

1. はじめに : 沿岸海洋における流体の運動は非常に複雑であり、場合によっては密度の変化、境界面や自由表面の変化を考慮しなければならない。このことが、沿岸海洋における流体運動の計算を困難にしている。通常の *Euler* 法では、流れの場を格子網でおおって各格子点における状態変化を計算する。この方法では流体が大きな変位を伴う場合にも特別の計算上の困難はない。しかし、流体の移動や回転に際して *Euler* 量が不変でないこと、流れの変化に伴う細部の分解性がよくないこと、境界面の取り扱いが困難であることなどの欠点がある。他方、*Lagrange* 法は流れを多数のセルに分割し、流れを伴うセルの変形を追跡する。この方法では大きな変形やすべりがおこる場合の取り扱いがむづかしい。本文は、浅海における有限振幅波の非定常運動について斜面を遡上する波の問題を上述の手法の長所を採り入れた *Marker & Cell* 法によって検討したものである。

浅海における波の挙動を記述する非線形理論が数多く出ているにもかかわらず、実際の問題に対する応用性はこれらの理論における固有の制限や仮定によってかなりの制約をうける。また多くの非線形理論は定常状態の解を論じている。しかし、浅海領域においては必然的に波の非定常過程の解明が必要とされる。現在のところ、浅海における波を計算するために、数値計算手法が用いられ非線形項もある程度含まれている。たとえば、よく知られている *Stoker* の“浅海波理論”においては、水深が変化する水域での波の伝播状況は特性曲線法により計算できる。この方法による計算は静水圧分布ならびに任意の鉛直断面内で水粒子が一樣な速度をもつことが仮定される。しかしながら、斜面上での有限振幅波の挙動を検討するためには、圧力や速度の内部分布について考慮しなければならない。

Chan & Street は浅海における有限振幅波の非定常運動を解析するための計算手法を提示している。本文においては、*Chan* らの計算手法を基本として、二、三の改良を加えて斜面上および *Shelf* 上を遡上する波の変形問題を数値解析し、波の挙動について検討を加えたものである。

2. 基礎方程式と解法 :

波動を記述する基本式は、式 (1), (2) および (3) から成り立っている。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + g_x + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + g_y + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここに、 x, y : 直交座標軸, u, v : x, y 方向の流速成分, ϕ : 圧力と密度との比 ($\phi = p/\rho$), g_x, g_y : 物体加速度の x, y 成分, ν : 動粘性係数。

有限振幅波の運動を *MAC* 法によって計算する際、計算不安定解が起こる原因は数値解のための安定理論が不十分なためではなく、振幅の大きい自由表面での境界条件の与え方によるとの結論が、

Chan らによって指摘されている。MAC法における流速 (u, v) および圧力 (ϕ) は図-1に示す位置で定義されている。式(1), (2)より u, v の新しい値を求めるためには、 ϕ の値が必要となる。圧力を算定するには、 $D = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ を定義するとき、連続条件より $D = 0$ でなければならない。式(1), (2)より、圧力に対する方程式は次式のように求められる。

$$\nabla^2 \phi = -R, \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \quad (4)$$

$$\text{ここに, } R = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} + \frac{\partial D}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

式(1), (2), (4)および(5)はMAC法における基本方程式である。上記の方程式群を差分近似により解くための計算領域はく形状のセル群に分割する。各セルは流体で充ちたセル、流体を含まないセル、自由表面が存在するセル、壁のセルなどの名称をつけて区別されている。本数値実験においては、運動方程式の非線形項の差分における数値分散をなくす

ために Fromm が提唱した2次の *upstream* 差分方式を用いた。この Fromm の差分 *scheme* は速度分布の非物理的なひずみを失くし、また時間積分の過程における数値安定度を保証することが確認されている。

