河口流出における密度流効果

北海道大学工学部　正員　柏　村　正　和

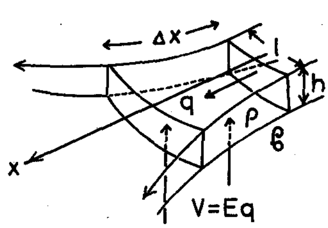
1.　はじめに

Morton 等[1]によつて使われ出した連行流、あるいは連行係数の考え方は、流体の混合とか、密度や濃度の希釈を取り扱う際には、きわめて便利であり、今日この種の問題には広く用いられてきている。一方、密度を異にする二流体間の力のバランス、例えば淡水塩水二層間のせん断力とか、それによつて支配される塩水くさびの長さの問題などは、二層間抵抗係数を用いて取り扱われている。この二つの方向の研究は、実は同じ現象を違つた角度から見ているように思われる。二層の速度差が、せん断力を生じ、その結果連行、混合が発生すると考えられるので、二層間の連行係数と抵抗係数の間には何等かの関係のあることが予想される。筆者は、河口流出の問題を連行係数を用いて取り扱つている過程において、この両者がほとんど同一のものであることを見出した。まず、これについて述べあわせて河口流出に伴なう諸量の変化の解析ならびに現地観測から得られた諸値を紹介する。

2.　基本方程式

密度差の影響があまり顕著でない噴流形式の流出でも、はるか沖では表層水が海水を連行する作用が減衰し、相対的に密度流効果が現れて、表層水は四方へ拡がる。ことに温排水の問題では、このような領域の熱放散効果の評価が再認識されている。[2]　通常の河口流出では河口からすぐに密度流効果が現れ、河川水はすぐ四方へ拡がる一方、海水は河床に沿つて川の上流へ伸び、河口では内部フルード数が１になると信じられている。この場合は前者の噴流形式に較べて連行作用が弱いと考えられる。従つて、河口流出における密度流効果の強弱は、連行作用の強弱と相反する傾向を持つ。

表層水が河口を出て、密度ρを次才に増しながら、流速q、厚さhで、図－１の如く流れるものとする。密度ρ_0の海水を、毎秒Vの速度で下層から連行し、　$V=Eq$　の関係が成り立つていると考える。Eは連行係数である。このとき、流れの体積の連続性、質量の連続性、ならびに運動量の変化について、つぎの３式が得られる。



図－１　流れと記号の説明図

$$\frac{d(qh\ell)}{dx}=V\ell=Eq\ell \tag{1}$$

$$\frac{d(\rho qh\ell)}{dx}=\rho_0 V\ell=\rho_0 Eq\ell \tag{2}$$

$$\frac{d(\rho q^2 h\ell)}{dx}=-(\rho_0-\rho)gh\ell\frac{dh}{dx} \tag{3}$$

(3)式の左辺には、連行される海水に与えられる運動量の分も含まれているので、せん断力の項は、見掛け上現れていない。以上３式はつぎのように変形しておくと、運算上都合がよい。

$$\frac{dq}{q}+\frac{dh}{h}+\frac{d\ell}{\ell}=\frac{E}{h}dx \tag{1'}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dq}{q}+\frac{dh}{h}+\frac{d\ell}{\ell}=\frac{\rho_0}{\rho}\frac{E}{h}dx \tag{2'}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}+2\frac{dq}{q}+\frac{dh}{h}+\frac{d\ell}{\ell}=-\frac{\rho_0-\rho}{\rho}g\frac{dh}{q^2} \tag{3'}$$

