

1. まえがき 有限要素法(F.E.M.)の工学への応用は、1956年アメリカ航空学会誌に発表されたTurner, Clough等の論文をもって始まるとされる。その後その手法が一般微分方程式の数値解法に有効であることが理解されるとともに、その適用対象が構造以外の一般連続体に拡張されるようになり、流体力学にも急速に応用が試みられ、Computational Hydraulics の新たな分野を形成しつつある。昭和34年以来当研究室では、取水口附近に発生する流出渦に関して研究が続けられているが、現象に不安定性、不規則性などの複雑な要素があるため、理論的説明は現在のところ困難となっている。流出渦は数学的にみると、自由表面を有し、その境界条件が非線形方程式で与えられ、同時に境界形状が未知であるばかりでなく、水面が急激に取水口附近で変わる非定常、かつ不安定な回転流である。本文では、非粘性、非圧縮、渦無しの軸対称定常流を仮定し、境界条件は、上、下流端で一様流を仮定、循環 Γ を中心に新しい変分原理に基づく有限要素法により検討を加えた。これにより、差分法の欠点であったところの「自然な境界条件の処理の困難さ」を克服し、安定渦を与える循環 Γ が求まり、懸案であった流速分布、圧力分布も得られ、流出渦の発生と不安定性を論ずることも可能となった。

2. 支配方程式 完全軸対称流の流出渦に対しては、図-1に示すような $r-\theta-z$ 円筒座標系で、 $r-z$ 平面内の解析が可能であって、 ∇ を流れの全領域として、Stokesの流れの関数 $\Psi(r, z)$ のPotential Flowに対して満足すべき基礎方程式は次式で与えられる。

$$\nabla \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad \text{in } \nabla \quad (1)$$

また、 r 方向、 z 方向の流速 u, w は次式で示される。

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (2)$$

境界条件は、流量を Q として、

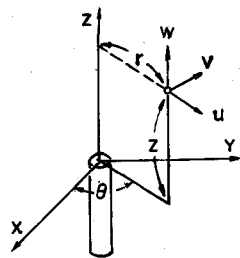
$$\left. \begin{aligned} \Psi &= Q / 2\pi && \text{on } S_1 \\ \Psi &= 0 && \text{on } S_2 \\ \Psi &= \text{深さ方向に } Q/2\pi \sim 0 \text{ の1次変化} && \text{on } S_3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で示され、安定渦の水面形状を与える式は、

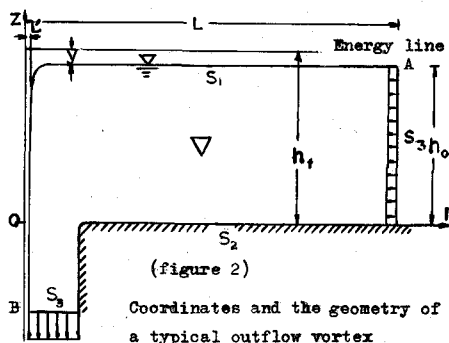
$$\eta = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} + \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)^2 \quad \text{on } S_1 \quad (4)$$

(1)

で与えられる。ここで、 n は水面にたてた法線方向であり、 $\Gamma = 2\pi r v$ は循環である。計算式の簡潔化と現象の相似則的理解を容易にするため、次の無次元量を用いて上述の各式を書き改める。



(Figure 1) Coordinates



(figure 2)

Coordinates and the geometry of a typical outflow vortex

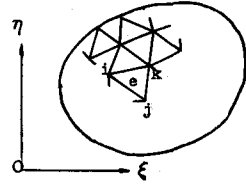
r_0 = 流出口半径、 $w_0 = Q/\pi r_0^2$ 、 h_t = エネルギー水頭として、

$$\xi = r/r_0, \quad \eta = z/r_0, \quad \zeta = y/r_0, \quad \eta_t = h_t/r_0$$

$$v_\xi = u/w_0, \quad v_\eta = w/w_0, \quad v_\theta = v/w_0, \quad l = L/r_0$$

$$l' = L'/r_0, \quad f = w_0/\sqrt{2gr_0}, \quad r = l'/2\pi r_0 w_0$$

$$\phi = 2\pi\Psi/Q = 2\Psi/w_0 r_0^2, \quad \eta_0 = h_0/r_0 \quad (\text{かぶり水深})$$



(Figure 3) A typical finite element 'e'

