

1. は し が き

地域開発や都市化に伴う流況変化が既往流量資料の等質性を低下させている現在、より等質性の高い降水事象の諸特性の把握とその定式化に関する諸問題の解決が急がれている。ところで、降水の関与する利水、治水計画の対象は通常ある空間的広がりを基本とすることはいうまでもないが、こうした特定の空間領域における無降水事象を含む降水時系列の多次元問題について、大きく分けて二つのアプローチの方法が考えられている。一つは降水機構そのものの時空間的モデル化であり¹⁾ もう一つは地上観測所群の降水資料をもとに多変量解析手法、確率統計手法等を駆使してモデル化する方向であり^{2,3)} 従来主として連続水文時系列に対して用いられてきた種々の手法を不連続時系列へ準用あるいは拡張するものであろう。しかし、いずれの方法においても多次元性と無降水、降水の非定常性等の障害により多くの議論が残されている。

本研究は後者の立場より不連続降水時系列の多次元モデルに関する筆者の基本的考えを明らかにするものであり、不連続時系列を支配する主成分を中核とした2,3の手法によりアプローチする。また、吉野川流域における不連続降水時系列の構造の解析結果を示す。

2. ガンマ分布の対数正規変換

水文諸量の分布は一般にガンマ分布で表現できる場合が多いが、理論的展開にはそのままでは困難な問題が派生するので、その対数正規変換を考える。いま、水文量 Y の確率密度関数 $f(Y)$ が次式のようなガンマ分布で表わされるとする。

$$f(Y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta Y} \cdot Y^{\alpha-1}, \quad (\alpha, \beta > 0, Y \geq 0) \quad (1)$$

このとき、 Y の平均値 $\bar{Y}$ 、分散 σ_Y^2 、ひずみ係数 C_{SY} は次式で与えられる。

$$\bar{Y} = \alpha/\beta, \quad \sigma_Y^2 = \alpha/\beta^2, \quad C_{SY} = 2/\sqrt{\alpha} \quad (2)$$

一方、 Y の対数正規変量を $y = K \log_e[(Y+b)/c]$ とすれば、確率分布関数 $F(Y)$ は次式で表わされる。

$$F(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-y^2/2} dy \quad (3)$$

原変数 Y の平均値、分散、ひずみ係数は変換パラメータ K, b, c で次式のように表わされる。

$$\bar{Y} = c\lambda - b, \quad \sigma_Y^2 = c^2\lambda^2(\lambda^2 - 1), \quad C_{SY} = \sqrt{\lambda^2 - 1}(\lambda^2 + 2), \quad (\lambda \equiv \exp(1/2K^2)) \quad (4)$$

(2)式と(4)式の各式はそれぞれ等しくなければならないから、原分布を規定するパラメータ α, β と対数正規変換パラメータ K, b, c の間には次式の関係があることになる。

$$C_{SY}^2 = 4/\alpha = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2)^2 \quad (5) \quad b = \alpha\lambda^2/2\beta \quad (6)$$

$$c = 2/\{\beta\lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2)\} \quad (7)$$

したがって、ガンマ分布のパラメータ α, β が与えられるとき、対数正規変換パラメータの K が(5)式より定まり、 b, c は(6),(7)式から求まる。以下の理論展開において必要に応じて諸水文量の対数正規変換を行い、 $N(0, 1)$ 分布に従う標準正規変量にする。

3. 多次元不連続降水時系列に関するモデル

同一気象条件を満足する期間(たとえば梅雨期、台風期) T について考え、対象地域の降水観測地点数を k_s とし、観測資料は各地点とも同年数程度のものがあるとする。単位時間 Δt として、不連続時系

列を扱う上で一応 $\Delta t \leq 24 \text{ hr}$ 程度とする。

3. 1 降水と無降水の継続時間

対象地域全体での降水生起場と完全無降水場に分離し、図-1 のようにそれぞれの場の継続

時間を地域降水継続時間 T_{R*} 、地域無降水継続時間 T_{d*} と呼ぶことにする。地域降水継続時間 T_{R*} の内部時間はさらにつぎのように分割さ

れる。地点 i の降水継続実時間を T_{Ri} とし、降水の実生起時刻までの初期無降水継続時間を $T_{dF,i}$ 、降水の実終了時刻以後の後期無降水継続時間を $T_{dL,i}$ とする。いわゆる降水の「中休み」時間が存在するとき、この一時的無降水継続時間を $T_{dM,i}$ とする。このとき、 T_{Ri} は二つに分離されることになる。以上の諸継続時間に次式のような制約条件が付随することは明らかである。