また、ρ_0、ρ の代りに ε を、さらに流れの拡がりの目安としての流線間隔 ℓ は、指数関数的に増加するという経験則を適用し[3]、それぞれつぎのようにおく。

$$\varepsilon=1-\frac{\rho}{\rho_0} \tag{4}$$

$$\ell=\ell_0 e^{kx} \qquad \text{または} \qquad \frac{d\ell}{\ell}=k\,dx \tag{5}$$

内部フルード数 F_i は、　$F_i=q^2/\varepsilon gh$　として定義する。また二層流で、二層の混合が全くない非回転定常流では、　$(1/2)q^2+\varepsilon gh=C$　が成り立ち[4]、しかも河口で、　$F_i=1$　になるという、いわゆる河口条件を入れると、　$C=(3/2)\varepsilon gh_0$,　（h_0 は河口の h）となるので

$$h_*(F_i+2)=3 \tag{6}$$

を得る。ここに　$h_*=h/h_0$　である。もし、二層間のせん断力、混合、連行にもとずくエネルギーの損失があるときは、　$(1/2)q^2+\varepsilon gh+W=C$　とおけばよい。W は損失項である。ε は今度は変量となるが、河口の ε を ε_0 とおき、全体を　$\varepsilon_0 gh_0$　で割つて無次元化すると、

$$\varepsilon_* h_*(F_i+2)+2W_*=3 \tag{7}$$

を得る。ここに、　$\varepsilon_*=\varepsilon/\varepsilon_0$,　$W_*=W/\varepsilon_0 gh_0$　である。

一方、連行を一まずおき、二層間のせん断応力 τ を含む運動方程式は、定常、下層海水静止の条件下でつぎのようになる。h_sを海水層の厚さ、I_b は x 方向の海底勾配、　$\gamma=\rho/\rho_0$　とすれば、

$$q\frac{\partial q}{\partial x}+g\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h_s}{\partial x}+I_b\right)+\frac{\tau}{\rho h}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{淡水}$$

$$g\left(\gamma\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h_s}{\partial x}+I_b\right)-\frac{\tau}{\rho_0 h_s}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{海水}$$

両式の差をとることにより

$$q\frac{dq}{dx}+\varepsilon g\frac{dh}{dx}+\tau\left(\frac{1}{\rho h}+\frac{1}{\rho_0 h_s}\right)=0 \tag{8}$$

となる。τ の表現については、従来の例にならつて

$$\tau=\frac{\rho+\rho_0}{2}\frac{f_i}{2}q^2 \tag{9}$$

とおけるものとする。ここに f_i は、二層間抵抗係数で、　$q^3/\varepsilon g\nu$　（ν は動粘性係数）の関数として知られ、今なお研究の途上にあるものである。

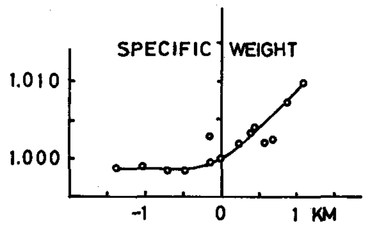
3. 基本式から誘導される諸結果

前節の基本式から、河口流出に際して導かれるいくつかの性質を述べる。

まず、(2′) 式から(1′) 式を引き、(4)式を考慮すれば、ただちにつぎ式が得られる。

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=-\frac{E}{h}dx \tag{10}$$

これは、河口を出て、淡水中の塩分がどのように増加していくかを示す式である。淡水の厚さhは次才に減少し、同時にEは増加していく（後にこの点を吟味する）から、εは急激に減少し、逆に、表層の塩分濃度が河口を出て爆発的に増大する事情を察知することができる。実測の表層密度の変化（図－２）を見ていただきたい。また、この式を用いて、表層の塩分や表層厚の現地観測値があればば、連行係数Eの縦断分布を求めることもできる。たとえば図－２の石狩川の例では、表－１のように求められている。



図－２　表層比重の縦断分布

（昭和４３年８月、石狩川）

表－１

河口からの距離	ε	h	E
－１,０００m	0.0208	2.65m	6.37×10^{-5}
－　５００〃	0.0206	2.38〃	8.67　〃
０〃	0.0194	1.69〃	3.48×10^{-4}
＋　５００〃	0.0167	1.05〃	3.93　〃
＋１,０００〃	0.0122	1.02〃	8.99　〃

