

京都大学 正 員 岩佐義朗
京都大学 学生員 ○田中伸和

はじめに

流れや波の内部機構の解明のため、実験や実測により流体内部における、水粒子速度、あるいは、圧力分布を知することは、測定技術の未発達により、現在では、まだ、不可能な場合が多い。そのため、技術改良がなされているが、ここでは、水面下の水粒子速度、および、圧力の時間的・場所的变化を、一度に知るため、流体の入った容器を静止状態より、水平方向に、周期的に振動させる非定常問題を考え、この問題を数学モデルにおきかえ、それを数値シミュレーションすることにより、水面下の流れの構造を知ろうとするものである。運動を静止状態より考えることにより、初期条件あるいは、境界条件の与え方の差異による影響をなくすることができ、水面波の発達状態から、砕波に至る過程における、水面下の状態を知ることができる。

1), 2)

従来、このような問題に対しては、完全流体の仮定のもとに解析されているが、その解は、低周波数成分のみから成っているため、高周波の卓越する砕波を取り扱うには、不十分である。そのため、ここでは、差分方程式によって、高周波成分を加味した数値解を得る。したがって、波の発達によって生ずる砕波現象は、差分方程式自身の不安定現象で表わし、数値誤差による解の不安定をなくするため、完全流体の仮定から得られる偏微分方程式、および、非圧縮・粘性流体の一般式であるN-S式の解析方法とその数値解の精度の改良について考察する。

(I) 完全流体としての取り扱い

1) 基礎方程式

重力のもとで、静止状態より、運動が始まるものと考え、これは、非回転運動とみなしうる。そのため、速度ポテンシャル ϕ を用いることによって、(Fig-1)のような条件のもとでの、x方向のみの周期変動に対する運動は、次式のように表わされる。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + g(d + \eta) - a_g \cdot x \sin \omega t, \text{ at } y = d + \eta$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v, \text{ at } y = d + \eta$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \text{ at Wall}$$

ここで、 $u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ 、 $v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$ は、それぞれ、x, y方向の流速を表わし、②式の右辺第3項は、周期変動によって生ずる外力を表わすものであり、 a_g 、 ω は定数とする。

また、nは、壁面の法線方向を表わし、gは重力の加速度、dは静止水深を表わす。

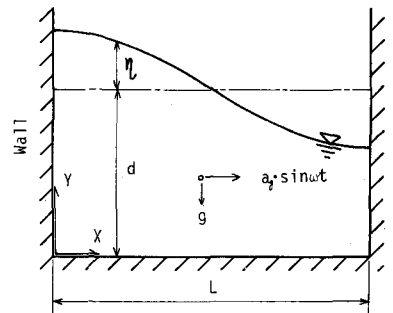


Fig-1 BOUNDARY CONDITION & NOTATIONS USED IN BASIC EQUATIONS

2) 差分方程式

基礎方程式を，高周波成分まで，数値解析するため，それぞれの式の差分化を行ない，それらの解の安定と精度について考察する。

(i) ②式の差分

②式の左辺を前進型差分で近似すると，次式のようになる。

$$\textcircled{5} \quad \phi_{sj}^{n+1} = \phi_{sj}^n + \Delta t \cdot \left\{ g \cdot (d + \eta) + \frac{1}{2} \left[(u_{sj}^n)^2 + (v_{sj}^n)^2 \right] - a_g \cdot j \cdot \Delta x \cdot \sin \omega t \right\}$$

ここで，添字 n, j は，それぞれ，時刻と距離のステップを表わし s は，水面を表わす。また， u_{sj}^n, v_{sj}^n は，格子点と水面とが，必ずしも一致しないため，つぎのようにして，外挿する。(Fig-2)

すなわち，完全流体の仮定のため，水面で $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ が成り立つ。そのため， u_s は水面下の流速より

$$\textcircled{6} \quad u_s = \frac{1}{\Delta y \cdot (\Delta y + 2 \cdot \Delta \eta)} \left[(\Delta y + \Delta \eta)^2 \cdot u_1 - \Delta \eta^2 \cdot u_2 \right]$$