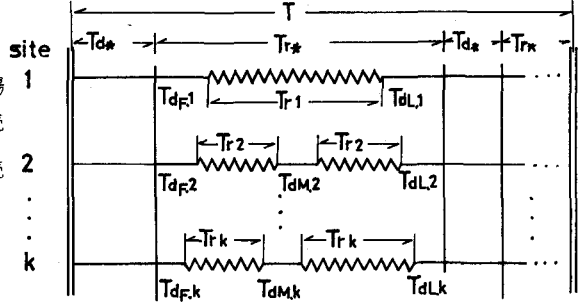


図-1 降水、無降水の継続時間

$$\left. \begin{aligned} T &= \sum T_{d*} + \sum T_{R*}, & T_{R*} &= \sum T_{dL,i} + \sum T_{Ri} \quad (\text{地点 } i \text{ において}) \\ T_{R*0} &\leq T_{R*}, & T_{R0} &\leq T_{Ri} < T_{R*}, & T_{R0} &\leq T_{R*0} \\ T_{d*0} &\leq T_{d*}, & T_{dL,0} &\leq T_{dL,i} \leq T_{R*}, & T_{dL,0} &\leq T_{d*0} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(ただし、添字 0 は下限値を示し、 $\alpha = F \text{ or } M \text{ or } L$)

これらの制約条件の下限値を適切に設定する必要があるが、単位時間 Δt の取り方によって異なり、気象学的あるいは確率統計的検討を要するので、この問題については別途考察することにし、本論文では深く言及しない。

さて、 T_{R*} と T_{d*} の間の相互相関は無視できる場合が多いだろう。このとき、単に T_{R*} 、 T_{d*} の分布に従う乱数を交互に発生させるだけで $\{T_{d*}, T_{R*}\}$ 系列が得られる。相互相関が無視できない場合は、次式のようなマルコフ型回帰モデルを用いればよいだろう。

$$t_{R*} = \rho_* \cdot t_{d*} + \varepsilon_* \sqrt{1 - \rho_*^2} \quad \text{or} \quad t_{d*} = \rho_* \cdot t_{R*} + \varepsilon_* \sqrt{1 - \rho_*^2} \quad (9)$$

ここに、 t_{R*} 、 t_{d*} は対数正規変量、 ρ_* は t_{R*} と t_{d*} の相互相関係数、 ε_* は正規乱数、である。

地点 i の降水継続実時間 T_{Ri} は、本来 T_{R*} に関係なく唯一の母集団確率分布に従うはずであり、期間 T のすべての資料より T_{Ri} の対数正規変換パラメータを求め、その正規化を行う。一方、 $T_{dF,i}$ 、 $T_{dM,i}$ 、 $T_{dL,i}$ は、前述の定義より明らかなように、無降水継続実時間でもそれぞれの意味するところが異なるため、各々について変換パラメータを求め正規化を行う必要がある。

これらの正規変量 t_{Ri} 、 $t_{dL,i}$ ($i=1,2,\dots,R$, $\alpha=F, M, L$) について地点間の相関行列を作成し、対象地域内の降水あるいは無降水の継続実時間を支配する主成分の分析を次式のように行う。

$$\eta_{ri} = \sum_{j=1}^R w_{ij}^{(r)} t_{rj}, \quad \eta_{dL,i} = \sum_{j=1}^R w_{ij}^{(dL)} t_{dL,j} \quad (10)$$

($i=1,2,\dots,p \leq R$, $\alpha=F \text{ or } M \text{ or } L$)

ここに、 η_{ri} 、 $\eta_{dL,i}$ ($\alpha=F \text{ or } M \text{ or } L$) はそれぞれ降水、無降水の継続実時間を支配する第 i 主成分で、平均値 0、分散 1 に標準化されているとする。また、 $w_{ij}^{(r)}$ 、 $w_{ij}^{(dL)}$ はそれぞれ標準化された重み係数である。