つぎに(3′) 式から(2′) 式を引き、εが１に較べて小さいことから　$(\rho_0-\rho)/\rho\fallingdotseq\varepsilon$,　$\rho_0/\rho\fallingdotseq1$　の近似化を行ない、さらに　$F_i=q^2/\varepsilon gh$　の関係を念頭におけば、

$$F_i(dq/q)+(dh/h)+F_i(E/h)dx=0$$

を得るが、これを(1′) 式から引き、(5)式を用いて変形すると

$$\frac{dq}{q}=\frac{\frac{E}{h}(1+F_i)-k}{1-F_i}dx \tag{11}$$

この式は、表層流速の変化を与える式である。分母に　$1-F_i$　があり、しかも、河口内部では、$F_i<1$　、河口で　$F_i=1$,　河口外では　$F_i>1$　が成り立つので、分母は、河口を通過する際に符号が反転し、密度流の特徴である表層流の一時的加速現象[6]を一見説明し得るかに見えるが、事情はそれ程簡単ではなく、河口では、分母と同時に分子も０になり　$(2E/h)-k=0$　が成り立つ可能性がある。これは、後に述べる連行係数と抵抗係数との比較の際にも出てくるが、単に上の式だけから判断しても、河口で流速が無限大にまで加速される筈はないので、分子０以外の値をとるのはおかしい。とも角　E, h, k　などが距離に対してどのように変化すべきものか詳しく判るまではこれ以上の議論はつつしまねばならないであろう。

これと同じような事情にある式をあと二つ誘導する。(11) 式と(5)式とを(1′) に代入して出る式と、$F_i=q^2/\varepsilon gh$　を微分して、(11) 式、(10)式、さらに前の式を代入して得られる式とである。こ

れらはそれぞれつぎのようになる。

$$\frac{dh}{h}=-\frac{(2\frac{E}{h}-k)F_i}{1-F_i}dx \tag{12}$$

$$\frac{dF_i}{F_i}=\frac{3\frac{E}{h}(1+F_i)-k(2+F_i)}{1-F_i}dx \tag{13}$$

どちらの式も、河口条件 $F_i=1$ を入れると右辺分子が $(2E/h)-k$ を含み、(11) 式と同じに、今後の研究を経てから吟味すべき問題である。

この節の最後として、連行によるエネルギー損失の表現を求めてみる。

$q^2=F_i\varepsilon gh$ を微分した $2(dq/q)=(dF_i/F_i)+(d\varepsilon/\varepsilon)+(dh/h)$ と、(11) 式を誘導する時に用いた $F_i(dq/q)+(dh/h)+F_i(E/h)dx=0$ とから dq/q を消去し、(10) 式により ε をも消去して整頓すれば

$$\frac{d\{h_*(F_i+2)\}}{dx_*}=-\frac{EF_i}{h_{0*}} \tag{14}$$

を得る。ここに $x_*=x/b$ （b は河口の川幅）、 $h_{0*}=h_0/b$ である。

また、(7)式から

$$\frac{dW_*}{dx_*}=-\frac{1}{2}\frac{d\{\varepsilon_*h_*(F_i+2)\}}{dx_*}$$

を得るが、この右辺に(14)式と、(10)式を少し変形して代入すれば

$$\frac{dW_*}{dx_*}=\frac{\varepsilon_*E(F_i+1)}{h_{0*}} \tag{15}$$

を得る。これが連行係数を用いた損失の表現である。河口を出ると E も F_i も増加する反面、h_{0*} は減少し、表層流のエネルギーは急速に散逸する。

5. 連行係数と二層間抵抗係数の比較

連行の考えをやめ、二層間のせん断力を考慮して、(8)式を導いた。これに(9)式を代入し、ε が x の関数であることを念頭におき整理すれば

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}q^2+\varepsilon gh\right)-gh\frac{d\varepsilon}{dx}+\frac{\rho+\rho_0}{2}\frac{f_i}{2}q^2\left(\frac{1}{\rho h}+\frac{1}{\rho_0 h_s}\right)=0 \tag{16}$$

故に

$$\frac{dW_*}{dx_*}=\frac{b}{\varepsilon_0 gh_0}\left\{\frac{\rho+\rho_0}{2}\frac{f_i}{2}q^2\left(\frac{1}{\rho h}+\frac{1}{\rho_0 h_s}\right)-gh\frac{d\varepsilon}{dx}\right\} \tag{17}$$

