

東京工業大学工学部 正員 吉川秀夫

東京工業大学工学部 正員 ○池田駿介

1 まえがき

本稿は矩形断面および三角形断面を持つわん曲水路を流れが流下する時に発生する二次流を数値計算によって求めたものである。わん曲水路においては凹岸側に深堀れが存在し、横断形状が三角形に近い形になることが知られている。このような現象については二次流の存在が大きな要因を成していると考えられるが、三角形に近い断面形状を持つわん曲水路において生ずる二次流については全くと言ってよい程理論的な解明がなされていない。ここではそのような意味で矩形と三角形断面について二次流の速度分布を計算し、かつ矩形の場合については実験値との比較を行った。解法はナビエ・ストークスの運動方程式と連続の式を差分におきかえ、リラクゼーション法によって解こうとするものである。従って流れは層流状態が仮定されている。

2 運動方程式および連続式の誘導

まず誘導に当って注意した点が2つある。一つは運動方程式および連続式を二次流に関する渦度と流関数を用いて表示した点である。速度と圧力表示による運動方程式から二次流を計算するには横断方向の水面形を極めて精度よく見積ることが要求されるが、これは實際上不可能であり渦度表示を行って圧力項を消去しなければこの難点は克服することができない。他の一つはこれらの方程式を図2に示されているような傾いた座標系において表現した点である。これは矩形のメッシュを用いると三角形断面の場合には内岸側でメッシュが非常に粗くなり計算が不可能となることを防ぐためにとられた措置である。

流れが図1に示すように軸対称であり、 ϕ 方向に変化しないものとすれば、円筒座標系において無次元表示された連続式および運動方程式は夫々(1)、(2)のように表わされる。

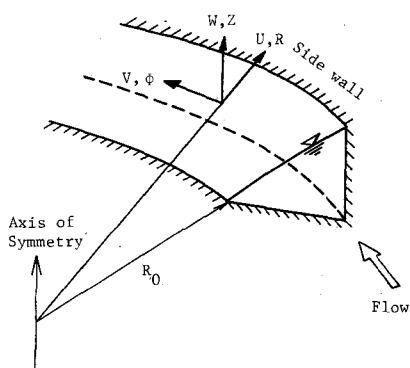


Fig.1. Schematic view of the model.

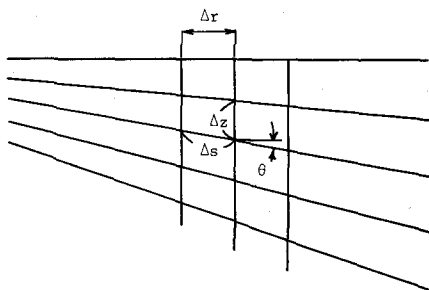


Fig.2. Coordinates system.

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = r \xi \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\xi}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} v^2 = \frac{1}{R_e} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \xi + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに

$$u = \frac{U}{V_o} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad w = \frac{W}{V_o} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \xi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$r = \frac{R}{R_o}, \quad z = \frac{Z}{R_o}, \quad R_e = \frac{V_o R_o}{\nu}$$

であり、 R_o = 内岸の曲率半径、 V_o = 水面における最大の主流方向速度である。図 2 に示されているような s - z 座標系では $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z}$ であるから $\frac{\partial}{\partial r}$ および $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ は夫々

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial s} - \tan \theta \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial^2}{\partial z \partial s} + \tan^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となる。これらを用いて(1)、(2)を座標変換すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial s} - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\xi}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} v^2 = \frac{1}{R_e} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - 2 \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial s} \right. \\ \left. + \tan^2 \theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \xi}{\partial s} - \tan \theta \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - \frac{\xi}{r^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - 2 \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial s} + \tan^2 \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \tan \theta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = r \xi \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial w}{\partial s} + \tan \theta \frac{\partial w}{\partial z}$$