ところで、 η_{ri} と η_{rj} 、 $\eta_{dL,i}$ と $\eta_{dL,j}$ ($i \neq j$) は主成分分析法(主軸法)より互いに独立であることとは自明であるが、 η_{ri} と $\eta_{dL,j}$ ($i, j=1,2,\dots,p$) の独立性については確かな保証がない。そこで、次式のような主成分間の回帰モデルが必要となろう。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ri} &= \sum_{j=1}^p A_{ij}^{(r,dd)} \eta_{dd,j} + \tau_i \sqrt{1 - \{R_i^{(r,dd)}\}^2}, \quad (d \equiv F \text{ or } M) \\ \text{or} \\ \eta_{dd,i} &= \sum_{j=1}^p A_{ij}^{(dd,r)} \eta_{rj} + \tau_i \sqrt{1 - \{R_i^{(dd,r)}\}^2}, \quad (d \equiv M \text{ or } L) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、 $R_i^{(r,dd)}$, $R_i^{(dd,r)}$ は第 i 主成分に対する重相関係数で、それぞれ $\sqrt{\sum_j \{A_{ij}^{(r,dd)}\}^2}$ 、 $\sqrt{\sum_j \{A_{ij}^{(dd,r)}\}^2}$ に等しい。 τ_i は正規乱数である。 $A_{ij}^{(r,dd)}$, $A_{ij}^{(dd,r)}$ はそれぞれ $\eta_{dd,j}$, η_{rj} に対する η_{ri} , $\eta_{dd,i}$ の回帰係数で、いまの場合右辺の各主成分が互いに独立であることから η_{ri} と $\eta_{dd,j}$ ($i \neq j$) の相関係数に等しい。したがって、それらは (10) 式の第1式と第2式の積の期待値をとれば、次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{ij}^{(r,dd)} &= \sum_{l=1}^R \sum_{m=1}^R w_{il}^{(r)} w_{jm}^{(dd)} B_{lm}^{(r,dd)}, \quad (d \equiv F \text{ or } M) \\ \text{or} \\ A_{ij}^{(dd,r)} &= \sum_{l=1}^R \sum_{m=1}^R w_{il}^{(dd)} w_{jm}^{(r)} B_{lm}^{(dd,r)}, \quad (d \equiv M \text{ or } L) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、 $B_{lm}^{(r,dd)}$, $B_{lm}^{(dd,r)}$ はそれぞれ、地点 l の t_{r2} と地点 m の $t_{dd,m}$ 、地点 l の $t_{dd,l}$ と地点 m の t_{rm} の相互相関係数である。

したがって、地点 i の $\{t_{ri}, t_{dd,i}\}$ 系列は (10) 式の逆変換である次式を交互に用いれば、上述の主成分から得られることになる。

$$t_{ri} = \sum_{j=1}^p C_{ij}^{(r)} \eta_{rj} + \tau_{ri} \sqrt{1 - R_i^2} \quad \text{or} \quad t_{dd,i} = \sum_{j=1}^p C_{ij}^{(dd)} \eta_{dd,j} + \tau_{dd,i} \sqrt{1 - R_i^2} \quad (13)$$

($d \equiv F \text{ or } M \text{ or } L$)

ここに、 R_i , $R_{dd,i}$ は重相関係数、 τ_{ri} , $\tau_{dd,i}$ は正規乱数である。また、 $C_{ij}^{(r)}$, $C_{ij}^{(dd)}$ はそれぞれ、 t_{ri} と η_{rj} 、 $t_{dd,i}$ と $\eta_{dd,j}$ の相関係数で、重み係数 $w_{ji}^{(r)}$, $w_{ji}^{(dd)}$ との間には次式のような関係がある。

$$C_{ij}^{(r)} = \lambda_{rj} w_{ji}^{(r)}, \quad C_{ij}^{(dd)} = \lambda_{dd,j} w_{ji}^{(dd)} \quad (14)$$

ここに、 λ_{rj} , $\lambda_{dd,j}$ はそれぞれ $[t_{rj}]$, $[t_{dd,j}]$ に関する相関行列の固有値で、第 j 主成分 η_{rj} , $\eta_{dd,j}$ に対応する。