式(4)の数値反復解において、導入される誤差や差分近似に伴う固有の誤差および計算機による *round off* のために、式(5)における D 項は一般的にはゼロとならない。一方、連続関係より $D = 0$ が必要なので差分式の $(n+1)$ 次項で $D_{ij} = 0$ とする操作がこのMAC法において行なわれる。本計算においては、自由表面の変化が問題となるので、一連のマーカー粒子を水面上に配置させた。

計算方法としては、最初に流速の初期値を与える。自由表面の位置はわかっているため、式(4)より圧力が加速リープマン法などの方法によって求められる。次にこの圧力を用いて、流速の新しい分布が式(1), (2)より求まる。同時にマーカー粒子を新しい位置へ移動させることによって新しい自由表面の形状が定まる。すなわち、

$$x_k^{n+1} = x_k^n + u_k \cdot \delta t, \quad y_k^{n+1} = y_k^n + v_k \cdot \delta t$$

ここに、 u_k, v_k は k 番目の粒子の流速成分。 u_k, v_k の値はそれぞれ u, v の場から内挿することによって求まる。特に粒子が流速の最大(あるいは最小)付近にあるとき線形内挿式では誤差が大きくなる。図-2の粒子 k の流速成分 u_k は0点について Taylor 級数展開をすることにより求まる。

$$u_k \approx u_0 + (h/\delta x)(u_1 - u_3)/2 + (l/\delta y)(u_2 - u_4)/2 + (1/2)[(h/\delta x)^2 \cdot$$

$$(u_1 + u_3 - 2u_0) + (l/\delta y)^2(u_2 + u_4 - 2u_0) + (1/2)(h/\delta x)(l/\delta y)(u_5 - u_6 + u_7 - u_8) \dots \dots (6)$$

また、自由表面近傍での圧力の計算方式としては、セルの中心とは一致していない自由表面境界上で $\phi = \phi_a$ と設定することが望ましい。そのために、図-3の点 (i, j) に関して Taylor 級数展開し点 (i, j) での圧力を式(7)のように精度よく求める方法を採用している。

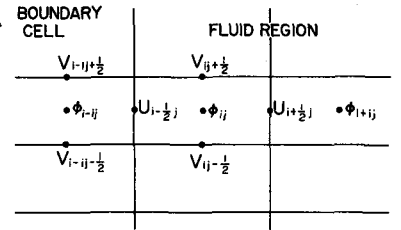


図-1 場の変数の配置

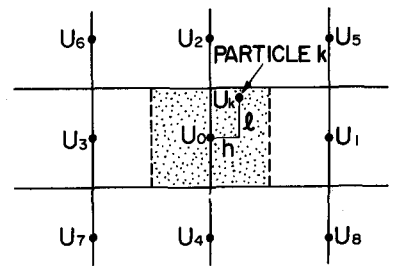


図-2 u_k の2次内挿

$$\phi_{i,j} = \frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4}{2(\eta_2 \eta_4 + \eta_1 \eta_3)} \left[\frac{\eta_3 \phi_1 + \eta_1 \phi_3}{\eta_1 \eta_3 (\eta_1 + \eta_3)/2} + \frac{\eta_4 \phi_2 + \eta_2 \phi_4}{\eta_2 \eta_4 (\eta_2 + \eta_4)/2} + R_{ij} \right] \quad (7)$$

この計算手法によって図-4の傾斜面を考えると、その取り扱いがむづかしくなる。この問題については、一定勾配の斜面とセルの対角線が一致するような浜形状を設定することによって解決できる。傾斜面上の流速成分および圧力は、それぞれセル内の運動量束の収収および質量保存関係を考慮することにより求められる。

3. 計算例とその結果

計算モデルとしては、大陸棚上の波の変形と一定水深を有する海域から傾斜面へ遡上する孤立波の場合を例として考えた(図-4および図-3 曲線状境界面付近の圧力の算定参照)。