である。

境界条件については以下の通りである。境界においては二次流の流関数の値は 0、水面を除く境界上では $u, w=0$ 、さらに水面では $w=0$ 、 $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ である。またリラクゼーション法を用いる為に境界上で ξ と φ の関係を与える必要があることから境界条件は

$$\begin{aligned} \text{水面: } \varphi = 0, \quad \xi = 0 \\ \text{底面: } \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \xi = \frac{1}{r} (1 + \tan^2 \theta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (5) \\ \text{側面 (} r=1, 1+b \text{): } \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \xi = \frac{1}{r} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \end{aligned}$$

によって与えられる。

式(3)に注目すると二次流を生ぜしめる原因は左辺の最終項、すなわち主流による遠心力の z 方向の勾配であることがわかる。二次流の速度分布を厳密に求めるには主流速度 v に関する運動方程式を(3)、(4)の他に考慮する必要があるが、そうすると三個の従属変数 ξ 、 φ 、 v を連立させて解かねばならなくなり数値計算は事実上不可能となる。ただしまず v を線型方程式で解いておき、それを用いて二次

流の成分 u , w を求め、さらにこれらの値を v に関する非線型方程式にもどして v の修正値を求めることは可能である。しかし曲率がかなり大きくならない限り層流の場合には主流の速度分布として直線水路の値を用いることができると考え、ここでは線型方程式を解いて得られた速度分布を用いた。このような場合には矩形断面に対して主流の速度分布は

$$v = Re \frac{g R_0}{V_0^2} \sin i \phi \left[hz - \frac{z^2}{2} - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2h}{n\pi} \right)^2 \frac{4}{n\pi} \left/ \cosh \frac{n\pi b}{4h} \right\} \cosh \frac{n\pi \zeta}{2h} \sin \frac{n\pi z}{2h} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

によって与えられる。三角形断面の場合には一般的な断面において速度分布を求めることは困難であるが図3のような場合には簡単な形、

$$v = \frac{9\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\zeta}{h} - \sqrt{3} \right) \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \frac{\zeta^2}{h^2} \right) \dots \dots (7)$$

で表わすことができる。ただし $\zeta = r - 1$ である。

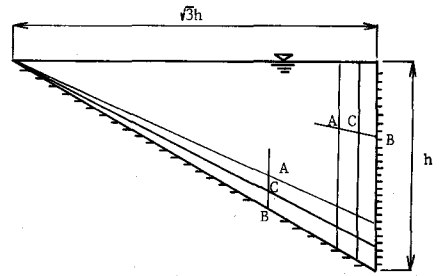


Fig.3. Triangular channel.

3 差分式の誘導と計算方法

偏微分を中央差分形式、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(i+1) - f(i-1)}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)}{\Delta x^2}$$

を用いて近似する。方程式(3), (4)を差分表示すると運動方程式から

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{Re} \left(2 \frac{\Delta z}{\Delta r^2} + 2 + \tan^2 \theta + \frac{\Delta z^2}{r^2} \right) - \frac{\Delta z}{2r^2} \{ \varphi(i, j+1) - \varphi(i, j-1) \} \right\} \xi(i, j) \\ &= \frac{1}{4r} \frac{\Delta z}{\Delta r} \{ \{ \varphi(i+1, j) - \varphi(i-1, j) \} \{ \xi(i, j+1) - \xi(i, j-1) \} - \{ \varphi(i, j+1) \\ & \quad - \varphi(i, j-1) \} \{ \xi(i+1, j) - \xi(i-1, j) \} \} + \frac{\Delta z}{r} v(i, j) \{ v(i, j+1) - v(i, j-1) \} \\ & \quad + \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\Delta z^2}{\Delta r^2} \{ \xi(i+1, j) + \xi(i-1, j) \} - \tan \theta \frac{\Delta z}{\Delta r} \{ \varphi(i+1, j+1) \right. \\ & \quad + \varphi(i-1, j-1) - \varphi(i+1, j-1) - \varphi(i-1, j+1) \} + (1 + \tan^2 \theta) \{ \xi(i, j+1) \\ & \quad + \xi(i, j-1) \} + \frac{1}{2r} \frac{\Delta z^2}{\Delta r} \{ \xi(i+1, j) - \xi(i-1, j) \} \\ & \quad \left. - \frac{\Delta z}{2r} \tan \theta \{ \xi(i, j+1) - \xi(i, j-1) \} \right\} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

