

1. はしがき

開水路における非定常現象の解析は、水理構造物の設計上とくに重要な課題となっている。開水路の不定流は、その基礎法則を表わす微分方程式が非線形であるためその解法が解析的に扱いにくく、何らかの形で数値解法によらなければならないのが現状である。そして、不定流の数値解析については、最近の電子計算機の発達に関連して多くの問題が解決されるようになり、数値解の安定性、誤差の評価、演算時間の短縮等に対して様々な工夫が加えられている。筆者は第12, 13回水理講演会⁽¹⁾⁽²⁾に特性曲線法にもとづく不定流の解析法について発表し、計算方法を提案してきた。この論文は、開水路の不定流の数値解析における特性曲線法について考察し、その適性と応用について説明したものである。

不定流の数値解析方法には、大きく別けて、基礎方程式を直接差分方程式に直して計算する直接法⁽³⁾と、特性曲線方程式に導びいて、その差分式によって計算する特性曲線法とがある。

直接差分法は、場所と時間を $x-t$ 平面においてその間隔を固定し、その各点における値を求めて行く方法であり、多くの研究が進められている。差分法は、距離間隔と時間間隔の取り方によって解が不安定になりやすく、そのため解の安定性、精度、演算時間の短縮のために工夫改良が行なわれている。そして、差分式の計算で既知量のみで解く*Explicit*法が安定性が悪いことから、くり返し計算を行なう*Implicit*法がとられるようになり、数多くの方法が考案されるようになった。

一方、特性曲線法は、特性曲線上に流れの状態を求めて行く方法で、急激な流れの変化においてもその解は安定で多くの不定流解析に利用されている。しかし、解が特性曲線上に求められるため、時間と場所を固定することができない不便さがある。なかには、特性曲線法を修正して固定した格子上に解を求める方法もとられているが⁽⁴⁾*Amein*によれば直接差分法の*Explicit*法より多少優れていると云うだけで特性曲線法の利点が失われ、解の安定性が悪くなると云われている。

特性曲線法は、基礎方程式を特性曲線方程式に導びき、それを差分式に直して計算するが*Explicit*法によって解く場合と*Implicit*法によって解く場合がある。また、筆者は特性曲線法に段波現象の解析を加えて解く方法を提案した。こゝでは、これらの3つの計算方法について考察し、実際に計算結果について比較検討を行なったものである。

2. 開水路における不定流の基礎方程式

開水路中の不定流を取扱うにあたって、水路を一樣な長方形断面の水路とし、摩擦抵抗は*Manning*の流速公式から与えられるものとする基本式は、

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + H \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \dots \dots (1), \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \left(\frac{n^2 U^2}{R^{4/3}} - i \right) = 0 \dots \dots (2)$$

となる。こゝに、 H :水深、 U :流速、 t :時間、 x :距離、 n :*Manning*の粗度係数、 i :水路勾配、 R :径深、

(1)(2)式より特性曲線方程式を導びくと

$$\frac{dx}{dt} = U \pm V \text{ の曲線上で, } d(U \pm 2V) = g \left(i - \frac{n^2 U^2}{R^{4/3}} \right) dt \quad \dots \dots (3)$$

となる。ただし、 $V = \sqrt{gH}$ とする。(3)式を解く方法として(2)式を差分式に直す。いま、図-1の既知の点AとBからC点の未知量を求める方法について説明する。水路をいくつもの短かい水域に分割し、各水域内の変化を(3)式から求める。各方法を示すと次のようになる。

Explicit 法

$$\left. \begin{aligned} (x_C - x_A) / (t_C - t_A) &= U_A + V_A, & (x_C - x_B) / (t_C - t_B) &= U_B - V_B \\ U_C + 2V_C &= U_A + 2V_A + g(i - if_A)(t_C - t_A) \\ U_C - 2V_C &= U_B - 2V_B + g(i - if_B)(t_C - t_B) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

ただし、 $if_A = n^2 U_A^2 / R_A^{4/3}$, $if_B = n^2 U_B^2 / R_B^{4/3}$, 添字 A, B, C はそれぞれの場所を示す。