3.1 大陸棚上の波の変形……………計算は一定水深を有する深海域で生じた波が傾斜面を遡上し、大陸棚の浅海部分を前進する場合について考える。採用した波の種類としては孤立波と正弦波の両者を考慮している。最初に孤立波の変形について考える。大陸棚上の水深は図-4に示すように深海域水深の $1/2$ にとられている。計算領域は 108×33 セルから成り立っており、 $\delta x = 1.0$ 、 $\delta y = 0.05$ である。初期の波高・水深比は $H_0/d_0 = 0.2$ の場合を考える。ここに、 H_0 は静水面上の孤立波の最大波高、 d_0 は海底が水平状態にある水域の静水深である。孤立波のクレストの初期の位置は図-4の左側の壁および右側の傾斜面の影響を受けないように設定してある。初期の波形としてBoussinesqの式を採用している。図-4は波が大陸棚を移行する各位置での波の形状を示す。大陸棚の傾斜面の影響を受けない波の形状は不変の状態を示す。斜面を遡上して変形を受けた波が大陸棚の浅海域へ入るとき、予期しない変形を受けるようになる。図-4によれば、大陸棚において孤立波の振幅が増大するにつれて、波形は徐々に対称性を失い、波峰が狭尖化することが注目される。このとき、より小さな波高をもつhump状の波が波の背後部に生じ、次第に主要波の背後で孤立的な波に発達していくようになる。そして $x/d_0 = 60$ の付近では、それぞれの振幅がほとんど同じ2つの孤立波へ分離する傾向が認められる。図-5は大陸棚浅海域における波頂下の流速成分(u, v)および圧力(p)に対する等値線を示す。波頂下の u は鉛直方向に一樣に分布している。Streetら(1968)は先に水理実験により、孤立波が大陸棚上で2つの波に変形することを見出している。図-6は、その後実

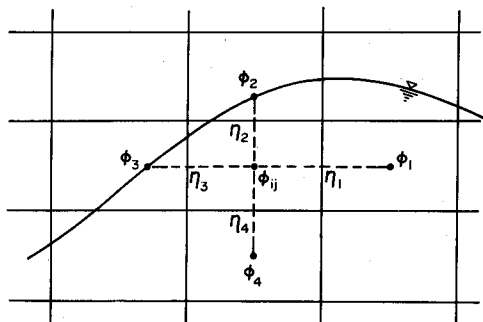


図-3 曲線状境界面付近の圧力の算定

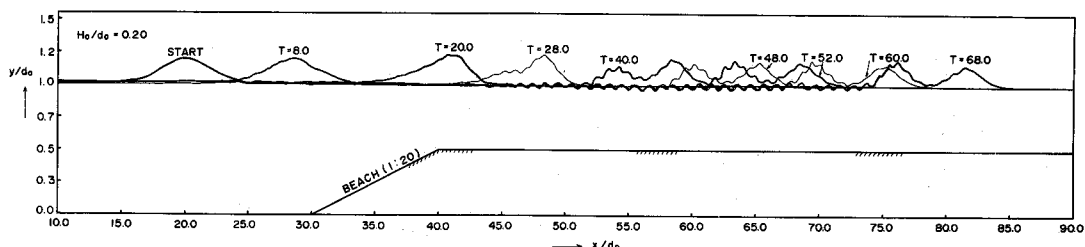


図-4 大陸棚上での孤立波の変形

施された *Madsen & Mei* (1969) による実験結果を示すもので、小規模な水路にもかかわらず第 2 番目のクレストの発生が認められる。

第 2 番目の例として、深海部における入射波が正弦波の場合を考える。正弦波は周期的な圧力パルスを水面に加えて発生させた。周期的な波形を与える位置は、図-7 に示すように $x = 0$ に設定してある。梶浦, *Madsen* らの線形波動理論によれば、反射係数は数%に過ぎなく、したがって斜面始端の位置を $x/d_0 = 15.0$ に選んである。