より、基礎方程式、流速、境界条件および自由表面の形状は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{in } \nabla \quad (6)$$

$$v_\xi = -\frac{1}{2\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = \frac{1}{2\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= 1 && \text{on } S_1 \\ \phi &= 0 && \text{on } S_2 \\ \phi &= 1 \sim 0 \text{ の 1 次変化} && \text{on } S_3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\zeta = f^2 r^2 \frac{1}{\xi^2} + \frac{f^2}{4} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 \quad (9)$$

で与えられる。

3. 有限要素法による解析

境界に(9)式で示される未知自由表面を有し、領域 ∇ 内で(6)式を満たす流れを解析的に解くことは困難とされている。一方、変分学によれば(6)式を境界条件式(8),(9)で解くことは、次のような汎関数 $\chi(\phi, \zeta)$ を付帯条件式(8)のもとに極小にすることと等価である。

$$\chi = \frac{1}{2} \iint_{\nabla} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \frac{1}{\xi} d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int_{l'}^l \frac{2}{f^2} \left(\zeta - r^2 f^2 \frac{1}{\xi^2} \right)^2 \xi d\xi \quad (10)$$

上式において変分される独立量は、付帯条件式(8)のもとにおける $\phi(\xi, \eta), \zeta(\xi)$ であり、(10)式の第1変分 $\delta\chi=0$ とすることにより、(10)式の停留条件として、(6)式のみならず(9)式も得られる。

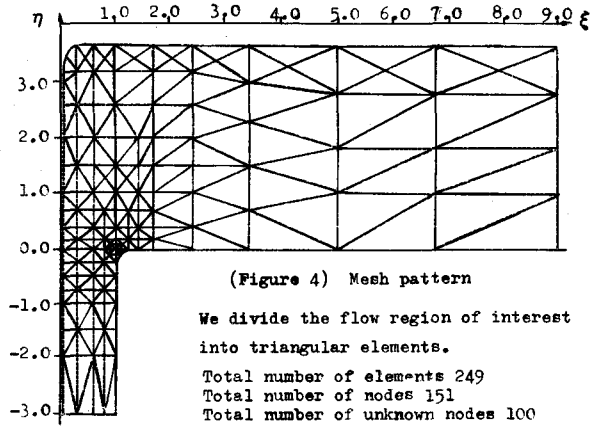
$$\delta\chi = -\iint_{\nabla} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \delta\phi \cdot d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int_{l'}^l \left\{ -\left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{4}{f^2} \left(\zeta - r^2 f^2 \frac{1}{\xi^2} \right) \right\} \delta\zeta \xi d\xi = 0 \quad (11)$$

上述の問題を有限要素法を用いて解こうとする場合、自由表面の形状 $\zeta(\xi)$ が独立な変関数であり、従って自由表面に関係する要素内のShape Functionの中にこの未知量が入ってきてしまい、非線形な多元連立方程式を解く必要が生じる。

(1) Graphical Methodsによる解析 自由表面の境界を固定した場合、(6)式の境界条件で(6)式を解く問題は、(6)式の付帯条件のもとに変分問題としての次の汎関数 $\Pi(\phi)$ の最小化問題と等価である。

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\nabla} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \frac{1}{\xi} d\xi d\eta, \quad (12) \quad \delta\Pi = -\iint_{\nabla} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \delta\phi \cdot d\xi d\eta = 0 \quad (13)$$

解析領域を図-4のように三角形要素の部分領域に分割する。いま、図-3のような代表的三角形要素 e 内の任意の点における ϕ を、その要素の節点での ϕ の値でもつて、(14)式で内挿補間する。以下の手法については、参考文献(9)に詳述されている。



$$\phi = [N_i N_j N_k] \phi \quad (14)$$

ここで、 $N_i = (a_i + b_i \xi + c_i \eta) / 2\Delta$ (15)

$$\phi^T = [\phi_i \phi_j \phi_k], \quad a_i = \xi_j \eta_k - \xi_k \eta_j, \quad b_i = \eta_j - \eta_k,$$

$$c_i = \xi_k - \xi_j, \quad \Delta = \text{三角形要素の面積}$$

である。(14) 式を (12) 式に代入し、未知量 ϕ に関して (12) 式を最小化する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = 0 \quad (16), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = \sum \sum S_{ij} \phi_j = 0 \quad (17), \quad S_{ij} = \frac{1}{4\Delta^2} (b_i b_j + c_i c_j) \int \int_{\Delta} \frac{1}{\xi} d\xi d\eta \quad (18)$$