モデルシミュレーションの手順について言えば、まず $\{t_{dx}, t_{rx}\}$ 系列を発生させ、得られた特定の t_{rx} に対して t_{dFi}, t_{dLi} を (13) 式の第2式より発生させる。つぎに $\sum (T_{ri} + T_{dMi}) \leq T_{rx} - T_{dFi} - T_{dLi}$ の範囲で (11) 式と (13) 式により t_{ri} , t_{dMi} を交互に発生させればよいだろう。

ところで、こうしたモデルの基本である t_{ri} , $t_{dd,i}$ に関する相関係数は地域降水継続時間 T_{rx} の大きさに無関係であるかについて一応実測資料より検討すべきであり、有意な変化が認められる場合、主成分分析以下の手順を T_{rx} の各段階ごとに実施する必要があるだろう。

3.2 降水量時系列

期間 T の降水継続実時間 T_{ri} 内の単位時間 Δt 当りの降水量強度 X_i について対数正規変換を行い、正規変量 X_i ($i=1, 2, \dots, R$) を得る。

ある特定の降水継続時間 T_s 内の降水量時系列は定常であると仮定すれば、 T_s 値の大きさの各段階ごとに正規変量 X_i と X_j ($i \neq j$) の間の母相互相関係数を推定し、相関行列を作成することができる。これらの相関行列より T_s 値の各段階ごとの対象地域内降水量強度を支配する主成分が分析され、次式を得る。

$$F_i^{(T_s)} = \sum_{j=1}^R W_{ij}^{(T_s)} X_j, \quad (i=1, 2, \dots, g \leq R) \quad (15)$$

ここに、 $\xi_i^{(T_s)}$ は特定の T_s に対する第 i 主成分で、 $N(0, 1)$ 分布に従う標準正規変量であり、 $W_{ij}^{(T_s)}$ は標準化された重み係数である。

主成分 $\xi_i^{(T_s)}$ と $\xi_j^{(T_s)}$ ($i \neq j$) は互いに独立であるが、時刻 t の主成分 $\xi_{t,j}^{(T_s)}$ と単位時間後の主成分 $\xi_{t+1,i}^{(T_s)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, g$) とは独立である保証はなく、むしろ降水機構から考えてかなりの相関性が推察される。そこで、次式のような主成分間の回帰モデルが考えられる。

$$\xi_{t+1,i}^{(T_s)} = \sum_{j=1}^g D_{ij}^{(T_s)} \xi_{t,j}^{(T_s)} + \varepsilon_{t+1,i} \sqrt{1 - \{R_{\xi i}^{(T_s)}\}^2}, \quad (i=1, 2, \dots, g) \quad (16)$$

ここに、 $R_{\xi i}^{(T_s)}$ は重相関係数で $\sqrt{\sum_j \{D_{ij}^{(T_s)}\}^2}$ に等しく、 $\varepsilon_{t+1,i}$ は正規乱数である。 $D_{ij}^{(T_s)}$ は $\xi_{t+1,i}^{(T_s)}$ と $\xi_{t,j}^{(T_s)}$ の相関係数で、(15) 式を用いれば、次式のようになる。

$$D_{ij}^{(T_s)} = \sum_{l=1}^g \sum_{m=1}^g W_{il}^{(T_s)} W_{jm}^{(T_s)} \rho_{l,m}^{(T_s)} \quad (17)$$

ここに、 $\rho_{l,m}^{(T_s)}$ は任意の時刻 t における地点 m の $x_{t,m}$ と単位時間後の地点 l の $x_{t+1,l}$ の母相関係数である。

(17) 式により予め $D_{ij}^{(T_s)}$ を求めておけば、(16) 式より多次元主成分時系列が得られ、それに対する各地点の降水量は (15) 式の逆変換である次式より得られる。

$$x_{t,i} = \sum_{j=1}^g E_{ij}^{(T_s)} \xi_{t,j}^{(T_s)} + \varepsilon_{t,i} \sqrt{1 - \{R_{x i}^{(T_s)}\}^2} \quad (18)$$