を得る。連続式からは

$$\begin{aligned} & \left\{ 2 \frac{\Delta z^2}{\Delta r^2} + 2(1 + \tan^2 \theta) \right\} \varphi(i, j) = \{ \varphi(i+1, j) + \varphi(i-1, j) \} \frac{\Delta z^2}{\Delta r^2} \\ & \quad - \frac{1}{2} \tan \theta \frac{\Delta z}{\Delta r} \{ \varphi(i+1, j+1) + \varphi(i-1, j-1) - \varphi(i+1, j-1) - \varphi(i-1, j+1) \} + (1 + \tan^2 \theta) \\ & \quad \times \{ \varphi(i, j+1) + \varphi(i, j-1) \} - \frac{\Delta z}{2r} \frac{\Delta z}{\Delta r} \{ \varphi(i+1, j) - \varphi(i-1, j) \} \end{aligned}$$

$$+\frac{\Delta z}{2r}\tan\theta\{\varphi(i,j+1)-\varphi(i,j-1)\}-r\Delta z^2\xi(i,j) \quad \dots\dots\dots (9)$$

が与えられる。図2において示されるように Δz は r の関数であるが矩形断面の場合には一定値をとる。また矩形断面の場合には $\theta=0$ であるから(8),(9)式において $\tan\theta=0$ とおけばよい。

(6)式によって表現される境界条件については一考を要する。特に ξ と φ の関係については単に差分表示しただけではうまく結びつけられないのでここでは次のように考えた。いま底の点Bに非常に近く δ だけ隔った点Aにおける φ の値はテイラー展開により(図3参照)

$$\varphi_A=\varphi_B+\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_B+\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_B+O(\delta^3)$$

によって与えられる。ところが底においては(6)の条件により

$$\varphi_B=0, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_B=0, \xi_B=\left\{\frac{1}{r}(1+\tan^2\theta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right\}_B$$

であるから、これらの関係を上式に代入すると

$$\xi_B=2\varphi_A\frac{1+\tan^2\theta}{r\delta^2}$$

によって与えられる。側面においても同様な方法で ξ と φ の関係が与えられ、結局境界条件は

$$\begin{aligned} \text{水面: } \varphi_B=0, \quad \xi_B=0 \\ \text{底面: } \varphi_B=0, \quad \varphi_B=\varphi_C, \quad \xi_B=2\varphi_A\frac{1+\tan^2\theta}{r\delta^2} \quad \dots\dots\dots (10) \\ \text{側面: } \varphi_B=0, \quad \varphi_B=\varphi_C, \quad \xi_B=2\varphi_A\frac{\cos^2\theta}{r\delta^2} \end{aligned}$$

によって与えられる。ここに添字Bは境界上の値、添字Aは水面および底面においてはBから $2\Delta z$ だけ離れた格子点における値であり、側面においてはBから $2\Delta s$ だけ離れた格子点における値である。(10)式の関係を用いると境界上での ξ と φ の関係が簡単に与えられる。以上から計算の手順は、まず(8)において主流による遠心力を表わす項—右辺第二項—をすべての点について求めておき、 $\xi_1(i,j)$ をすべての i,j 点について求める。この時 $\varphi(i,j)$ は0とおく。つぎに得られた $\xi_1(i,j)$ を(9)に代入し $\varphi_1(i,j)$ をすべての i,j について計算する。このようにして求めた $\xi_1(i,j), \varphi_1(i,j)$ を再び(9)にもどし $\varphi_2(i,j)$ を求める。境界上の ξ_B を求める場合には(10)の関係を用いる。計算はこの繰り返しである。この計算においては境界上での渦度がある固定された値として与えられず、内側の流関数の値 φ の関数として与えられている。従って開いた形の境界条件となっている為に収束が非常に遅く収束の判定基準、

$$\frac{\sum_{i,j}\varphi_{k+1}(i,j)-\sum_{i,j}\varphi_k(i,j)}{\sum_{i,j}\varphi_{k+1}(i,j)} \leq 0.0002$$

