

京都大学工学部 正員 岩佐義朗

京都大学工学部 正員 ○井上和也

1. はじめに

洪水流の理論に関しては従来より数多くの研究が行なわれている。それらの研究の一分類として、kinematic waves 理論にもとづく方法が挙げられる。すなわち、洪水流のように時間的、空間的な変化の緩慢な流れにおいては、dynamic waves の減衰は速く、主たる擾乱が Kleitz-Seddon の法則で表わされる伝播速度を有する kinematic waves として流下することに注目して展開される理論である。このような kinematic waves による洪水流の第 1 近似解では、洪水波形が伝播にともないその前面が急峻になり後面で緩くなるという波形の変形は説明されるが、波高の減衰は一般には表わしえないため、林¹⁾、高橋ら²⁾によってその第 2 近似解が導かれている。しかし、これらの扱いでは対象が洪水の波頂附近に限られているため伝播にともなう波形こう配、波形曲率の変化が考慮されていないようである。本報はこれらをも考慮にいれ、波形全体を対象とした kinematic waves としての第 2 近似解を林、高橋にならってそれぞれ逐次近似法ならびに摂動法によって導くとともに、dynamic waves として数値シミュレーションされた結果と比較することにより、その適用性を考察しようとするものである。なお簡単のため水路は広長方形断面とし、径深が水深で近似される一様水路を扱う。

2. 基礎式

洪水流のような漸変な非定常流の基礎式としてつぎの連続方程式とエネルギー方程式を考える。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2g} \right) = S_0 - \frac{n^2 u^2}{h^{4/3}} \quad \dots\dots (2)$$

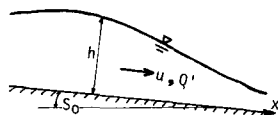


Fig. 1

ここで、 Q' は単位幅流量である。

いま、洪水流の時間スケールを T_* 、 h 方向の長さのスケールを h_* として、(1)、(2)式の各量をつぎの変換によって無次元化する。

$$\begin{cases} t = T_* \tau, & h = h_* \eta, & x = x_* \xi = \sqrt{gh_*} T_* \xi \\ u = \sqrt{gh_*} v, & Q = \sqrt{gh_*^3} q \end{cases}$$

これらを(1)、(2)式に代入して整理すれば

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots (3)$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{F^2} \frac{q^2}{\eta^{5/3}} = \lambda L(\eta, q) \end{cases} \quad \dots\dots (4)$$

$$\text{ただし、} \lambda = h_* / \sqrt{gh_*} T_* S_0, \quad F^2 = S_0 h_*^{1/3} / n^2 g = \left(\frac{1}{n} S_0^{1/2} h_*^{1/6} \right)^2 / gh_* \quad \dots\dots (5)$$

であり、

$$L(\eta, q) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{q^2}{\eta^3} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{2q}{\eta^2} \frac{\partial q}{\partial \xi} \quad \dots\dots (6)$$

である。

3. 第1近似解

kinematic waves の第1近似解は、洪水流では流れの変化が緩慢であるとして、(4)式の右辺を無視することにより導かれる。すなわち、第1近似解を η_1, q_1 と表わすとき $L(\eta_1, q_1) \equiv 0$ であり、したがって(3)、(4)式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial q_1}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (7), \quad q_1 = F\eta_1^{3/2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

(8)式を(7)式に代入すれば

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \omega_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 ω_1 は伝播速度で、 $\omega_1 = (5/3) F \eta_1^{3/2} = (5/3) q_1 / \eta_1$ (10)

である (Kleitz-Seddon の法則)。 (9)式はまたつぎの連立微分方程式に書き改められる。

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\xi}{\omega_1} = \frac{d\eta_1}{0} \quad \dots\dots\dots (11)$$

すなわち、 $d\xi/d\tau = \omega_1$ で表わされる曲線 (以後伝播曲線とよぶことにする) 上で $d\eta_1 = 0$ すなわち $\eta_1 = \text{const}$ であることが導かれ、したがって(8)、(10)式よりこの曲線上で ω_1 は一定であることがわかるから、伝播曲線は実は直線となることが知られる。いまこの直線を

$$\tau_0 = \tau - \xi / \omega_1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