ここで (17) 式の総和記号は、すべての要素と節点についてとるものとする。(16)(17) 式で表わされる多元 1 次連立方程式を解けば、未知節点の ϕ が求まる。

いま、自由表面の境界形状が未知であるので、(9) 式右辺第 2 項を第 1 項にくらべて小さいとして無視し、 f 、 r を仮定して次式で与える。

$$\zeta = f^2 r^2 / \xi^2 \quad (19)$$

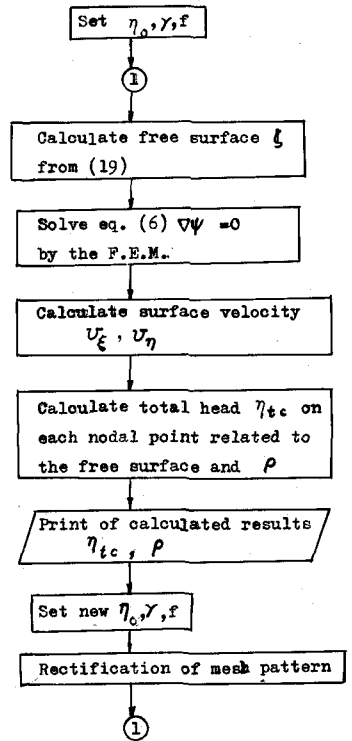
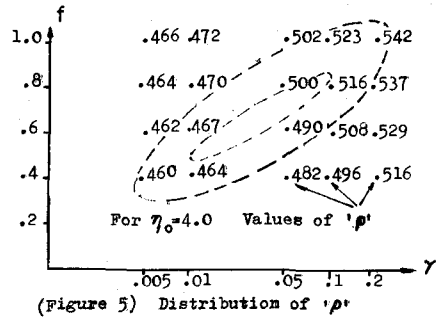
この領域について、上述の有限要素法により、各未知節点の ϕ が求められ、この値を用いて自由表面 AB 上の各節点での流速 v_ξ 、 v_η が計算される。この場合、 $\xi \rightarrow 0$ になると、(7) 式から求まる流速は不都合な値となったので、表面節点の流速は、その節点に関連する要素の重心位置での各 v_ξ 、 v_η の平均値とした。次に自由表面 AB の各節点での Total head η_{tc} を (20) 式から求め、また (21) 式から仮定の f 、 r の妥当性の判定指標として、Total Head のばらつきと流出管内での速度エネルギーとの比で示される ρ の値を計算する。

$$\eta_{tc} = \eta + f^2 r^2 \frac{1}{\xi^2} + f^2 (v_\xi^2 + v_\eta^2) \quad (20)$$

$$\rho = \frac{1}{f^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum (\eta_{tc} - \eta_t)^2} \quad (21)$$

ここで、 N は自由表面 AB の節点数であり、総和記号は自由表面 AB の節点についてとる。無次元フルード数 f 、循環の無次元量 r 、かぶり水深 η_0 を種々変えて ρ を計算した結果の一部を図-5 に示した。図-6 は、その計算手順である。

図-5 について、筆者は鎖線で示すような ρ の分布が求まり、最適な f 、 r 、 η_0 の組合せが求まることを期待したが、結果からはその種のことは論じられない模様である。



(Figure 6) Flow chart

(2) Newton-Raphson法による解析⁽³⁾

いま、全節点の流れの関数 ϕ と自由表面の各節点の座標の第 (n) 次近似が求まっているものとし、
各々 ϕ_0, ζ_0 とすると、第 $(n+1)$ 次近似値を次式で与える。

$$\phi = \phi_0 + d\phi \quad (d\phi \ll \phi_0) \quad (22) \quad \zeta = \zeta_0 + d\zeta \quad (d\zeta \ll \zeta_0) \quad (23)$$

自由表面は各節点間の直線で近似するものとし (19) 式より循環 r の無次元量 r の微小変化 dr による水面変化は次式で与えられる。

$$d\zeta = dr D \quad \text{on } S_1 \quad (24)$$

$$\text{ここで、} \quad d\zeta^T = [d\zeta_i, 0, d\zeta_k], \quad D^T = 2f^2 r [1/\xi^2_i, 0, 1/\xi^2_k]$$

である。自由表面の境界 S_1 に関連する図-7で示されるような2種類の三角形要素について以下の諸量を求める。図-7で P_i^0, P_k^0 は自由表面であり、 P_i^0, P_k^0 が各々 $d\eta_i, d\eta_k$ 変化して自由表面は $P_i P_k$ に移ったものとする