を満足するまでには数百回の繰り返し計算を必要とする。ただし k は繰り返し回数である。用いた格子点数は計算機(HITAC 8700)の計算速度の能力、時間の制限を考え合わせて矩形断面の場合には、

51×26, 三角形断面の場合には31×31とした。

4 計算結果および実験値との比較

計算例として矩形断面については $R_0 V_0 / \nu = 500$, $b = 0.2$, $h = 0.1$ の場合、三角形断面については $R_0 V_0 / \nu = 500$, $b = 0.1732$, $h = 0.1$ の場合を夫々図4, 5, 6, 7に示した。図6, 図7を比較すればわかるように三角形断面の場合の方が二次流の値が小さく計算されている。また幅、水深あるいは曲率半径 R_0 を変えて計算を実行してみると幅、水深は大きいほど、 R_0 は小さいほど二次流の大きさが大きくなるという結果が得られた。

これらの図から二つの断面形における流れの様子の違いを知ることができるが、この相違から外岸側で河床の洗掘がおこる機構をある程度説明できる。まず最初に矩形断面を持つ彎曲水路を水が流れると仮定すると、図6から明らかなように流線のねじれは底部近くでは内岸側に向いているために土砂は外岸側から内岸側に向って運搬される。そうすると外岸側では土砂の補給がないために深くほれ、逆に内岸側では土砂の堆積がおこり河床は次第に傾いてくる。その結果図5のように外岸側では水深流速が増大し掃流力が増え、ますます河床が洗掘される。このような現象は内岸側への流れの掃流力と砂粒の抵抗が釣り合いの状態に達するまで続く。このようにしてよく知られているような三角形に近い形の彎曲水路の横断面が形成される。

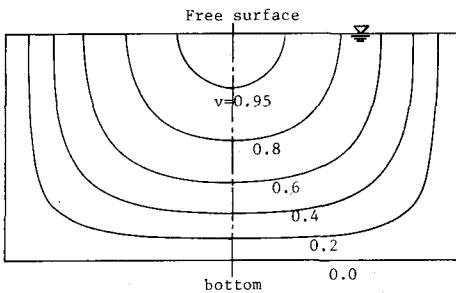


Fig.4. Velocity distribution of the main flow in a rectangular channel.

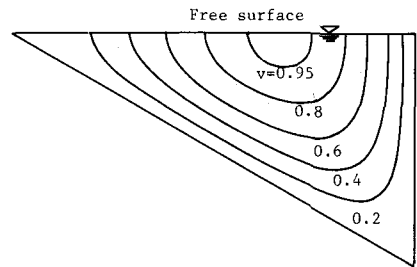


Fig.5. Velocity distribution of the main flow in a triangular channel.

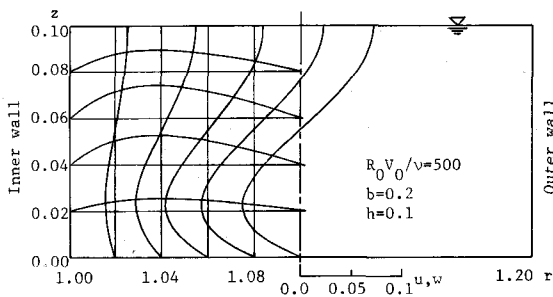


Fig.6. Velocity distribution of the secondary flow.