と表わせば、 τ_0 は伝播直線が上流端 $\xi = 0$ を出発する時刻である。上流端での水深変化が $\zeta(\tau)$ として与えられているとすると、(11)式の解は

$$\eta_1(\xi, \tau) = \zeta\left(\tau - \frac{\xi}{\omega_1}\right) = \zeta(\tau_0) \quad \dots\dots\dots (13)$$

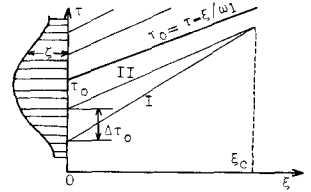


Fig. 2

と表わされる。以上が kinematic waves の第1近似解である。

つぎに(13)式を ξ で微分すると、 $\partial \eta_1 / \partial \xi = d\zeta / d\tau_0 (-1/\omega_1 + \xi/\omega_1^2 \partial \omega_1 / \partial \xi)$ となるが、(10)式より $\partial \omega_1 / \partial \xi = (5/3) \omega_1 / \eta_1 \partial \eta_1 / \partial \xi$ であり、(13)式を考慮すれば結局

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = \frac{3\zeta\zeta_\tau}{2\zeta_\tau \xi - 3\omega_1 \zeta} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。ただし $\zeta_\tau = d\zeta / d\tau \Big|_{\tau=\tau_0}$ である。同様にして

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} = \frac{3\zeta}{(2\zeta_\tau \xi - 3\omega_1 \zeta)^2} \left\{ 2(\zeta_\tau \xi + 6\omega_1 \zeta) \zeta_\tau^2 - 9\omega_1 \zeta^2 \zeta_{\tau\tau} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

である ($\zeta_{\tau\tau} = d^2\zeta / d\tau^2 \Big|_{\tau=\tau_0}$)。

いま対象を波頂付近に限ると $\zeta_\tau = 0$ であるから $\partial \eta_1 / \partial \xi = 0$ 、 $\partial^2 \eta_1 / \partial \xi^2 = \zeta_{\tau\tau} / \omega_1^2$ となり、水面こう配、水面曲率ともに伝播にもなっていて変化しないことがわかる。また(14)式より、 $\zeta_\tau > 0$ のときすなわち水深の上昇期では $\partial \eta_1 / \partial \xi < 0$ で、 ξ が大きくなるに従い $|\partial \eta_1 / \partial \xi|$ は大きくなり洪水の前面が急峻になること、および $\zeta_\tau < 0$ すなわち水深の下降期には逆であって水面こう配が次第に緩やかになることが導かれる。

つぎに、図.2を参照してたがいに $\Delta\tau_0$ だけ隔てた2本の伝播直線 I、II の交点を ξ_c とすると、

$$\xi_c = \Delta\tau_0 \cdot \omega_1(\tau_0) \cdot \omega_1(\tau_0 + \Delta\tau_0) / \left\{ \omega_1(\tau_0 + \Delta\tau_0) - \omega_1(\tau_0) \right\} \text{ となる。いま、 } \xi_s = \lim_{\Delta\tau_0 \rightarrow 0} \xi_c \text{ とすると、}$$

$$\xi_s = \frac{\omega_1^2}{\left(\frac{d\omega_1}{d\tau_0}\right)} = \frac{3\omega_1\zeta}{2\zeta_\tau} \quad , \quad (\zeta_\tau > 0) \quad \dots\dots\dots (16)$$

であって、これより(14)式の分母が0になって水面こう配が無限になる点 ξ は ξ_s で与えられることがわかる。すなわち、 ξ_s は隣接する2つの伝播直線が交わる位置であって、この点で $\partial\eta_1/\partial\xi \rightarrow \infty$ になる。このような点では、(11)式による η_1 は一意的に決められず、流れにはいわゆる kinematic shock が現われることになりこれを考慮した扱いが必要である。いいかえれば、上述のような取り扱いは、 $0 \leq \xi < (\xi_s)_{\min}$ の範囲にのみ適用されることになる。なお、 $(\xi_s)_{\min}$ は(16)式より $(\zeta_\tau)_{\max}$ に対応する τ_0 。すなわち一般には ζ の上昇期の変曲点に対応する伝播直線上で現われることが予想される。