で求め，また， v_s は水面上，および，水面下の速度ポテンシャルを用いて，次式により求める。

$$\textcircled{7} \quad v_s = \frac{1}{\Delta y \cdot \Delta \eta \cdot (\Delta y + \Delta \eta)} \left[(\Delta y + \Delta \eta)^2 \phi_1 - \Delta \eta^2 \cdot \phi_2 - \Delta y \cdot (\Delta y + 2 \cdot \Delta \eta) \cdot \phi_s \right]$$

(ii) ③式(双曲型偏微分方程式)の差分

③式の右辺は，近似度と安定性には関係しないため，ここでは， $v = 0$ の場合について考察する。いま， u を一定とすると，③式の厳密解は，初期値として， $e^{i \cdot k \cdot x}$ を考えると，次式のようになる。

$$\textcircled{8} \quad \eta = \text{EXP}(-i \cdot k \cdot u \cdot t) \cdot \text{EXP}(i \cdot k \cdot x) \quad (k: \text{波数})$$

そのため，時刻が Δt だけ進んだ場合には，次のような関係が成り立つ。

$$\textcircled{9} \quad \frac{\eta(t, x)}{\eta(t + \Delta t, x)} = \text{EXP}(i \phi_0) \quad (\phi_0 = -k \cdot u \cdot \Delta t: \text{位相角})$$

また，③式の任意の差分方程式に対して，初期値として， $e^{i k j \Delta x}$ を考えると，

$$\textcircled{10} \quad \frac{\eta_j^n}{\eta_j^{n-1}} = \hat{Q} = |\hat{Q}| \cdot \text{EXP}(i \phi)$$

なる関係が成り立つ。ここで， $\alpha = u \cdot \Delta t / \Delta x$ ， $\theta = k \cdot \Delta x$ を用いると， $\phi_0 = -\alpha \cdot \theta$ となり，さらに， $|\hat{Q}|$ ， ϕ も α ，および， θ で表わされる。また，添字 n, j は，(i)と同じものを表わす。

したがって，差分方程式の数値解が，もとの微分方程式の厳密解の近似と，なりうるためには， $|\hat{Q}| \approx 1$ ， $\phi \approx \phi_0$ なる関係が成り立つ必要があり，また，差分解が強安定であるためには，⑩式より， $|\hat{Q}| \leq 1$ でなければならないことがわかる。

そのため，つぎに，通常，双曲型，あるいは，放物型偏微分方程式の差分モデルとして，よく用いられているものの中で，とくに，陽型のものについて，それぞれ， $|\hat{Q}|^2$ と $\Delta \phi = \phi_0 - \phi$ の大きさを比較するため，その変化を， α ，あるいは， θ に対して求めると，(Fig-3~Fig-6)になる。また，それぞれの曲線は，Table-1のような差分モデルを表わす。