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = A_0^T \phi - d\eta^T A_1^T \phi \quad (25), \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = B_0^T \phi - d\eta^T B_1^T \phi \quad (26)$$

$$\text{ここで、} \quad A_0^T = [\eta_j - \eta_k^0, \eta_k^0 - \eta_i^0, \eta_i^0 - \eta_j] / 2\Delta_0 \quad (27)$$

$$B_0^T = [\xi_k - \xi_j, \xi_i - \xi_k, \xi_j - \xi_i] / 2\Delta_0 \quad (28)$$

$$A_1 = \frac{1}{2\Delta_0} \begin{bmatrix} \frac{(\eta_j - \eta_k^0)(\xi_k - \xi_j)}{2\Delta_0}, 0, 1 + \frac{(\eta_j - \eta_k^0)(\xi_j - \xi_i)}{2\Delta_0} \\ 1 + \frac{(\eta_k^0 - \eta_i^0)(\xi_k - \xi_j)}{2\Delta_0}, 0, -1 + \frac{(\eta_k^0 - \eta_i^0)(\xi_j - \xi_i)}{2\Delta_0} \\ -1 + \frac{(\eta_i^0 - \eta_j)(\xi_k - \xi_j)}{2\Delta_0}, 0, \frac{(\eta_i^0 - \eta_j)(\xi_j - \xi_i)}{2\Delta_0} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$B_1 = \frac{1}{2\Delta_0} \begin{bmatrix} \frac{(\xi_k - \xi_j)(\xi_k - \xi_j)}{2\Delta_0}, 0, \frac{(\xi_k - \xi_j)(\xi_j - \xi_i)}{2\Delta_0} \\ \frac{(\xi_i - \xi_k)(\xi_k - \xi_j)}{2\Delta_0}, 0, \frac{(\xi_i - \xi_k)(\xi_j - \xi_i)}{2\Delta_0} \\ \frac{(\xi_j - \xi_i)(\xi_k - \xi_j)}{2\Delta_0}, 0, \frac{(\xi_j - \xi_i)(\xi_j - \xi_i)}{2\Delta_0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\text{である。} \quad I = I_0 + Q^T d\eta \quad (33)$$

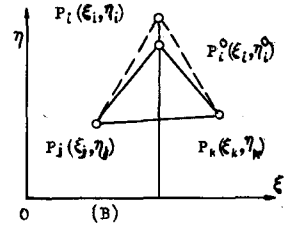
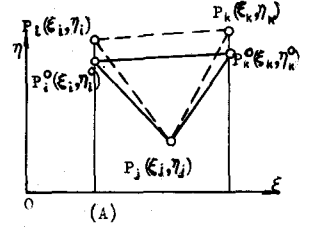
$$\text{ここで、} \quad I_0 = \iint_{\Delta} \frac{1}{\xi} d\xi d\eta = (A_{ji} - A_{ik}) \log \xi_j + (A_{kj} - A_{ji}) \log \xi_j + (A_{ik} - A_{kj}) \log \xi_k \\ + B_{ik}(\xi_k - \xi_i) + B_{kj}(\xi_j - \xi_k) + B_{ji}(\xi_i - \xi_j) \quad (34)$$

$$A_{ik} = \frac{\xi_k \eta_i^0 - \xi_i \eta_k^0}{\xi_k - \xi_i} \quad (35),$$

$$B_{ik} = \frac{\eta_k^0 - \eta_i^0}{\xi_k - \xi_i} \quad (36),$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\xi_j \log(\xi_i / \xi_j)}{\xi_i - \xi_j} + \frac{\xi_k \log(\xi_i / \xi_k)}{\xi_k - \xi_i} \\ \frac{\xi_k \log(\xi_j / \xi_k)}{\xi_j - \xi_k} + \frac{\xi_i \log(\xi_j / \xi_i)}{\xi_i - \xi_j} \\ \frac{\xi_i \log(\xi_k / \xi_i)}{\xi_k - \xi_i} + \frac{\xi_j \log(\xi_k / \xi_j)}{\xi_j - \xi_k} \end{bmatrix} \quad (37)$$

図-7の(B)の場合は、上述の式において、 $\eta_k^0 = \eta_k, d\eta_k = 0$ とおくだけで容易に求まる。なお、計算にあたっては、節点の移動は図-7に示すように自由表面節点の η 座標のみとして、また自由表面の移動