ここに、 $E_{ij}^{(T_s)}$ は $x_{t,i}$ と $\xi_{t,j}^{(T_s)}$ の相関係数で (15) 式の重み係数とは次式のような関係がある。

$$E_{ij}^{(T_s)} = \lambda_j^{(T_s)} W_{ji}^{(T_s)} \quad (19)$$

ここに、 $\lambda_j^{(T_s)}$ は T_s のある段階における降水量強度の相関行列 $[\rho_{o,lm}^{(T_s)}]$ の固有値で第 j 主成分 $\xi_j^{(T_s)}$ に対応する。

ところで、母相関係数 $\rho_{o,lm}^{(T_s)}$, $\rho_{l,m}^{(T_s)}$ の推定はつぎのようにすれば良いだろう。母相関係数 $\rho(\tau_0)$ なる二変数正規母集団よりの任意標本相関係数 r の分布は標本数 n ($\equiv T_s/\Delta t$) が十分大きければ ($n \geq 10$)、それを次式のように Z 変換することによって $N\{\bar{z}, (1/\sqrt{n-3})^2\}$ なる正規分布をすることが知られている。

$$Z = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+r}{1-r}, \quad \bar{z} = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+\bar{\rho}}{1-\bar{\rho}} \quad (20)$$

このことを準用すれば、標本相関係数 $r_{o,lm}^{(T_s)}$, $r_{l,m}^{(T_s)}$ の集団を T_s の各段階ごとの群に分け、各群ごとに (20) 式の第1式より Z 変換された値の平均値を求める。この平均値を (20) 式の第2式により逆変換すると所要の推定値が得られる。

4. 吉野川流域における解析結果

図-2 に示すような比較的広範囲に散在する5ヶ所の降水観測地点を選び、昭和34年から48年の梅雨期(6,7月)の1時間雨量資料を用いた。降水、無降水の継続時間の下限値として、つぎのような数値を採用した。

$$T_{dx0} \doteq 24 \text{ hr}, \quad T_{rx0} \doteq 6 \text{ hr}, \quad T_{dmo} = T_{ro} \doteq 4 \text{ hr}, \quad T_{dfo} = T_{dlo} \doteq 1 \text{ hr}$$

まず、 T_{dx} , T_{rx} の実測値に対する対数正規変換値の適合性については下限値付近(非超過確率5~10%以下)を除いて満足すべき結果を得たが、下限値付近でのそれはあまり良くなかった。しかし、より適切な下限値の選定により改善される余地がある。また、 T_{dx} と T_{rx} の相互相関係数は0.05で相関なしと判定された。つぎに、 T_{ri} 、 $T_{di,i}$ ($\alpha \equiv \text{For Mor L}$) の対数正規変換の結果(1例)を図-3に示す。やはり、下限値付近での正規分布からのずれは否定できない。しかし、資料整理の煩雑さを回避するために前述の制約条件を満足しない残りのデータを省略したことに帰因することが多分に考えら

れ、改善されうる余地がある。また、標本数の大きさから言えば、資料年数が短かすぎた点があげられる。

初期、中休み、後期の無降水継続実時間のそれぞれに関する地点間相関係数については、図-2 の地点間距離から予想されたように、地点1,2,3 のグループ内では0.5~0.7 程度の値が得られたが、その他の地点間では0.0~0.3程度の低い値がほとんどであった。

降水継続実時間に関する地点間相関係数は地域降水量 T_{rs} の大きさにより傾向が異なり、ほぼ48 時間以下ではすべての値が0.6~0.8 の範囲に入るほどの強い相関を示した。48 時間以上になると、0.1~0.4の間での散らばりがほとんどとなった。このことは梅雨前線性の降雨といえども、時空間的に安定した

