川上流部の上川地点における20年間(昭和27年~昭和46年)の日降水量、及び時間単位が小さく観測期間も短期間である時系列の例として、昭和48年9月の北海道南部豪雨災害時における知内地点の20分間降雨量の観測資料を用いた。

図5.1は、上川における各種時間単位の降水量時系列のコレログラムを示す。図示されているように年周期の卓越する典型的な降水量系列である。一般に水文時系列は、年周期の卓越する非定常時系列である。したがって前述した定常時系列に関するdetection processの手法を直接用いることができない。しかしここでは、次のような理由で前述の手法をそのまま用いる。第1の理由として、非定常時系列理論が十分に研究されていない現況では、非定常時系列を定常化することにより定常時系列の理論を用いる手法が、よくとられる。すなわち非定常時系列 y_i について

$$y_i = P_i + n_i + T_{ri} \quad (5.1)$$

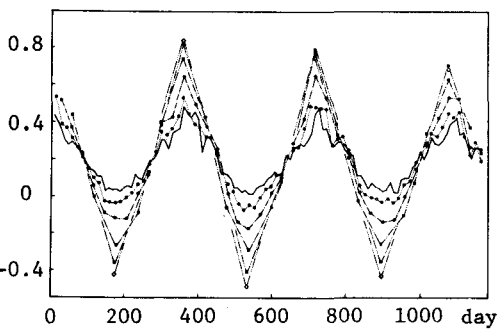
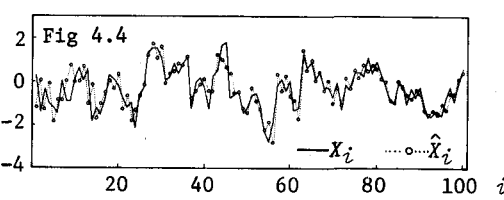
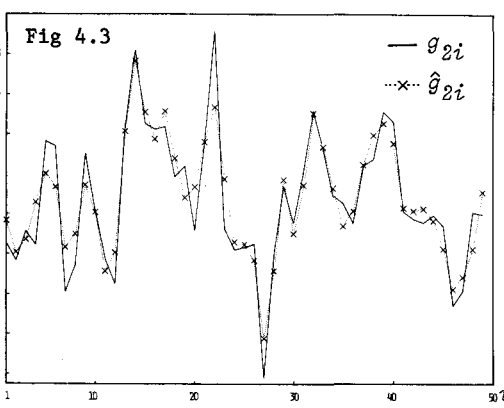
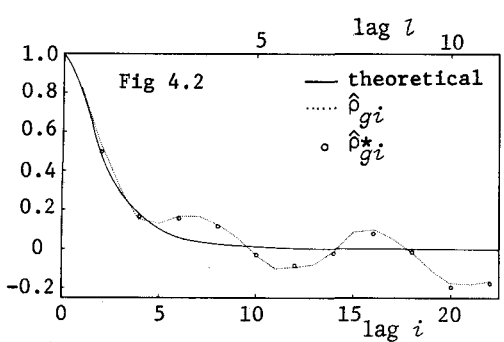


Fig 5.1 Autocorrelation coefficient in KAMIKAWA

————	10-day	precipitation
.....○.....	semimonthly	precipitation
—●—	monthly	precipitation
—□—	bimonthly	precipitation
—●—	trimonthly	precipitation
—○—	semiannual	precipitation

p_i, n_i, T_{ri} は、それぞれ周期成分、確率変動成分、傾向成分である。又 n_i は、非定常な確率変動成分なので、次式により定常な系列 x_i に変換している A_i

$$n_i = A_i x_i \quad (5.2)$$

は、決定論的に定まる関数である。(5.2)式を仮定することによる非定常時系列の定常化の程度は興味ある問題である。detection process を考える場合(5.2)式の仮定は、定常化の程度という問題以外に難点を生じる。時間単位 T の時系列として添字 T を付すと、(5.2)式より定常化された確率変動成分は