(Figure 7) Deformation of a triangular element related to the free surface

$$d\eta^T = [d\eta_i, 0, d\eta_k] \quad (30)$$

$$2\Delta_0 = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_i & \eta_i^0 \\ 1 & \xi_j & \eta_j \\ 1 & \xi_k & \eta_k^0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

により、各三角形要素間でオーバーラップが起こらないように考慮した。

(10)で与えられる汎関数 χ の $(n+1)$ 次近似式は、上述の諸量を使って次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \chi = & \sum_e (\phi + d\phi)^T \{ (A_0 - A_1, d\eta) (A_0^T - d\eta^T A_1^T) + (B_0 - B_1, d\eta) (B_0^T - d\eta^T B_1^T) \} (\phi_0 + d\phi) (I_0 + Q^T d\eta) \\ & + \frac{1}{f^2} \sum_e \{ \zeta_0 + d\zeta \}^T F \{ \zeta_0 + d\zeta \} - 2\tau_0^2 \sum_e \{ \zeta_0 + d\zeta \}^T H + \beta r^2 \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、 $\sum_e$ 、 $\sum_{se}$ は、各々要素と S_1 上の節点についての総和を表わす。

付帯条件(6)式を考慮し、 r の $(n+1)$ 次近似を次式 $r = r_0 + dr (dr \ll r_0)$ (39)

で与え、(24)式、また、 $\delta d\eta = -\delta d\zeta$ on S_1 (40)

なることに注意して(38)式で与えられる汎関数 χ の第1変分をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta\chi = & \sum_e \delta d\phi \{ (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) \phi_0 I_0 + [(A_0^T \phi_0 I + A_0 \phi_0^T) A_1 + (B_0^T \phi_0 I + B_0 \phi_0^T) B_1] D I_0 \cdot dr \\ & + (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) d\phi I_0 - D^T Q (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) \phi_0 \cdot dr \} \\ & - \frac{1}{2} \sum_e \delta dr D^T Q \{ \phi_0^T (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) \phi_0 + 2\phi_0^T (A_0 \phi_0^T A_1 + B_0 \phi_0^T B_1) D dr \\ & + 2\phi_0^T (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) d\phi \} + \sum_{se} \delta dr \cdot 2D^T F (\zeta_0 + D dr) / f^2 \\ & - 2\tau_0 (\tau_0 + 4dr) \sum_{se} \delta dr D^T H - 4\tau_0 \sum_{se} \delta dr \zeta_0^T H + 4\beta \tau_0^2 (\tau_0 + 3dr) \delta dr \end{aligned} \quad (41)$$

ここで $\sum_e$ 、 $\sum_{se}$ は、各々領域 $\nabla(\zeta)$ 内と境界 S_1 上のすべての節点についての総和をあらわす。(41)式から得られる停留条件は、次式のかたちにとめられる。

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

ここに、 $G_{11} = D^T Q \phi^T (A_0 \phi_0^T A_1 + B_0 \phi_0^T B_1) D - 2D^T F D / f^2 + 8\tau_0 D^T H - 12\beta \tau_0^2$

$$G_{12} = D^T Q \phi_0^T (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T)$$

$$G_{21} = [(A_0^T \phi_0 I + A_0 \phi_0^T) A_1 + (B_0^T \phi_0 I + B_0 \phi_0^T) B_1] D I_0 - D^T Q (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) \phi_0$$

$$G_{22} = (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) I_0$$

$$R_1 = 2D^T F \zeta_0 / f^2 - 2\tau_0^2 D^T H - 4\tau_0 \zeta_0^T H + 4\beta \tau_0^2$$

$$- \frac{1}{2} D^T Q \phi_0^T (A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) \phi_0$$

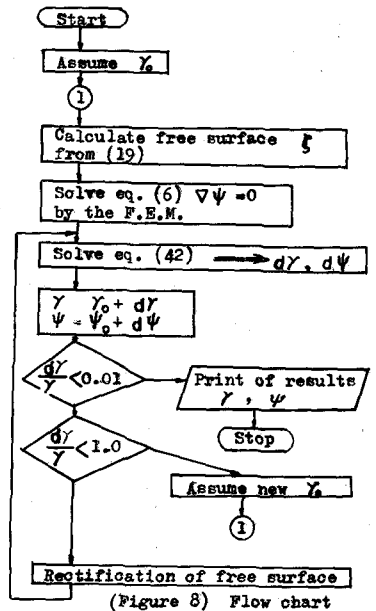
$$R_2 = -(A_0 A_0^T + B_0 B_0^T) \phi_0 I_0$$