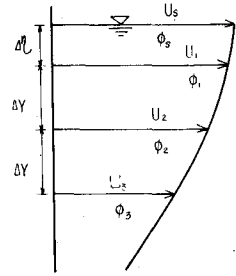


Fig-2 DEFINITION OF VELOCITY AT WATER SURFACE

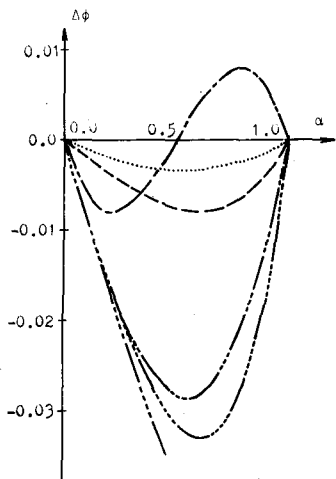


Fig-3 $\theta = 45^\circ$

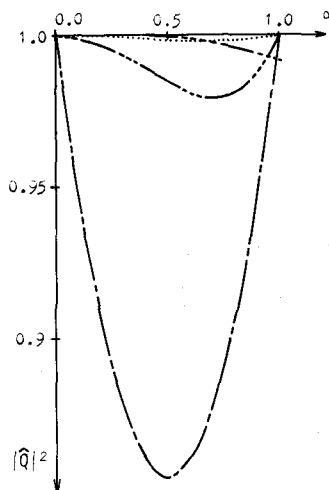


Fig-4 $\theta = 45^\circ$

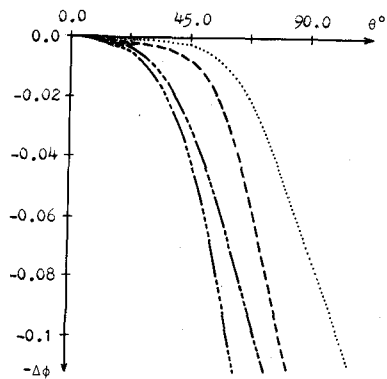


Fig-5 $\alpha = 0.5$

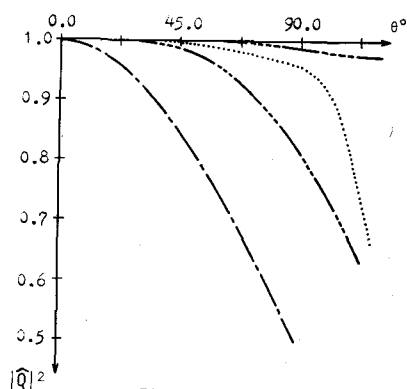


Fig-6 $\alpha = 0.5$

Order	Curve	Scheme
first	————	Exact Solution
	-----	One Sided
second	-----	Friedrich
	-----	Lax Wendroff
	-----	Crowly's Second
fourth	-----	Leap Frog
	-----	Crowly's Fourth
	-----	Roberts weiss' Fourth
	-----	Roberts Weiss' Combined
	-----	Fromm's Fourth

Table-1

また、 $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = 0.2$, $u = 1.0$ で、初期値として、 $10 \cdot e^{-x^2}$ を与えた場合の、それぞれの差分モデルから得られる数値解は、(Fig-7) のようになる。一般に、 u は一定ではなく、 t, x の関数であるので、 $-1 \leq \alpha \leq 1$ になる。そのため、 α の変化に対して、 $|\hat{Q}|^2$, $\Delta\phi$ の値が、それぞれ 1, 0 に近くなる差分モデルが、もっとも近似がよくなる。ここでは、(Fig-3) ~ (Fig-7) より、③式の差分モデルとして、Fromm's fourth order scheme³⁾ を用いることにする。

すなわち、

$$\textcircled{3} \quad \eta_j^{n+1} = \eta_j^n - (F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

ただし

$$F_{j-\frac{1}{2}}^n = \alpha_{j-\frac{1}{2}}^n \left\{ A_{11} (\eta_{j-1}^n + \eta_j^n) + A_{21} (\eta_{j-2}^n + \eta_{j+1}^n) \right. \\ + (\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 \left\{ A_{12} (\eta_{j-1}^n - \eta_j^n) + A_{22} (\eta_{j-2}^n - \eta_{j+1}^n) \right\} \\ + (\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n)^3 \left\{ A_{13} (\eta_{j-1}^n + \eta_j^n) + A_{23} (\eta_{j-2}^n + \eta_{j+1}^n) \right\} \\ \left. + (\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n)^4 \left\{ A_{14} (\eta_{j-1}^n - \eta_j^n) + A_{24} (\eta_{j-2}^n - \eta_{j+1}^n) \right\} \right\}$$

ここで、

$$A_{11} = -\frac{7}{12}, A_{12} = \frac{15}{24}, A_{13} = -\frac{1}{12}, A_{14} = -\frac{3}{24} \\ A_{21} = -\frac{1}{12}, A_{22} = -\frac{1}{24}, A_{23} = \frac{1}{12}, A_{24} = \frac{1}{24}$$