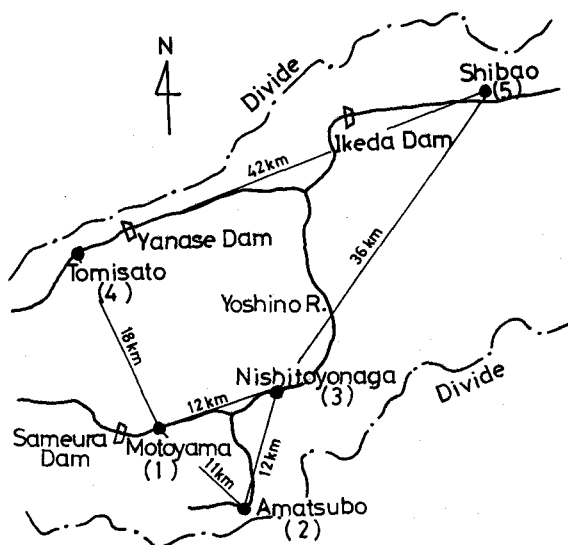


図-2 降水観測地点の位置

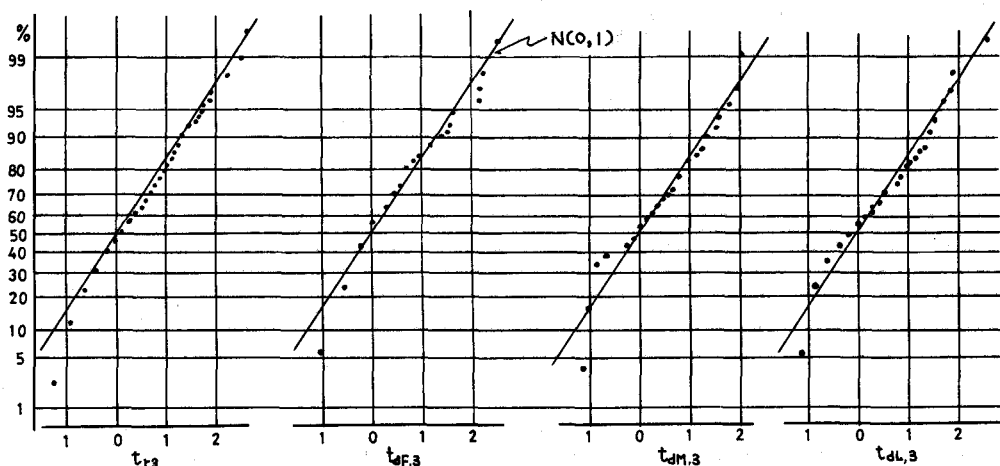


図-3 西豊水地点 (3) における降水、無降水継続実時間の対数正規変換

降雨時間の上限は48 時間程度であることを示していると言えよう。

降水、無降水の継続実時間に関する主成分の分析結果では、無降水継続実時間の3種類のいずれでも第1~第3主成分で全分散の85~90%を占めることが明らかとなった。また、降水継続実時間の場合、48時間以下の継続時間については第1主成分だけで全分散の75%を占めるのに対し、48時間以上では第1主成分のそれは47%に留まった。さらに、(12) 式による各主成分間の相関係数を算出したところ、地点 l の $t_{r,l}$ と地点 m の $t_{d,m}$ の相関係数 $B_{lm}^{(r,dd)}$, $B_{lm}^{(dd,r)}$ の値が0.0~0.2の低い範囲であったことに呼応して、0.0~0.2程度の値となり、これらの主成分間の相互相関はほとんど考慮する必要がないと判断されうる。

つぎに、1時間雨量の対数正規変換は、図-4にその1例を示すように、各地点ともほぼ満足すべき結果を得た。この時間雨量に関する地点間の標本相関係数 $r_{0,lm}^{(T_s)}$, $r_{1,lm}^{(T_s)}$ (添字0,1はそれぞれ lag time 0,1を示す)とそのときの標本数すなわち降水継続時間 T_s の関係を2,3示せば、図-5のようである。資料年数が短かいために T_s の大なところで描点数が少なく、一概に言えないが、標本相関係数の散

らばりは T_s の増加とともに減少するようである。図-5 中、 T_s の各段階ごとに (20) 式を適用して求めた母相関係数の推定値を $\oplus$ 印で示し、この推定値で見れば地点間によっては T_s とともに母相関係数は変化するようである。とくに、 $r_{1,1m}^{(T_s)}$ の場合そのような傾向が強く、 T_s とともに推定値が大きくなるのが全般的に見られた。

そこで、 $S_{0,1m}^{(T_s)}$ の推定値を用いて主成分の分析を行ったところ、 $T_s \leq 7$, $8 \leq T_s \leq 11$, $12 \leq T_s$ のそれぞれについて第1～第3主成分で全分散の93,86,88%を占め、すべての場合第1主成分の全分散に占める割合は59～63%であった。これからすれば、主成分の割合に対する T_s の影響は少ないと思われる。