ここで、マトリクスの表示はすべての関連した節点について定義さ

れるものとする。(42)式の多元連立方程式を解くことによって、 dr

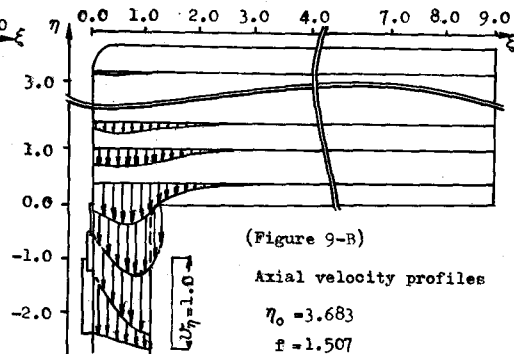
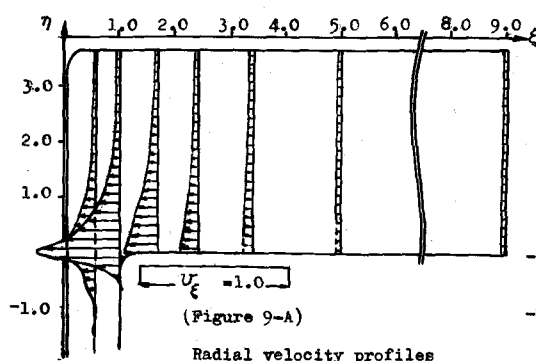
$d\phi$ が求まり、(22)、(39)式より、 ϕ 、 r の第 $(n+1)$ 次近似値が求

まり、以下逐次近似していけばよい。 ϕ_0 は、 f 、かぶり水深 η_0 を与え、 r_0 を仮定して、(19)式で自由表面の形状 $\zeta(\xi)$ を与えて、前述の有限要素法により(6)式を解いて得られた値を使用した。 r の値については、実験的にオーダー程度でしか判っておらず、Step by Stepに变化させ、 $dr/r_0 < 0.01$ になると収斂



したとみなした。図-8は、その計算手順である。

計算例 かぶり水深 $\eta_0 = 3.683$ 、無次元フルード数 $f = 1.507$ の場合、循環 Γ の無次元量 r を0.07から0.005きざみに変化させて仮定し、上述のNewton-Raphason法を用いて有限要素法的に、安定渦を与える r の収斂解を得ようと試みたところ、仮定値0.03に対してのみ収斂し、収斂解は0.01125であった。図-9に、この結果を使って計算した ξ 方向、 η 方向の流速分布を示した。図-10は流線のパターンである。



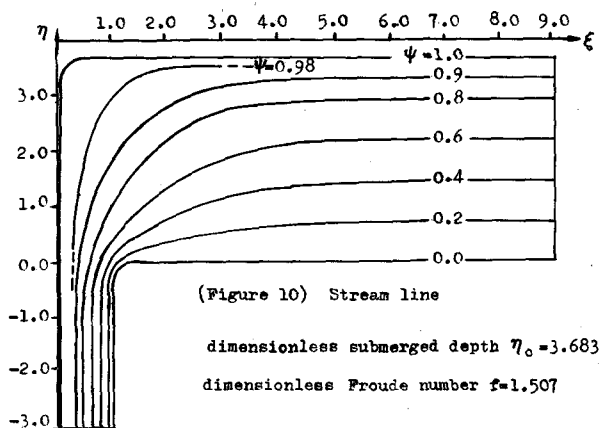
4. まとめ

(1) (a)式に対する汎関数が得られ、有限要素法により、差分法の欠点であった「自然な境界条件の処理の困難さ」が克服された。

(2) 境界に非線形方程式(9)で与えられる自由表面をもち、領域内で(a)式を満足する流れが、変分原理にもとづいた有限要素法により解析可能であることを示した。

(3) (2)により安定渦を与える r が求まり、流速分布が得られ、圧力分布も検討可能である。

今後、収斂の問題等を含めて資料を増し、実験資料も加えてさらに検討をすすめるつもりである。



謝辞 本研究にあたり、池川昌弘氏(日立製作所機械研究所)に御指導戴きました。深く感謝いたします。

参考文献

- (1) 荻原能男：空気吸込渦に関する研究，土木学会論文報告集第215号 1973年7月
- (2) C.C.Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science, McGRAW - HILL 1971
- (3) M.Ikegawa and K.Washizu: Finite Element Method Applied to Analysis of Flow over a Spillway Crest, Department of Aeronautics, University of Tokyo