4. 摂動解

第1近似解(12),(13)式では波高の減衰は表わされない。つぎにこれを求めるため、摂動法を用いる。洪水流を対象とすると、(5)式で導入された $\lambda = h^*/x_*S_0$ は一般に1に比し十分小さいものとして、(3),(4)の解を求める。

$$\eta = \eta_1(\xi, \tau) + \lambda \eta_2(\xi, \tau) + \dots\dots\dots, \quad q = q_1(\xi, \tau) + \lambda q_2(\xi, \tau) + \dots\dots\dots (17)$$

と仮定して、(3),(4)式に代入し、 λ の次数ごとにまとめると、 λ の0次に関しては、(7),(8)式が導かれ、(17)式の η_1, q_1 は、3で述べた第1近似解に他ならないことがわかる。 λ の1次に関しては、

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (18) \quad , \quad -\frac{1}{F^2} \frac{q_1^2}{\eta_1^3} \left(\frac{2q_2}{q_1} - \frac{10}{3} \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) = L(\eta_1, q_1) \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる。(19)式に(10),(13)式を代入すると、 q_2 はつぎのように求められる。

$$q_2 = \omega_1 \eta_2 - \frac{3}{10} \omega_1 \eta_1 \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\eta_1} \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \quad \dots\dots\dots (20)$$

(20)式を(18)式に代入すれば、さきと同様にしてつぎの連立微分方程式が導かれる。

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\xi}{\omega_1} = \frac{d\eta_2}{\omega_1 \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \frac{\eta_2}{\eta_1} + G \right)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし

$$G = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{24}{125} \frac{\omega_1^2}{\eta_1} \right) \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{3}{10} \eta_1 \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\eta_1} \right) \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ゆえに $\partial\xi/d\tau = \omega_1$ 上で $\partial\eta_2/d\xi = -2/3 \left(\partial\eta_1/\partial\xi \right) \eta_2/\eta_1 + G$ である。(14),(15)式を代入し、 $d\xi/d\tau = \omega_1$ なる伝播直線上では η_1, ω_1 が一定であることおよび(13)式に留意し、かつ $\xi=0$ で $\eta_2=0$ とし て解き、 η_1 とまとめると

$$\eta = \zeta(\tau_0) \left[1 + \frac{9\zeta\lambda}{10(2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)} \left\{ \zeta_\tau \left(3 - \frac{14}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \log \left| 1 - \frac{2\zeta_\tau\xi}{3\omega_1\zeta} \right| - \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \frac{5\zeta_\tau^2 - 3\zeta\zeta_{\tau\tau}}{2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta} \cdot \xi \right\} \right] \dots\dots\dots (23)$$

となる。ただし、 $\tau_0 = \tau - \xi/\omega_1$ であり、 η_2 を考慮しても伝播曲線(直線)は変化しないことが知られる。

5. 逐次近似解

逐次近似法による第2近似解を η_2, q_2 とする(摂動解の η_2, q_2 とは異なる)。この解法による第2近似は、(4)式の右辺の $L(\eta, q)$ に第1近似解を用いて得られる。すなわち、

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (24), \quad 1 - \frac{1}{F^2} \frac{q_2^2}{\eta_2^{3/2}} = \lambda L(\eta_1, q_1) \quad \dots\dots\dots (25)$$

第1近似解を代入すれば、 $L(\eta_1, q_1) = (1 - 4/25 \omega_1^2/\eta_1) \partial \eta_1 / \partial \xi$ であるから、(25)式はつぎのようになる。

$$q_2 = F \eta_2^{3/2} \sqrt{1 - 2e_1} \approx F \eta_2^{3/2} (1 - e_1) \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\text{ただし} \quad e_1 = \lambda/2 (1 - 4/25 \omega_1^2/\eta_1) \partial \eta_1 / \partial \xi \quad \dots\dots\dots (27)$$

である。(26)を(24)式に代入すると、先と同様にしてつぎの連立微分方程式が導かれる。

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\xi}{\omega_2} = \frac{d\eta_2}{F \frac{\partial e_1}{\partial \xi} \eta_2^{3/2}} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{ただし} \quad \omega_2 = (5/3) F \eta_2^{3/2} (1 - e_1) = (5/3) q_2/\eta_2 \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。ゆえに、(28)式より $d\xi/d\tau = \omega_2$ 上で、 $d\eta_2/d\xi = (3/5)(\partial e_1/\partial \xi) \eta_2/(1 - e_1)$ である。したがって

$$\eta_2 = C \exp \left[\int_{C_2} \frac{3}{5(1 - e_1)} \frac{\partial e_1}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (C: \text{積分定数}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