波の非線形性効果を表わす *Ursell* のパラメーター $\sigma = H\lambda^2/h^3$ (H : 波高, λ : 波長, h : 水深) は大陸棚における水深の減少によって増大し、大陸棚の浅海領域において σ の値は大きな値を示すようになる。このことから、波が大陸棚を前進するにつれて深海部での波形を維持できず、副次的なクレストが波の背後に発生する傾向を示している。図-7 は、深海部、大陸棚上での波の形状と各波頂下の流速成分 (u , v) および圧力 (p) に対する等値線を示す。特に、斜面の終端付近で、流速 v の著しい増加が観察される。

図-8 は大陸棚の斜面上における周期波の振幅変化を既往の研究結果とあわせて示したものである。図によれば、trough の高さは傾斜面に沿ってあまり変化しないこと、水深が減少するにつれて波の全振幅は線形波動理論による値よりも大きな値を示す。図には本解析結果のほか、*Madsen, Mei & Savage* (1970) による水理実験、解析結果とあわせて示してある。

本数値実験より求めた波高増大率は既往の研究結果と比して大きめにでている。これは、波高変化の最大・最小値を採用したことと、有限振幅波の非線形効果によるためと考えられる。

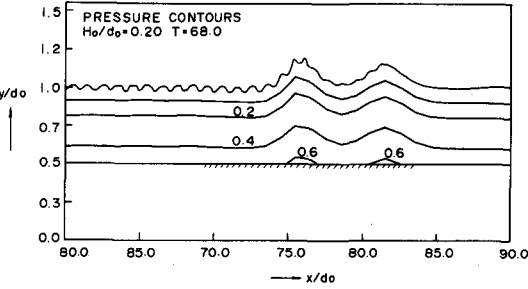
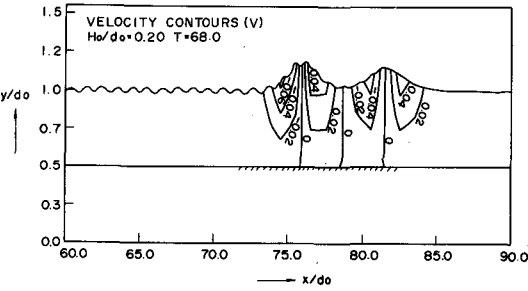
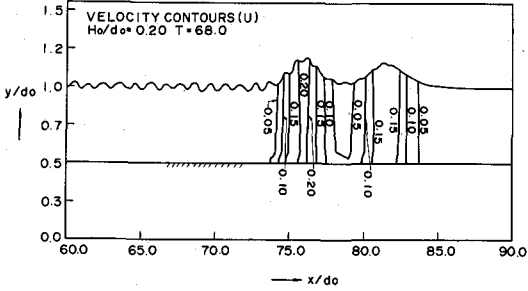


図-5 流速および圧力分布

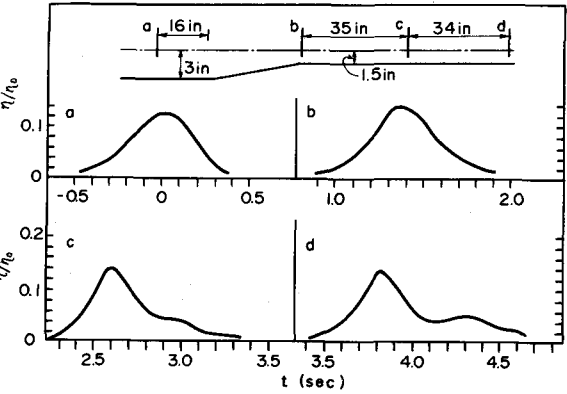


図-6 水理実験の結果 (*Madsen & Mei*)