未知量 x_C, t_C, U_C, V_C は、上式の4つの式から求めることができる。

Implicit 法

特性曲線の傾きをA, B点の値だけではなくC点の値を含めて求め、また水路の摩擦損失もAC間BC間のそれぞれ平均をとるものとすれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (x_C - x_A) / (t_C - t_A) &= (U_A + U_C) / 2 + (V_A + V_C) / 2 \\ (x_C - x_B) / (t_C - t_B) &= (U_B + U_C) / 2 - (V_B + V_C) / 2 \\ U_C + 2V_C &= U_A + 2V_A + g(i - if')(t_C - t_A) \\ U_C - 2V_C &= U_B - 2V_B + g(i - if'')(t_C - t_B) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

ただし、 $if' = (if_A + if_C) / 2$, $if'' = (if_B + if_C) / 2$

(5)式を解くためには、くり返し計算によって求めねばならない。

段波法

水路内の段波の伝播および波の変化を調べて特性曲線法に應用して次のように計算する。

$$\left. \begin{aligned} (x_C - x_A) / (t_C - t_A) &= (U_A + U_A') / 2 + (V_A + V_A') / 2 \\ (x_C - x_B) / (t_C - t_B) &= (U_B + U_B') / 2 - (V_B + V_B') / 2 \\ U_C + 2V_C &= U_A' + 2V_A', & U_C - 2V_C &= U_B' - 2V_B' \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

ただし、 $V_A' = V_A + \int_{x_A}^{x_C} (i - if_A) V_A^2 / (V_A^2 - U_A^2) dx$, $V_B' = V_B + \int_{x_B}^{x_C} (i - if_B) V_B^2 / (V_B^2 - U_B^2) dx$

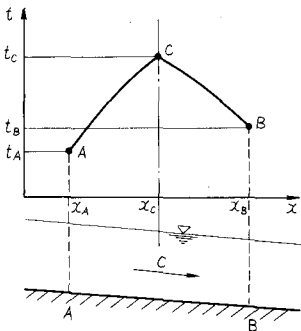


図-1 特性曲線の計算

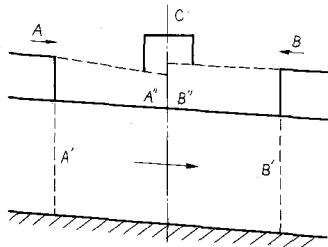


図-2 段波法の計算

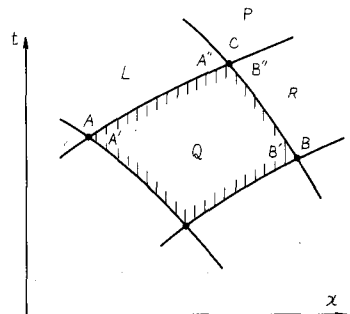


図-3 段波法におけるx-t平面

$$U_A' = V_A^2 U_A / V_A'^2, \quad U_B' = V_B^2 U_B / V_B'^2$$

こゝに、添字 A' , B' は図-2 のように段波が伝播する前面の状態を示し、 A , B は段波が C 点に到達した点での状態を示している。すなわち、図-3 に示す $x-t$ 平面において、特性曲線で囲まれた領域内の Q , L , R の周辺の値が既知量であるから、 C 点での x_0, t_0, U_0, V_0 が(6)式によって求まるもので *Explicit* の計算となる。

これらの3つの方法について実際に計算を行なってその結果を比較した。計算条件として水路は、巾 1 m 、長さ 8.8 m の長方形様水路で水路勾配を 0.001 とした。上流より 12 l/s から 100 l/s に流量変化を与え、その周期を数通りに変えた。下流端はゲートより越流させ、堰高を 14 cm とした。各計算方法で解析した結果は、演算時間は、1 ケース、 $3 \sim 40$ 秒であったが *Implicit* 法は *Explicit* 法の約3倍、段波法は約2倍の時間がかゝた。しかし、これらの3つの方法はほとんど同じ結果を示し、水路の長さを44分割、22分割、15分割にして計算したがその結果もほとんど同じ結果を示した。実験結果と比較してもいずれも良く一致した。これらの結果を見ると特性曲線法は非常に安定性のよい計算法であり、精度が悪いと云われている *Explicit* 法でも十分役立つものと考えられる。また特性曲線法は波の伝播にそって解が求まるが、条件によっては、特性曲線の傾きが伝播とともに大きくなって前の特性曲線と交差する場合がある。そのようなときは、ある点での時間経過が前後するような不都合なことが起るが、そのために解の安定性が悪くなったり誤差となるようなことはなかった。このようなことは特性曲線法を格子点で求める方法をとる場合に十分注意して処理する必要があることを示している。また、急激な流量変化を与えたような不定流解析の場合には段波法で計算することがより良いことがこれらの計算結果から分った。