$$x_{T,i} = n_{T,i}/A_{T,i} \quad (5.3)$$

又時間単位 $2T$ の確率変動成分は

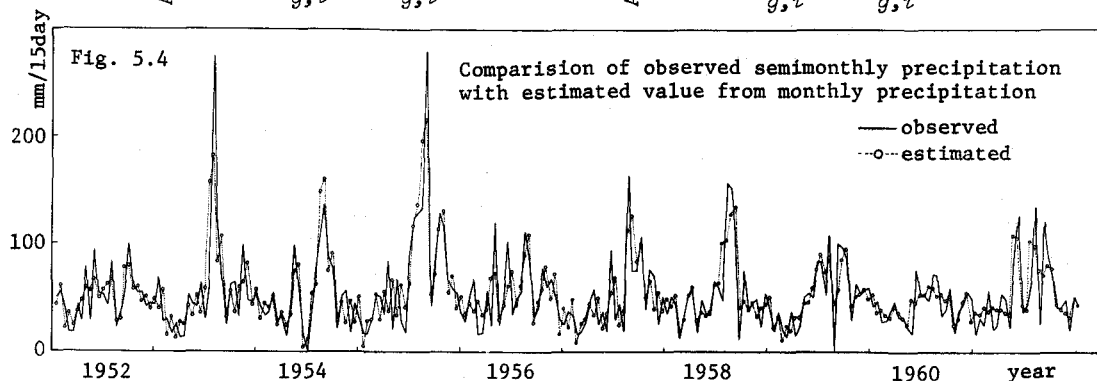
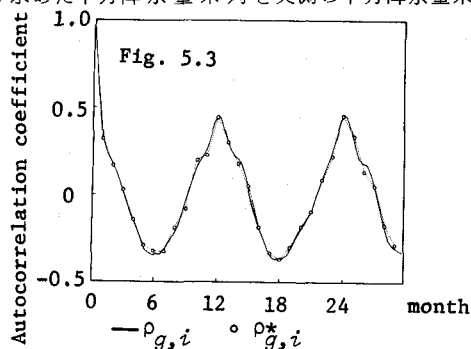
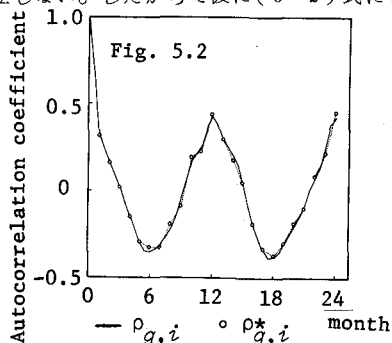
$$x_{2T,i} = \frac{n_{2T,i}}{A_{2T,i}} \quad (5.4)$$

$x_{T,i}, x_{2T,i}$ に関して、その時間単位より次式が成立しなければならない。

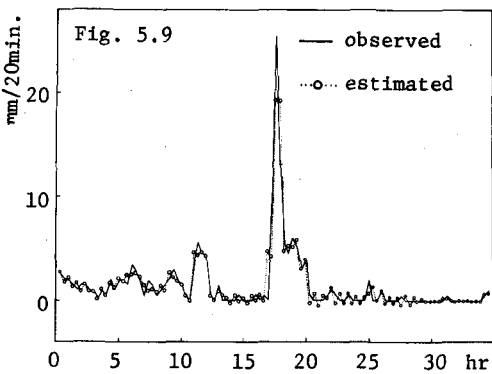
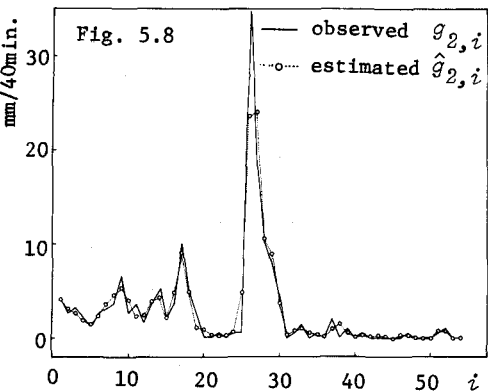
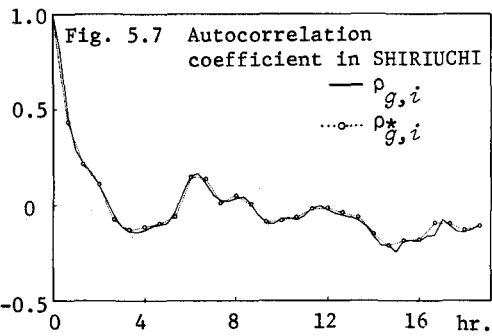
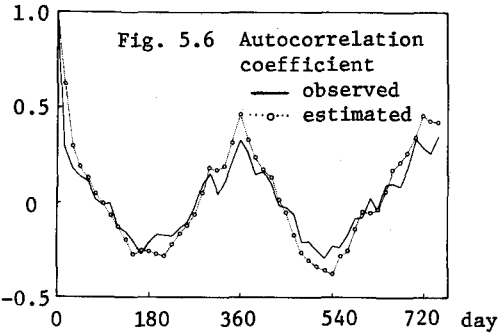
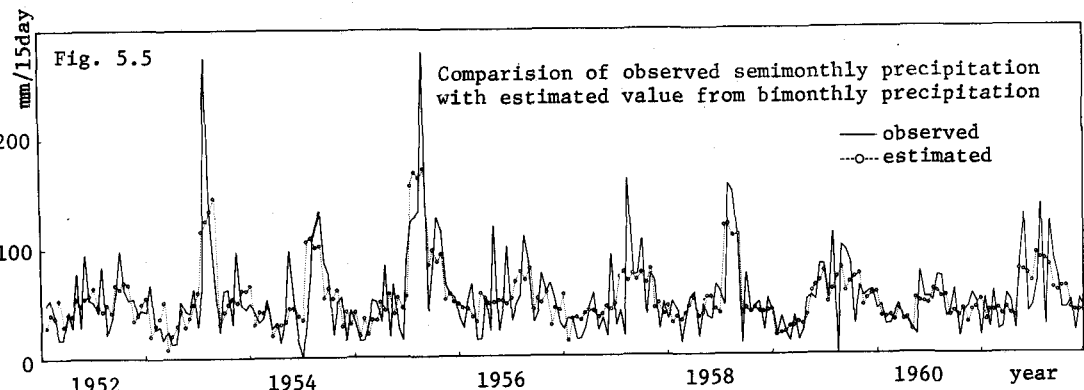
$$x_{2T,i} = x_{T,2i-1} + x_{T,2i} \quad (5.5)$$