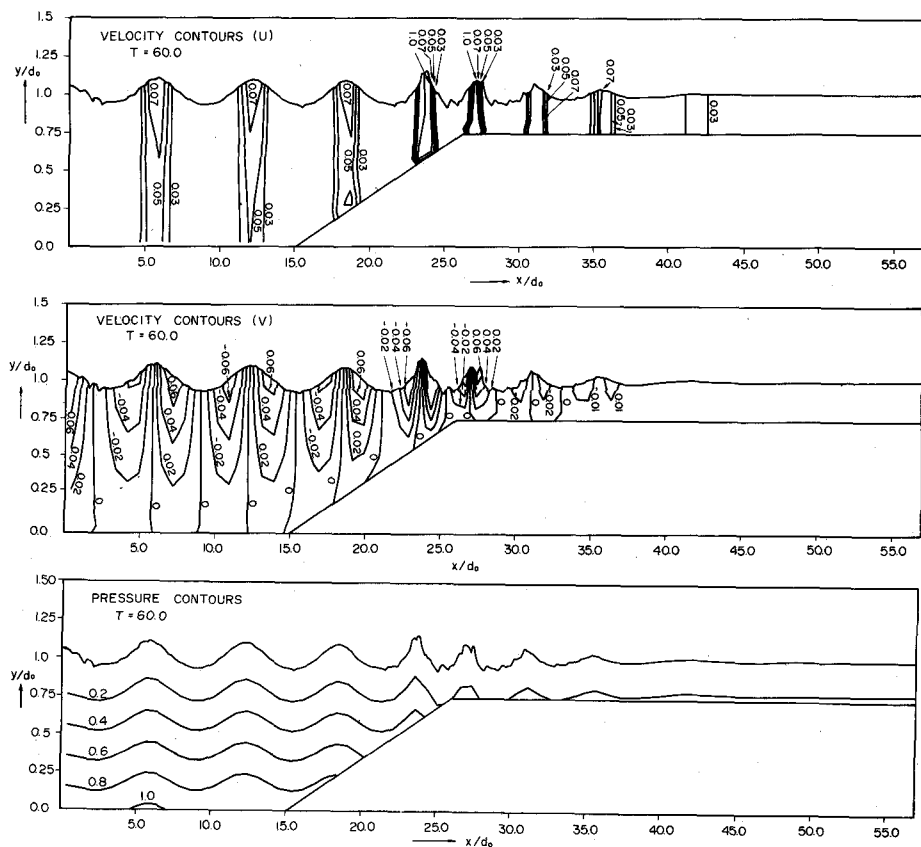


図-7 大陸棚における波の変形および流速・圧力分布

3.2 斜面を遡上する孤立波の変形

一定水深を有する海域から、傾斜面へ遡上する孤立波の場合を例として考えた。波の振幅の増幅率は傾斜面の勾配や初期の振幅に依存すると考えられるが、本実験では傾斜面の勾配として0.05(1:20)の場合を取り扱い初期の波の振幅としては $H_0/d_0 = 0.1, 0.2$ および0.3の3つのケースを考えた。波が斜面上を遡上する各位置での波の形状が、 $H_0/d_0 = 0.1$ の場合に対して、図-9に示してある。図から、波形が傾斜面上で徐々に対称性を失ない、波が汀線に接近するとき、波頂が急にとがり、前方へ巻き込む様相を呈する。

勾配1/20の斜面を遡上する孤立波の変形について、水深の減少に伴う波高の増大状

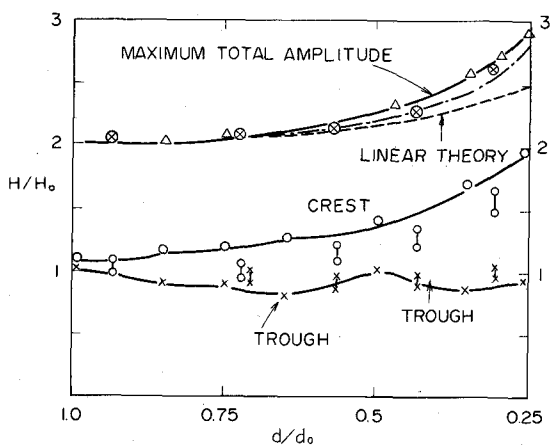


図-8 大陸棚傾斜面における周期波の振幅変化

○-○ crest
×-× trough
⊗ 全振幅の平均値
----- Madsenらによる解析結果

況を図-10に示す。この計算結果から初期の振幅・水深化(H_0/d_0)が小さい程、水深の減少による波高増大率が高いこと、従って孤立波の変形は初期の振幅に依存することが確認された。図には *Peregrine* や *Madsen & Mei* の解析, *Ippen & Kulin* や岸・佐伯による実験結果が併せて記入してある。本数値実験による水深の減少に伴う波高増大率は、これらの既往の研究成果にくらべて大きめに outcomes しているばかりでなく, *Madsen & Mei* の結果と逆の傾向を示している。