3. 自然河川における不定流解析

一般の河川形状は、不規則であり、水路断面が複雑であるため、水路の流れはこれらの条件によって大きく影響される。したがって不定流計算を行なう場合、河川形状を河道にそって細かく分割し、各々の河川断面を忠実に計算に折込む方法がとられている。しかしこの方法による解析は、定常流における不等流計算においても水面形状がみだれて発散する場合があるように安定性が悪く、また特性曲線法では区間を固定することが難かしいのでこの方法をとりにくい。一方河川断面形状が一様と思われる部分で水路を大きく分割し、その間の河道を勾配、粗度、水路断面が一様な水路と仮定して計算する方法がある。そしてこのような水路が連続して河道を形成していると考えて不定流計算を行なうものである。この方法は、一様水路における特性曲線法の計算の安定性が良いことから都合のよい方法と考える。しかしこの方法で水路と水路の接合部における解析方法が必要である。こゝでは特性曲線法の段波法に断面変化部あるいは合流部、分岐部の解析方法について考察を加えたものである。

3.1 水路断面変化部の計算

はじめに水路断面変化部についての計算法を説明する。この計算法は、一様水路の場合と同様に段波が断面変化部において、どのように変化するかを実験水路を用いて詳細に調べ、その結果を特性曲線法の段波法による不定流計算に付け加えたものである。水路を流下する段波は断面変化部において一部は下流に伝播し一部は上流に反射する。そして断面変化部では上流と下流の水位差が生じる。

この水位差は不定流においても定常流における場合と同様の法則が適用できるものと仮定する。

定常流における断面変化部の運動量方程式および連続方程式を示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} g \rho b h^2 + \rho b h u^2 + 2 \rho g (h + Z/2) Z B + \rho g (B - b) H^2 &= \rho g B H^2 + \rho B H U^2 \\ b h u &= B H U \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

こゝに、 h, u, b : 上流水路の水深, 流速, 水路幅, H, U, B : 下流水路の水深, 流速, 水路幅, Z : 水路底の段落差, ρ : 流体の密度, g : 重力の加速度

(7)式を特性曲線方程式と組合せて, (6)式の U_0, V_0 を求める代りに次の式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} U_D - 2 V_D &= U_A' - 2 V_A', \quad U_0 + 2 V_0 = U_{B'} + 2 V_{B'} \\ B U_D V_D^2 &= b U_0 V_0^2 \\ B V_D^4 + 2 B U_D^2 V_D^2 &= B V_0^4 + 2 b U_0^2 V_0^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

添字は図-4に示す $x-t$ 平面上の位置を表わす。

(8)式は, 断面変化部で, 上流からの波と下流からの波が衝突して起る波を示している。(8)式の U_D, V_D, U_0, V_0 の4つの未知数は, (8)式の4つの式から連立に解いて求める。

ところで水路の断面変化部においては, 局部的に支配断面が生じて上流側に下流側の影響がおよぼさない場合が起る。

この場合の条件は図-5および6に示す。下流側水路の *Froude* 数が水路幅比における値以上になれば水路断面部に支配断面が起り, 下流側水路の影響は上流水路におよぼさない。すなわち, (8)式で求まった U_D, V_D から U_D/V_D を計算し, 水路幅比における図の *Froude* 数と較べて U_D/V_D の値が大きければ, (8)式で求まった U_0, V_0 の代りに, U_0/V_0 の値を拡大水路では, 1とし, 縮小水路では図-6の *Froude* 数として, 上流水路の下流端の条件とし, 下流水路は上流水路の流量を連続させて上流水路と下流水路を別々にして計算する。

以上が断面変化部の計算方法である。次に合流および分流水路の計算方法を示す。

3.2 合流および分流水路における計算

断面変化部と同様に, 合流水路および分流水路における段波の挙動について実験を行なった。

上流から伝播した段波は, 下流に伝播し, 一部は合流水路あるいは分流水路に伝播し, ある一部は上流水路に反射して行く, この部分における流れの状態は定常流における場合と同じであると仮定して, 運動量方程式および連続方程式を導びいた。図-7の記号を使えば,