である。ただし $\int_{C_2} d\xi$ は $d\xi/d\tau = \omega_2$ で表わされる伝播曲線 C_2 上の積分である。 C_2 は (29)式より明らかなように η_2 の関数となるから、(30)式の積分はこのままでは遂行できない。このためつぎの近似を設ける。すなわち C_1 を $d\xi/d\tau = \omega_1$ で表わされる伝播直線とすると、 $\int_{C_2} d\xi \approx \int_{C_1} d\xi$ と仮定する。さらに、 $1/(1 - e_1) \approx 1 + e_1$ とし、(14)、(15)式を代入し、 C_1 上で η_1, ω_1 が一定であることを用い、かつ $\xi=0$ で $\eta_2 = \zeta$ であるとして(30)式を計算するとつぎのようになる。

$$\eta_2 = \zeta(\tau_0) \exp \left[\lambda r_1(\xi, \eta_1) + \lambda^2 r_2(\xi, \eta_1) \right] \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\text{ここで} \quad r_1 = \frac{3}{10} \left[\left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta}\right) \frac{(5\zeta_r^2 - 3\zeta_{\tau\tau})(\zeta_r \xi - 3\omega_1 \zeta) \xi}{\omega_1 (2\zeta_r \xi - 3\omega_1 \zeta)} - \left(1 - \frac{8}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta}\right) \frac{\zeta_r^2 \xi}{\omega_1 (2\zeta_r \xi - 3\omega_1 \zeta)} \right] \dots\dots (32)$$

$$r_2 = \frac{3}{20} \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta}\right) \zeta_r \left[\left(1 - \frac{8}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta}\right) \frac{\zeta_r^2 (\zeta_r \xi - 3\omega_1 \zeta) \xi}{\omega_1^2 (2\zeta_r \xi - 3\omega_1 \zeta)^2} - \frac{(5\zeta_r^2 - 3\zeta_{\tau\tau})(4\zeta_r^2 \xi^2 - 18\omega_1 \zeta \zeta_r \xi + 27\omega_1^2 \zeta^2)}{3\omega_1^2 (2\zeta_r \xi - 3\omega_1 \zeta)^3} \right] \xi \dots\dots (32)'$$

であり、また $\tau_0 = \tau - \xi/\omega_1$ である。ここで $r_1 \approx \xi \times [0(\zeta_r) + 0(\zeta_{\tau\tau})]$ であり、また、 $r_2 \approx r_1 \times 0(\zeta_r)$ である。水深の変化が緩慢であるとき $0(\zeta_r) < 1$ と考えられるから $r_2 < r_1$ でありかつ $\lambda \ll 1$ としているから(31)式の exp の第2項は無視しうる程度とみなされる。よって逐次近似法の第2近似解は

$$\eta_2 = \zeta(\tau_0) e^{r_1(\xi, \eta_1)} \quad \dots\dots\dots (31)'$$

で与えられ、その伝播は(29)式で表わされることになる。

なお、洪水の波頂では $\zeta_r = 0$ であるから、このとき(23)式は $\eta_p = \zeta_p \left[1 + \frac{27}{250} \lambda \left(\frac{1}{\zeta_p^{3/2} F^2} - \frac{4}{9} \right) \frac{(\zeta_{\tau\tau})_p}{\zeta_p} \xi \right]$ (添字 p は波頂に関する量であることを表わす) となり、また、(31)'式は

$$(\eta_2)_p = \zeta_p \exp \left[\frac{27\lambda}{250} \left(\frac{1}{\zeta_p^{3/2} F^2} - \frac{4}{9} \right) \frac{(\zeta_{\tau\tau})_p}{\zeta_p} \xi \right] \quad \text{となり、それぞれ高橋および林の導いた結果と一致する。}$$

6. 数値シミュレーション

数値シミュレーションでは、洪水流を dynamic waves として扱かう方法をとった。すなわち、まず(1)、(2)式をつぎのような保存則系を表わす方程式にまとめる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{q} \quad \dots\dots (33)$$