つぎに、(17) 式により lag time 1 の各主成分間の相関係数を求め、その内から第1～第3主成分の自己相関係数の T_s に伴う変化を示せば、図-6 のようになる。このように、主成分の自己相関係数が T_s とともに大きくなることは注目すべき結果であり、とくに第1主成分のこの性質は降水時系列に対してきわめて大きな影響を与えるといえよう。

最後に、こうした主成分を中核としたモデルによれば、従来の Key station の問題が解消されるとともに、独立変数の抽出により次元の rank を下すことができよう。残された問題についても今後検討するつもりである。

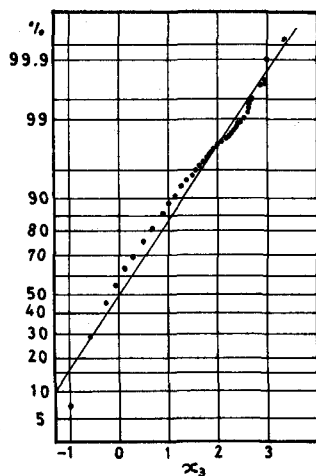


図-4 地点3の時間雨量分布

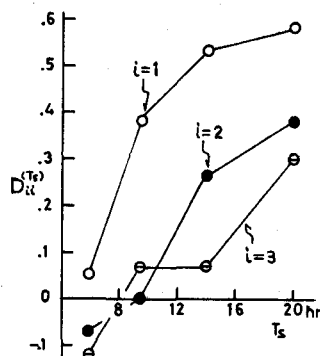


図-6 主成分の自己相関

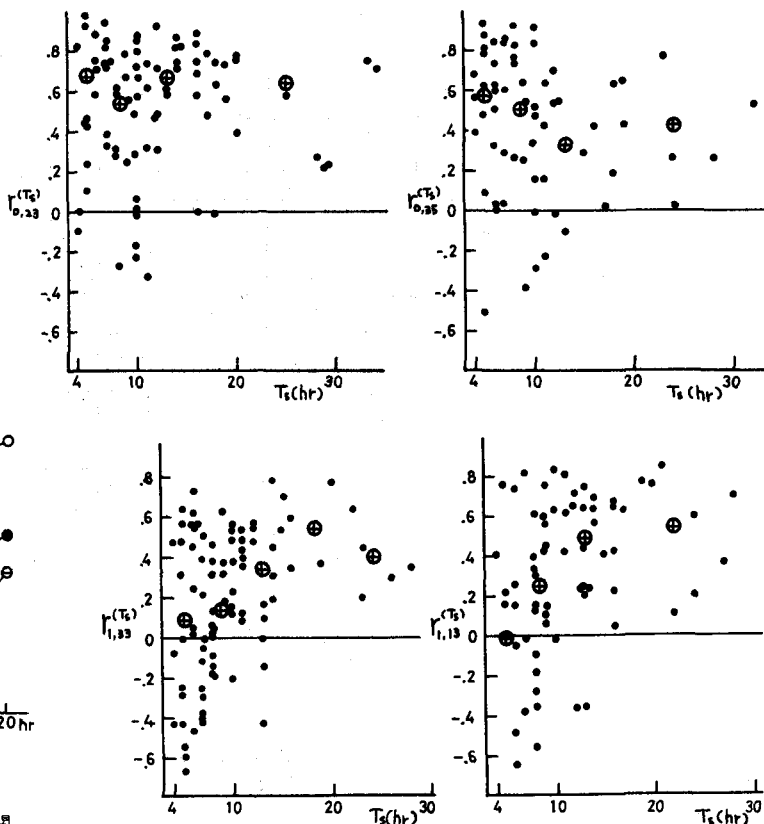


図-5 $r_{0,1m}^{(T_s)}$, $r_{1,1m}^{(T_s)}$ と T_s の関係

参考文献

- 1) J.A.Cole and J.D.F.Sheriff: Some single and multi-site models of rainfall within discrete time increments, J. of Hydrology, Oct., 1972
- 2) M.B.Fiering: Multivariate Technique for synthetic hydrology, ASCE, HY5, Sept., 1964
- 3) N.C.Matalas: Mathematical assessment of synthetic hydrology, WRR, Vol. 3, No. 4, 1967