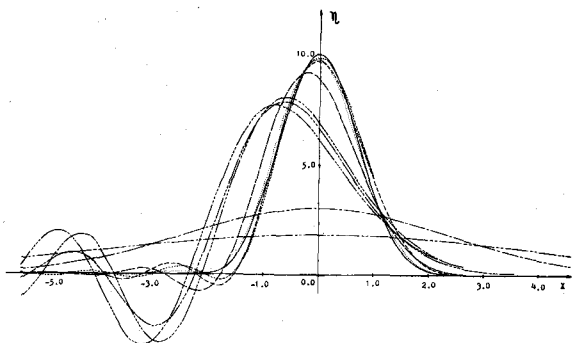


Fig-7 NUMERICAL SOLUTION FOR CONSTANT CONVECTIVE VELOCITY
 $\Delta T = 0.1, \Delta X = 0.2, U = 1.0, T = 50.0$

III ①式（楕円型偏微分方程式）の差分

通常、楕円型偏微分方程式を逐次代入法で解く場合、収束のはやい加速リープマン法が、よく用いられる。すなわち、(Fig-8)のような計算方向をとると、(i, j)格子点での値は、

$$\textcircled{12} \quad \phi_{ij}^{(n+1)} = \phi_{ij}^{(n)} + \alpha \left\{ \beta (\phi_{i+1j}^{(n)} + \phi_{i-1j}^{(n)}) + r (\phi_{ij+1}^{(n)} + \phi_{ij-1}^{(n)}) - \phi_{ij}^{(n)} \right\}$$

$$\text{ここで,} \quad \beta = \frac{1}{\Delta x^2 \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right)}, \quad r = \frac{1}{\Delta y^2 \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right)}$$

で求められる。添字は、i : x方向のステップ、j : y方向のステップ、n : 繰返し回数を表わし、 α は、1.0 ~ 2.0の値をとる、加速係数を表わす。

さて、⑫式において、もっとも収束のはやくなるように、 α を決定するには、つぎのように考える。

すなわち、いま、 $\Delta x = \Delta y$ として、⑫式の $\hat{Q}$ を求めると

$$\textcircled{13} \quad \hat{Q} = \frac{2(1-\alpha) + ae^{i\theta}}{2 - ae^{-i\theta}} \quad (\theta = k \cdot \Delta x)$$

となり、 $|\hat{Q}|^2$ は、つぎのようになる。

$$\textcircled{14} \quad |\hat{Q}|^2 = \frac{(\alpha-2)^2 + 4\alpha^2(1-\cos\theta) \{ \alpha^2 + 4\cos\theta(1-\alpha) \}}{(4 + \alpha^2 - 4\alpha\cos\theta)^2}$$

したがって、⑭式より、任意の α に対して、波数kの成分は、1回の演算によって、 $1-|\hat{Q}|$ だけ、減衰することが分かる。さらに、 α の表わす意味を考えると、これは2) - (ii)における $\alpha (= \frac{u \cdot \Delta t'}{\Delta x})$ と同様のものとなるため、 α を大きくすることは、 Δt を大きくするのと同じになる。

そのため減衰の割合は、 $\alpha(1-|\hat{Q}|)$ で定義できる。いま、 $0 \leq \theta \leq \pi$ に対して、減衰率を計算すると、(Fig-9)のようになる。この図より、 θ が0に近くなるに従って、減衰率は、 α の2の近くで最大値をとることが分かる。このことは、低波数成分、すなわち、波長の長い成分の減衰率は、 α を2の近くにとることによって、大きくなることを意味する。

そのため、(30, 30)の格子内で、4辺に1を与え、中央で0になる①式の解を得るため、許容誤0.01, $\Delta x = \Delta y = 0.25$, で⑫式を計算すると、(Fig-10)のようになる。 $\alpha = 1.8$ で繰返し回数が最小になり最も収束のはやくなるから、ここでは $\alpha \approx 1.7$ の値を用いて、⑫式の計算を行なうことにする。