ただし $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ u \end{bmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q' \\ g H_0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ g (S_0 - n^2 u^2 / h^{3/2}) \end{bmatrix}$ で, $H_0 = h + u^2 / 2g$ である。つぎにこれらの方程式を特性曲線による表示に改めたのち, 特性曲線⁴⁾の方向 (dynamic waves の伝播方向) に応じた x - 方向の差分化を行なって得られるつぎの関係⁵⁾によって計算を行なった。

$$\mathbf{U}_j^{n+1} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2C_0} (\tilde{\mathbf{A}} - uE) \right]_j^n (\mathbf{F}_{j+1}^n + \mathbf{F}_{j-1}^n - 2\mathbf{F}_j^n) + \mathbf{q}_j^n \Delta t \quad \dots\dots (34)$$

ここで $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} u & h \\ g & u \end{bmatrix}$, $C_0 = \sqrt{gh}$, E : 単位行列であり, また差分の格子は図・3 のとおりである。さて, (34) 式によってシミュレーションするのに, 上流端の条件として図 4 のような 2 種類の水深変化の小さい洪水を与え, また水路は十分長いものとして下流端には条件を課していない。なお, $n = 0.025 (\text{m}^{-1}\text{s})$, $S_0 = 0.002$, $\Delta x = 400 \text{m}$, $\Delta t = 20 \text{秒}$, とし, また計算ではすべて次元をもとへ戻した。

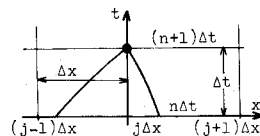
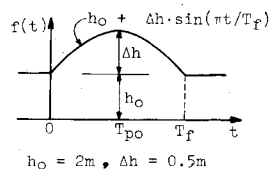


Fig. 3

図(a), (b)はそれぞれ case I, II の $x = 4.0 \text{ Km}$ および $x = 2.0 \text{ Km}$ における水深曲線を示したものである。ただし, この計算の場合, kinematic shock が最初に現われるのは図・4 よりみて洪水波の波先であり, その距離は(16)式より, case I については $x = 6.5 \text{ Km}$, case II については $x = 6.5 \text{ Km}$ であって, これより以遠には kinematic waves による方法はこのままでは適用されえない。また図には, 速水が導いたつぎの関係⁵⁾を単位図法によって計算した結果も示されている。



CASE I $T_F = 2 \text{hr}$
CASE II $T_F = 0.2 \text{hr}$

Fig. 4

$$h(x, t) = h_0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{W_0 x}{2\mu}\right) \int_{x/2\sqrt{\mu t}}^{\infty} \left\{ f\left(t - \frac{x^2}{4\mu\kappa^2}\right) - h_0 \right\} \exp\left[-\kappa^2 - \frac{(W_0 x)^2}{4\mu\kappa^2}\right] d\kappa \quad \dots (35)$$

ただし, $u_p = S_0^{1/2} (h_0 + \Delta h)^{3/2} / n$ とするとき, $w_0 = 5/3 u_p$, $\mu = (h_0 + \Delta h) u_p / 2S_0$ とした。

図 5 より, case I の場合, kinematic waves による解は波頂近くでシミュレーションの結果とよく一致しているのに反し, 波先ではかなり異なっている。これは, 波頂では(2)式の左辺がかなり小さく kinematic waves の仮定が比較的成立しやすいこと, および洪水波の波先は dynamic waves として伝播するという解析的な結果³⁾を表わしているものであろう。また case II の場合, 流れの変化は case I より急激でありそのため kinematic waves の仮定が成立しにくいためシミュレーション結果とかなりの

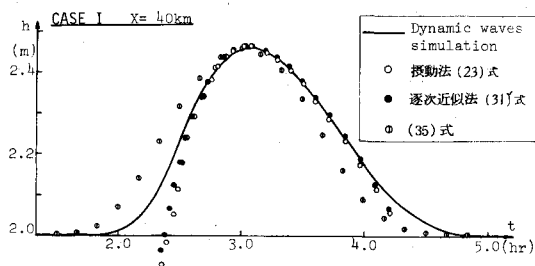


Fig. 5(a)

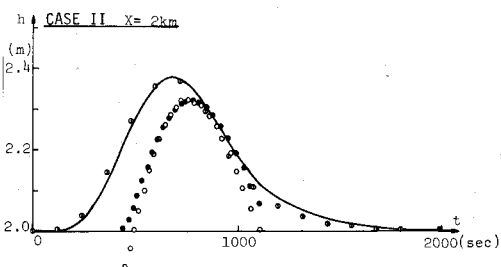


Fig. 5(b)