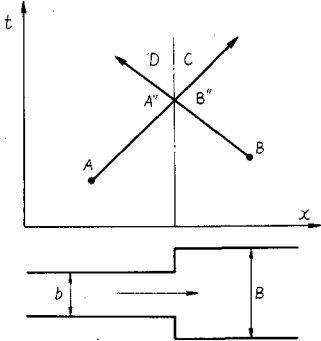


図-4 断面変化部の計算

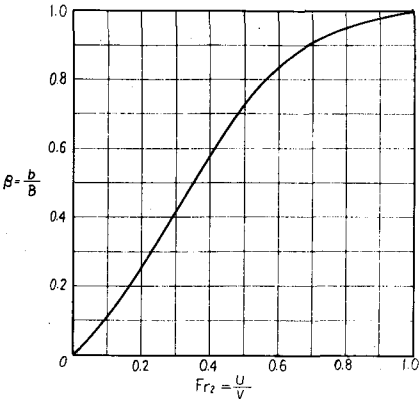


図-5 拡大水路の限界条件

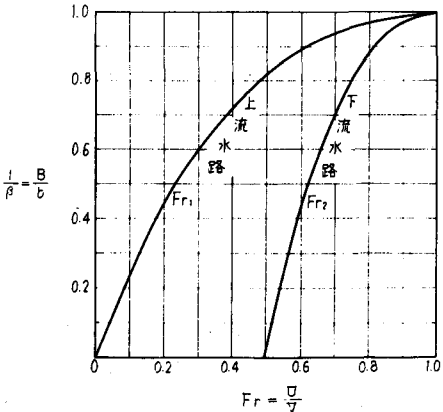


図-6 縮小水路の限界条件

$$\left. \begin{aligned} & \frac{g b h^2}{\cos \theta} + \frac{g b' h'^2}{\cos \theta'} + 2 \rho b h u^2 \cos \theta + 2 \rho b' h' u'^2 \cos \theta' = \\ & g B H^2 + 2 \rho H B U^2 + g h^2 \left(\frac{b}{\cos \theta} + \frac{b'}{\cos \theta'} - B \right) \\ & b u h + b' u' h' = B U H \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

こゝに、 h, u, b : 上流水路の水深、流速、水路幅、 h', u', b' : 合流水路の水深、流速、水路幅、 H, U, B : 下流水路の水深、流速、水路幅、 θ, θ' : 水路の合流角度。

(9)式に $V = \sqrt{gH}$ 、合流点での水深 h と h' は等しいと仮定し、図8の記号を用いて書き換えると、

$$\left. \begin{aligned} B V_C^4 + 2 b U_C^2 V_C^2 \cos \theta + 2 b' U_C^{*2} V_C^{*2} \cos \theta' &= B V_D^4 + 2 B U_D^2 V_D^2 \\ b U_C V_C^2 + b' U_C^* V_C^{*2} &= B U_D V_D^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

(10)式に特性曲線方程式を組合せて、合流水路における不定流の計算式とする。

$$\left. \begin{aligned} U_D - 2 V_D &= U_A^* - V_A^*, \quad U_C + 2 V_C = U_B^* + 2 V_B^*, \quad U_C^* - 2 V_C^* = U_B^{**} - 2 V_B^{**} \\ V_D &= V_C^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

(10)式(11)式を連立に解いて未知数 $U_D, V_D, U_C, V_C, U_C^*, V_C^*$ を求める。同様な方法により分流水路における計算式を導びくことができる。

以上の計算方法によって不定流の解析を行なうことができる。

4. 計 算 例

合流水路における計算方法を検討するため、不定流実験水路による実験を行ない、それと同じ条件において不定流解析を行なって計算結果と実験結果を比較した。実験設備は水路幅1m、長さ41m、水路勾配0.001の水路で上流20m間を幅70cmと30cmに仕切て合流水路とした。主水路に流量10ℓ/sから70ℓ/sの変動を与え、合流水路に20ℓ/sの一定流量を流して、水路内5ヶ所の水位を測定した。模型の略図は図8に示す。実験結果の比較を図-9に示す。実験と計算の結果はよく一致し、計算方法の妥当性を立証することができた。

5. む す び

開水路の不定流を解析する方法として種々の方法があるが、こゝでは特性曲線法について考察した。不定流に対する特性曲線法の使用はMassauにはじまり、多くの研究が進められている。

最近の電子計算機の使用とも関連して特性曲線法の解の安定性や精度について非常に優れていることがわかってきた。そこでこれらの計算方法において、特性曲線上での量の変化や、境界条件の物理