IV ④式の差分

格子点(i, j)が、壁面上を表わし、格子点(i-1, j)が、壁の内部を表わす場合、④式が成り立つためには、 $\phi_{i-1j} = \phi_{i+1j}$ になる。

したがって、⑫式は、壁面上では、つぎのようになる。

$$\textcircled{15} \quad \phi_{ij}^{(n+1)} = \phi_{ij}^{(n)} + \alpha \left\{ 2\beta \phi_{i+1j}^{(n)} + r (\phi_{ij+1}^{(n)} + \phi_{ij-1}^{(n)}) - \phi_{ij}^{(n)} \right\}$$

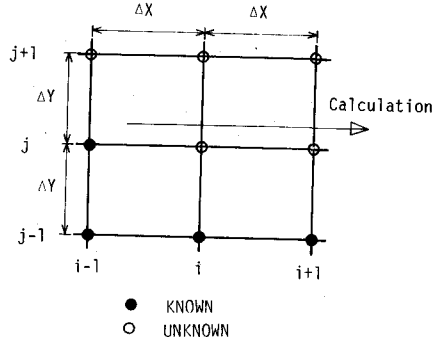


Fig-8 SCHEMA OF eq. (12)

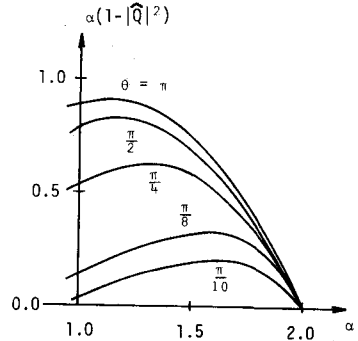


Fig-9 VALIATION OF $\alpha(1-|\hat{Q}|^2)$

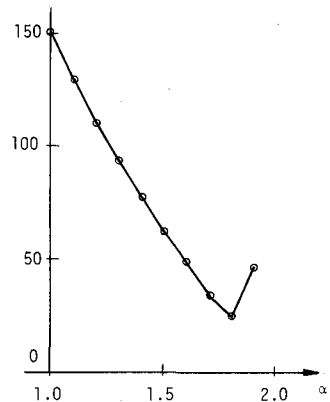


Fig-10 RELATION OF α & n

(II) 非圧縮・粘性流体としての取り扱い

非圧縮・粘性流体の運動は、N-S式で表わされる。ここでは、N-S式の数値解析法であるSUMMAC法⁴⁾を用いて、x方向の外力 $F_x = a_g \cdot \sin \omega t$ に対する粘性流体の挙動の解析を行なう。しかし、この差分方程式は、非線型になるため、(I)-(II)、(III)で行なった線型安定解析が用いられない。そのため、ここでは、Hirt⁵⁾らが行なったように、打ち切り誤差を評価することによって、数値解の安定、および、精度を吟味する。

すなわち、つぎのような偏微分方程式を考えると

$$\textcircled{9} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\delta, \epsilon: \text{定数})$$

この式の厳密解は、つぎのようになる。

$$\textcircled{10} \quad u = \sum_k r_k e^{-\delta k^2 t} e^{ik(x - \epsilon t)}$$

したがって、 $\textcircled{9}$ 式の初期値として、 $x=0$ で対称な関数を考えると、 $\textcircled{10}$ 式より、時刻が進むに従い、解は、 $\epsilon > 0$ で、xの正の方向に、 $\epsilon < 0$ では、負の方向にひずむことが分かる。(Fig-11)