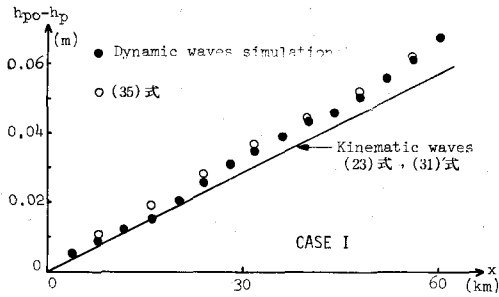


Fig. 6(a)

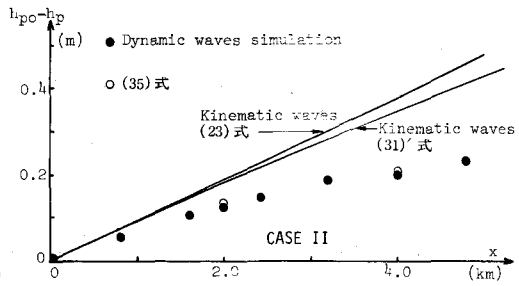


Fig. 6(b)

差を生じている（なお、 $T_* = T_f$ 、 $h_* = h_0$ としたとき、case I では $\lambda = 0.0313$ 、case II では $\lambda = 0.313$ である）。図 6 (a), (b) は波頂の水深 h_p の減衰を示したもので、とくに case II の場合に kinematic waves による解とシミュレーション結果の差が大きい。また図 7 (a), (b) は波頂の伝播曲線を表わしたものである（ T_p : 波頂の出現時間）が、これについても上と同様のことが言える。これらの図から、case I のように変化が緩慢なとき少なくとも波頂に関しては kinematic waves が有効に適用されるが、case II のような場合には kinematic waves は波頂に関しても適用されえないことがわかる。

図・8 はシミュレーション を長時間にわたって行なったときの波頂の減衰を示したものである。図中の実線は Lighthill らが導いた線型方程式の解であるが、case II では減衰が大きく比較的速く線型解に近づくことがみられる。

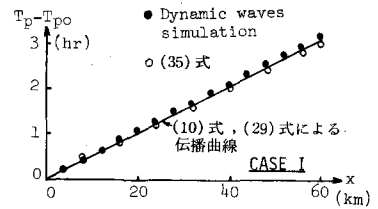


Fig. 7(a)

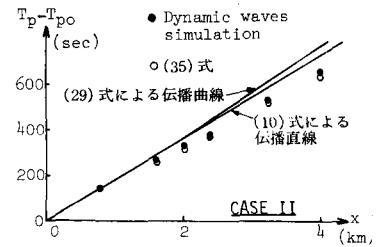


Fig. 7(b)

7. むすび

以上の結果から、 $\lambda \ll 1$ のときとくに波頂に関しては kinematic waves が有効に適用されるが、長距離の追跡には波先での過度な減衰および kinematic shock の発生があって、kinematic waves としての扱いは不都合なことがわかる。これらの点を改めるには、(35)式のような diffusive な効果を含めた方法が必要であると考えられる。

文 献

- 1) Hayashi, T.: Trans. J. S. C. E., No. 18, 1953
- 2) 高橋 保: 京都大学学位論文, 1971
- 3) Lighthill, M. J. and G. B. Whitham, Proc. Royal Soc. of London, Vol. 229, 1955
- 4) 岩佐義朗・井上和也・伊丹文雄, 昭和 48 年度土木学会年講概要 II-117, 1973
- 5) Hayami, S., Bulletin of D. P. R. I., Kyoto Univ., No. 1, 1951

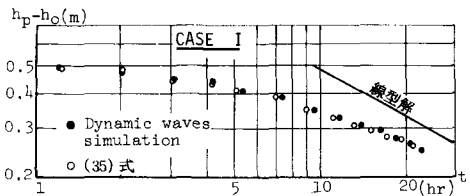


Fig. 8(a)

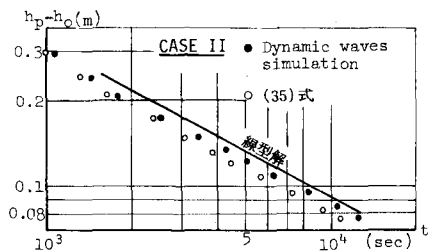


Fig. 8(b)