しかし(5.5)式は、(5.3),(5.4)式を用いると一般に成立しない。したがって仮に(5.2)式によ

り非定常系列を定常化できたとしても(3.2)式が成立しないことになる。又時系列における定常性の仮定は、 g_i^* 系列の自己相関係数を求める場合のみに必要である。この相関係数は、 g_{2i} 系列の値を得るために用いられ、必ずしも厳密な意味における相関係数を必要とするものでない。すなわち相関係数 $\rho_{i,i}$ において、例えば $i=1$ として $\rho_{i,i}$ を用いて前章で示した不足している条件式を補うことが可能であればよい。図5.2は、上川における半月降水量系列を(3.1),(3.2)式の x_i 系列と考えた時 $n=2$ として月降水量系列を表わす g_i, g_i^* の両系列の自己相関係数を示す。又図5.3は、半月降水量系列を x_i 系列とした時、 $n=6$ として月降水量系列を示している g_i, g_i^* 系列の自己相関係数を示すいずれの場合も(2.12)式が成立しており、 $\rho_{g,i}$ より $\rho_{g^*,i}$ の推定が可能であることを示している。図5.4は、上川における10年間の月降水量系列より、半月降水量系列を求めた結果である。又図5.5は、2ヶ月降水量系列を用いて半月降水量系列を求めたものである。この場合2ヶ月降水量系列より月降水量系列を推定し、更に推定した月降水量系列より半月降水量系列を求めた。図5.6は、月降水量系列より求めた半月降水量系列と実測の半月降水量系



列の相関係数を比較したものである。次に知内における20分間降雨量系列を x_i 系列として、 $n=2$ の時40分間降雨量を表わす g_i, g_i^* の兩系列の自己相関係数を図5・7に示す。(2・12)式が成立していることがわかる。 $\rho_{g,i}^*$ を直線式で補間して求めた $\rho_{g,i}$ より推定した $\hat{g}_{2i}$ 系列を、図5・8に示す。40分間降雨量系列より推定した20分間降雨量を図5・9に示す。無降雨期間がある場合には、若干負の値をとっている。低域フィルターを通過した信号より、フィルターを通過する前の信号を推定するdetection Processとしては、周波数の高い変動に対してその追従性の鋭いことを考慮すると、与えられる時間単位2Tの降水量系列から時間単位Tの系列をほぼ再現しているものと思われる。



参考文献

- 1) S.kotz and J.Neumann , Shorter Contributions (Autocorrelation in Precipitation Amounts) , Journal of Meteorology , Vol. 16 , 1959
- 2) 高橋安人、システムと制御、岩波書店、1972