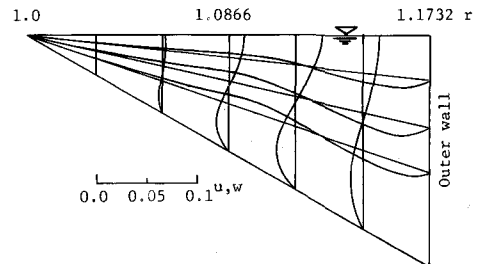


Fig.7. Velocity distribution of the secondary flow.

実験は $R_0 = 24\text{cm}$, $B = 6.0\text{cm}$, 中心角約 300 度のアクリル製円形水路で行われた。水深が 3.4cm , $V_m R / \nu = 320$ (V_m = 平均流速, R = 径深) の場合の実験結果が無次元化されて図8, 図9にプロットされ、同時にこの条件下での計算値が示されている。二次流の大きさは水と同密度の染料を流し、流跡線の角度を測定することによって測られた。図8には主流の速度分布が示されているが二次流によ

る上下層間の運動量交換のために速度分布が z 方向に一様化されていることがわかる。このことは逆に $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} v^2$ の値を底部付近で増加させ、従って二次流を図9においても示されているように底部付近で計算値よりもかなり大きくさせる原因となっている。この意味においては v の値として(6), (7)で表わされるような線型方程式の解を厳密に言えば用いることはできず、先に述べたように求められた二次流の計算値を用いて v の修正値を計算し、さらにこの値を用いて二次流の値を計算する必要がある。

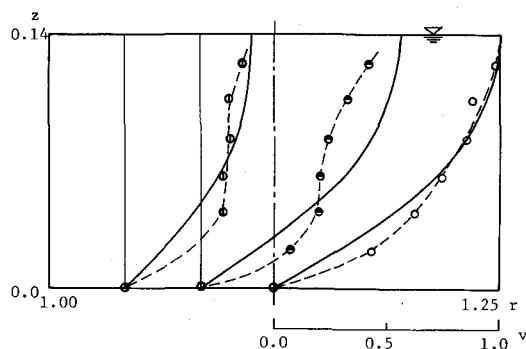


Fig.8. Comparison of theoretical values with experimental results. (main flow)

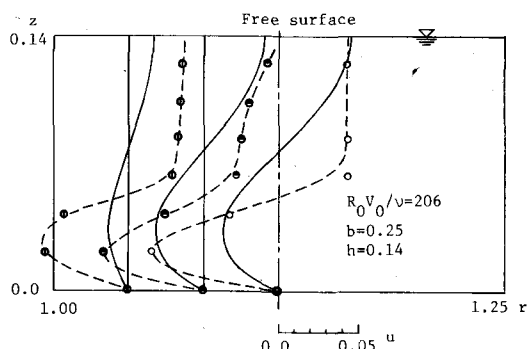


Fig.9. Comparison of theoretical values with experimental results. (secondary flow)

以上の議論の結果次の諸点が明らかになった。

- (1) 矩形断面における二次流は三角形断面のそれよりも大きくなる。
- (2) 曲率半径が小さくなる程二次流は大きくなる。
- (3) b/h の値がかなり大きくない限り二次流によって主流の z 方向の速度分布は修正され、速度分布は一様化される。

これらの計算によって断面形の変化に伴う流れの変化の一端をある程度知ることができた。最終的にはこれらの計算をふまえて彎曲水路の安定横断形状を調べてみたいと思っている。最後に実験に協力された本学大学院学生川村幸生氏に記して謝意を表わします。

— 参考文献 —

- (1) Kikkawa, H., S. Ikeda & Y. Kawamura, Secondary Flow in Curved Open Channels at the fully developed Region, Tech. Rep. 13, Dep. of Civil Eng., Tokyo Institute of Technology, 1972.
- (2) Pao, H. P., Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for Flows in the Disk-Cylinder System, The Physics of Fluids, Vol. 15, No. 1, 1972.
- (3) Rouse, H., Advanced Mechanics of Fluids, John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- (4) Chow, V. T., Open-Channel Hydraulics, McGRAW-HILL, 1959.