(17)式と、前節(15)式とを等置する。 $\rho \doteqdot \rho_0$ とすると、

$$\frac{\varepsilon_* E(F_i+1)}{h_{0*}}=\frac{b}{\varepsilon_0 g h_0}\left\{\frac{f_i}{2}q^2\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h_s}\right)-gh\frac{d\varepsilon}{dx}\right\}$$

右辺才2項に(10)式を適用し、この項を左辺に廻してさらに $q^2=F_i\varepsilon gh$ を用いて式を整えれば、

$$E=\frac{f_i}{2}\left(1+\frac{h}{h_s}\right) \tag{18}$$

が得られ、連行係数 Eと、抵抗係数 f_i とは、ほとんど同質のものであることが判る。とくに、河口を出て少し沖に行けば、 $h \ll h_s$ が成り立つので

$$E \doteqdot \frac{f_i}{2} \tag{19}$$

として扱うことができる。これはきわめて重要な帰結である。試みに表－1の Eの値から(19)式により換算した f_iの値は、石狩川河口附近の通常の値とほとんど一致している。[5)]

また、浜田の論文[7)]中で、表層流の流量の保存性（この論文の記号では $q\ell h=$一定）の代りに、より厳密な密度欠損の保存性（ $\varepsilon q\ell h=$一定）を用いて若干修正した結論を本論文の記号を用いて示すと、支配断面における河流幅 ℓは、 $\ell=\ell_0 exp(kx)$ とおくことができ、

$$k=f_i\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h_s}\right) \tag{20}$$

である。原論文では f_i の代りに $f_i/2$ になつている。(20)式に(18)式を適用し、支配断面におけるEとkの関係を出すと

$$k=\frac{2E}{h} \tag{21}$$

が得られ、(11)、(12)、(13)の各式の右辺分子が河口で0にならなければならぬとした予想と完全に一致する。

また、連行係数 Eは Ellison·Turner[8)] に始まり、リチャードソン数 R_i（本文 F_iの逆数）の関数として従来考えられてきているが、それによると、 R_i が約0.8以上ではほとんど0で、それ以下で増加、 R_i が0では約0.075[9)]とされていた。しかし河口を出た表層流は、数粍の厚さになつてもなおかなりの流速を維持している現地の経験や Stolzenbach 等[2)]が述べているように、強制噴流となつて流出した後、沖で連行現象がとまり、再び密度流的拡がりが始まるという事実は、連行係数が R_i（または F_i ）のみの関数と考えては説明がつかない。沖では表層厚が減じ R_iは0に近ずき、連行現象はますます活発になる筈だからである。しかし Eを f_iと同じようなものと見なすときはむしろ沖では Eは低下することになり[5)]、この辺の事情も納得できる。

6. 後記

二層をなす河口流出の場では、連行係数と二層間抵抗係数は、ほとんど同じものであるという重要な結果が引き出されたが、これについての検証例がまだ少ないので、今後もさらに検討を続けたいと思う。

文　　献

1) Morton, B. R., Taylor, Sir G. and Turner, J. S. : Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, Proc. Roy. Soc., A. Vol. 234, 1956.

2) Stolzenbach, K. D. and Harleman, D. R. F. : Three dimensional heated surface jets, Water Resources Research, Vol. 9, No. 1, 1973.

3) 福島, 柏村, 八鍬, 高橋：石狩川の河口構造, 才８回海岸工学講演会講演集, 1961.

4) 柏村：河口流出の力学的機構, 才１７回水理講演会講演集, １９７３.

5) 「水理公式集」　土木学会編, 昭和４６年改訂版　P. ５８３.

6) Kashiwamura, M. and Yoshida, S. : Transient acceleration of surface flow at a river mouth, Coast. Eng. Japan, Vol. 14, 1971

7) 浜田徳一：河口密度流の２, ３の性質について, 日本学術会議不等質の流れのシンポジウム前刷集, １９６９.

8) Ellison, T. H. and Turner, J. S. : Turbulent entrainment in stratified flows, J. Fluid Mechanics, Vol. 6, 1959.

9) 椿　東一郎, 小松利光：密度噴流に於ける連行作用について, 才２７回年講, １９７２.