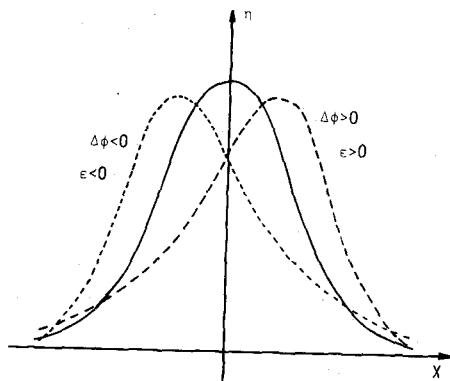


Fig-11 SCHEMATIC EXAMPLE OF NUMERICAL SOLUTION FOR SIGN OF $\Delta\phi$ or ϵ

また、(I)-(II)の $\Delta\phi$ は、 $\Delta\phi > 0$ では、 $\phi_0 > \phi$ になり、数値解が、もとの微分方程式の解よりも、はやく下流へ伝わるため、数値解は、下流側にひずみ、とくに高周波成分のものが、はやく伝わるため高周波の振動が、下流側に生ずる。 $\Delta\phi < 0$ では、上流側に、その現象が表われる。

さらに、 $\textcircled{9}$ 式の δ は、 $\textcircled{9}$ 式の減衰(拡散)を表わし、また、 $\textcircled{9}$ 式の $|\hat{Q}|$ も、差分方程式の解の減衰を表わす。そのため、(Fig-7)は、 $\Delta\phi$ 、 $|\hat{Q}|$ の影響を表わすことは、(Fig-3)~(Fig-6)より、分かる。

いま、 δ 、 ϵ が、差分方程式を、差分の中心でテイラー展開した場合の、2次、および、3次の微分項にかかる係数を表わすものとすれば、 δ 、 ϵ と $|\hat{Q}|$ 、 $\Delta\phi$ とは、つぎのように関係づけられる。

$$\textcircled{11} \quad |\hat{Q}| < 1 \leftrightarrow \delta > 0, \quad |\hat{Q}| > 1 \leftrightarrow \delta < 0$$

$$\textcircled{12} \quad \Delta\phi > 0 \leftrightarrow \epsilon > 0, \quad \Delta\phi < 0 \leftrightarrow \epsilon < 0$$

したがって、一般の放物型偏微分方程式の差分モデルの解の精度は、 $\delta \approx (\text{拡散係数})$ 、 $\epsilon \approx 0$ によって、評価することができることになる。

そのため、(Table-2)の条件で、一次元拡散式

$$\textcircled{20} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

の数値解を求めると、(Fig-12)のようになる。すなわち、この図より、 δ 、 ϵ の大きさによって、差分モデルの解の精度を評価することが分かる。

この方法を、SUMMAC法に用いて、SUMM

Scheme	ΔT	ΔX	δ	ϵ	Curve
Space Center	0.05	1.0	0.975	-0.116	
	0.2	1.0	0.9	+0.04	----
One Sided	0.1	1.0	1.45	-0.065	----
	0.2	1.0	1.4	+0.04	----

Table-2

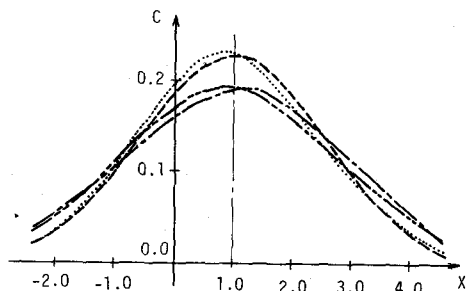


Fig-12 NUMERICAL SOLUTION OF eq. (20) AT $T=1.0$ UNDER INITIAL CONDITION $\exp(-x^2)$

AC法における δ の値を, u, v, p の時間に対する変化率が, x, y 方向に対するものより小さいとして計算すると, つぎのようになる。

$$\textcircled{2} \quad \delta \approx \nu - \frac{\Delta t}{2} \cdot u^2 \quad (\nu: \text{動粘性係数})$$

したがって, 差分解の精度を向上させるためには, 時間間隔 Δt は, つぎのように,

$$\textcircled{2} \quad \Delta t << \frac{2\nu}{u^2}$$

きわめて小さくとる必要がある。

(Ⅲ) 計算結果と考察

粘性, および, 微小波長の影響を考察するため, 容器は, 長さ(L) 10cm のものを考え, 静止水深(d)を, 3.75cm にとった。さらに, 重力の加速度(g): 980cm/sec², 外力(F_x): 9.8 sin 5 πt cm/sec² にとった1例を, (Fig-13)-(15)に示す。ここで(Fig-13)は完全流体としての解であり, (Fig-14, 15)は,