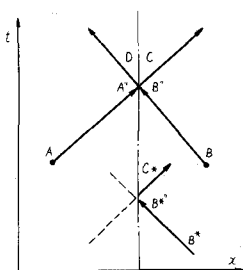


図-7 合流水路の計算

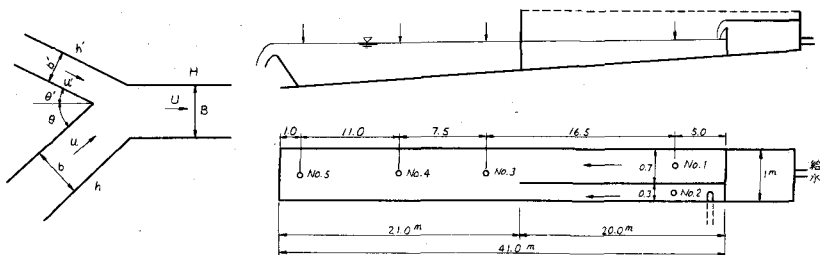


図-8 実験水路略図

的意味を解明するため、開水路の段波現象を解析し、これを取入れた特性曲線法の計算手法を提案したものである。この方法により、特に波高が急激に変化する不定流や、水路断面の急激な変化部、合流、分流水路における不定流について解析することができるものと考えられる。

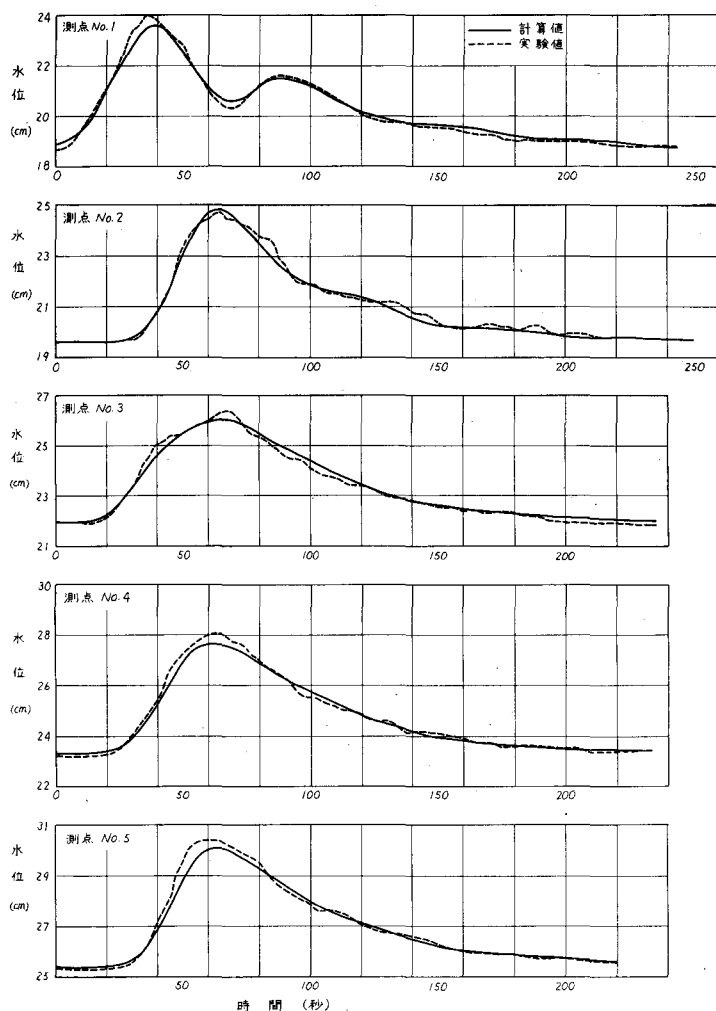


図-9 合流水路実験，計算比較

〔参 考 文 献〕

- (1) 秋元・丸岡：「貯水池内における洪水伝播の解析とダム放流操作に関する考察」 12回水理講演会講演集 1967年。
- (2) 是枝・秋元・丸岡：「河川における洪水伝播のシミュレーション」 13回水理講演会講演集 1968年。
- (3) 林 泰造：「河川の不定流について」 水工学に関する夏期研修会講義集 1966年。
- (4) M. Amein：「Stramflow routing on computer by characteristics」 Water resources research Vol.2. № 1. 1966年。
- (5) 藤原・志方：「開水路急拡部の水理学的性状に関する研究」 土木学会論文集 128 1966年