以上、3つの計算例を示したが、*MAC*法の数値実験手法をこの種の問題へ適用する場合の利点として以下のことが考えられる。

それは、各時刻での傾斜面を遡上する波の形状を追跡でき、また、水理実験では測定不可能と思われる流速成分(u, v)および圧力(p)の等値線を描くことが可能である。また任意断面で深さ方向にいくつかの流体粒子を配置させることによって、波の通過に伴う粒子の移動状況を検討し、その結果、流体の質量輸送の状況を知ることが可能となる。

4. あとがき

本研究は、大陸棚における密度躍層の内部波の挙動などを検討する目的で検討したものである。*MAC*法の数値実験手法をこの種の問題へ適用する第一段階として表面波への適用を試みたものである。以上の結果によれば、本計算手法は一連の波の研究に対して適用可能であることを示している。この手法による計算結果によると、*Cathod Ray Tube* スクリーン上に図を描いてこれを写真にとることができる。このようなディスプレイを用いたコンピューター・シミュレーションは、物理素過程を追求する解析研究への根拠を提示することが期待できよう。

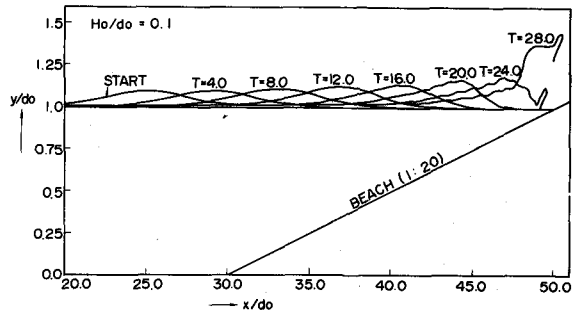


図-9 波の変形

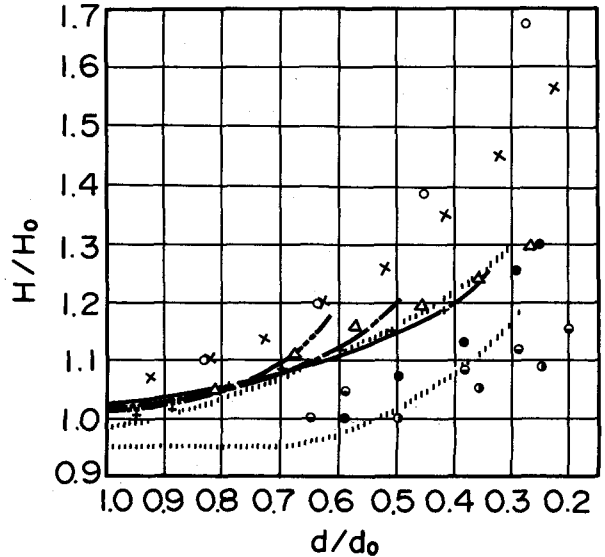


図-10 浜勾配 $1/20$ の斜面を遡上する孤立波の変形特性

本数値実験 ($H_0/d_0 = 0.1$ (○印), 0.2 (×印), 0.3 (△印))
Madsen & Mei の解析 ($H_0/d_0 = 0.1$ (—), 0.15 (---), 0.2 (---))
Peregrine の解析 ($H_0/d_0 = 0.1$ (+印))
Ippen & Kulin による実験 ($H_0/d_0 = 0.25 \sim 0.68$)
Kishi & Saeki による実験 ($H_0/d_0 = 0.043$ (●), 0.12 (●), 0.305 (●))