SUMMAC法による解である。

これらの図は, まだ, 砕波に至っていないけれど, (Fig-13)より, 壁面付近で, 高周波の波が表われているため, 以後, これが発達するものと考えられる。

なお, 計算は, すべて, 京大大型計算機センターのFACOM 230-75を用い, 演算時間は15分以上かった。

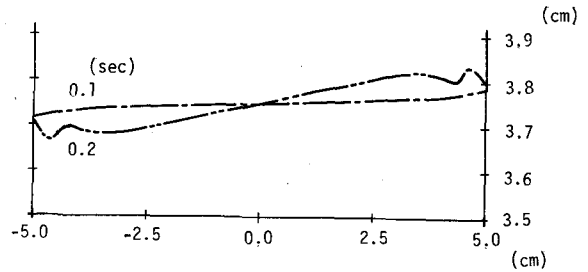


Fig-13 SPACE-TIME VARIATION OF SURFACE ELEVATION RESULTED BY PERFECT LIQUID

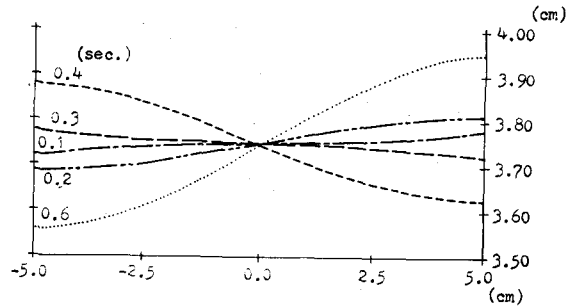


Fig-14 SPACE-TIME VARIATION OF SURFACE ELEVATION RESULTED BY MAC-METHOD

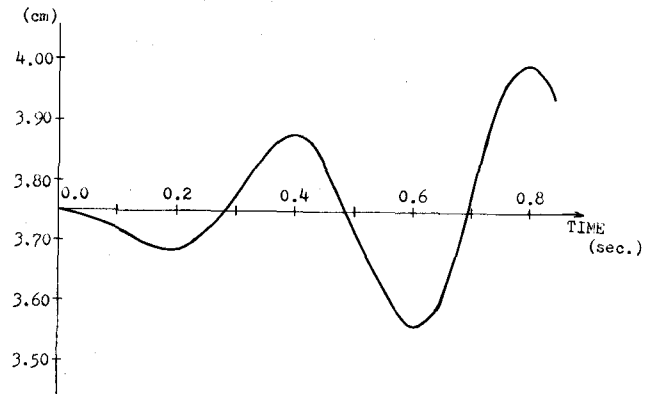


Fig-15 TIME VARIATION OF SURFACE ELEVATION AT LEFT WALL

$$\Delta T = 0.01(\text{sec}), \Delta X = 0.2(\text{cm}), \Delta Y = 0.2(\text{cm}), \nu = 0.01(\text{cm}^2/\text{s}) \\ g = 980.0(\text{cm}/\text{sec}^2), F_x = 9.8 \cdot \sin 5\pi T(\text{cm}/\text{sec}^2)$$

参考文献

- 1) 岸 力: 海岸堤防に関する研究(2) 土木研究所報告, 昭和30年3月
- 2) 合田・柿崎: 有限振幅重複波およびその波圧に関する研究, 港湾技術研究所報告, 1966年6月
- 3) Fromm, J.E.: Practical Investigation of Convective Difference Approximations of Reduced Dispersion, The Physics of Fluids, Supplement II, 1969
- 4) Chan, R.K.C. 他: Computer Studies of Finite-Amplitude Water Waves, Stanford Uni., No104, 1969
- 5) Hirt, C.W.: Heuristic Stability Theory for Finite Difference Equations, Jour. Computational Physics, 2, 339, 1968