

中央大学 正 川 原 睦 人

中央大学 正 ○大 坂 一

中央大学 見 浦 安 治

1. 緒言

現在のところ、流体力学における数値解析は、そのほとんどが差分法を用いられて検討されている。さらに、ナビエーストックス方程式を直接解析することのほかに、流れ関数や渦度を用いて変形して解析されることも多い。近年、ナビエーストックス方程式に対して有限要素法を適用することが、Oden, Zienkiewicz などによって行なわれてきている。有限要素法は、構造解析の分野ではすでに多く利用されている手法である。とくに、境界の形状を自由に選択できること、境界条件の物理的意味づけを明確にできること、汎用的プログラムを作成しやすいことなどを特徴としている。ここでは、自然熱対流に対してガラキン法による有限要素法の定式化および数値計算の結果について述べる。

2. 基礎方程式

自然熱対流の基礎方程式は熱対流の問題から、密度変化が温度と線形関係にあり、かつ密度変化が微小であるという仮定より導びかれる。さらにここでは二次元定常問題を考えることにより次式を得る。

(I) 重力場における運動方程式

$$u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial \tau_{XX}}{\partial X} - \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} - \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial X} - \frac{\partial \tau_{YY}}{\partial Y} + \beta T g = 0 \quad (2)$$

ここに、 u 、 v は X 、 Y 方向流速、 β は流体の熱膨張係数、 T は温度、 g は重力加速度を表わす。 τ_{XX} 、 τ_{XY} 、 τ_{YY} は全応力を表わし、次の関係を持っている。

$$\tau_{XX} = -P + 2\nu \frac{\partial u}{\partial X}, \quad \tau_{XY} = \nu \left(\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \right), \quad \tau_{YY} = -P + 2\nu \frac{\partial v}{\partial Y} \quad (3)$$

P は無次元化された静圧の変動分、 ν は動粘性係数を表わす。

(II) 温度拡散方程式

$$u \frac{\partial T}{\partial X} + v \frac{\partial T}{\partial Y} - \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (4)$$

ここに、 χ は温度拡散係数を表わす。

(III) 連続の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

これらの基礎方程式に対し、次の境界条件を考える。まず運動方程式に対して、二種の境界 S_1^X , S_2^X , S_1^Y , S_2^Y を次のように与える。

$$u = \hat{u} \quad \text{on} \quad S_1^X \quad S_X = \tau_{XX} l + \tau_{XY} m = \hat{S}_X \quad \text{on} \quad S_2^X \quad (6)$$

$$v = \hat{v} \quad \text{on} \quad S_1^Y \quad S_Y = \tau_{XY} l + \tau_{YY} m = \hat{S}_Y \quad \text{on} \quad S_2^Y \quad (7)$$

ここに、 l, m は境界 S_2^X, S_2^Y の法線ベクトルの X, Y 成分であり、 $\hat{\cdot}$ は与えられた値であることを示す。温度拡散方程式に対しては次の三種の境界 S_3, S_4, S_5 を考える。

$$\begin{aligned} \hat{T} &= T \quad \text{on} \quad S_3 \\ Q &= \chi \left(\frac{\partial T}{\partial X} \cdot l + \frac{\partial T}{\partial Y} \cdot m \right) = \hat{Q} \quad \text{on} \quad S_4 \\ Q &= -\alpha (T - \hat{T}_{\text{air}}) \quad \text{on} \quad S_5 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 Q は境界 S_4 又は S_5 から流体への熱流入量を示す。 α は空気と流体間の有効熱伝導率、 T_{air} は空気の温度を表わす。

境界の点は必ず (6), (7), (8), から一つずつ、計三つの境界条件を与えねばならない。たとえば、断熱壁であれば (6) より $u = \hat{u} = 0 \quad \text{on} \quad S_1^X$, (7) より $v = \hat{v} = 0 \quad \text{on} \quad S_1^Y$, (8) より $Q = \hat{Q} = 0 \quad \text{on} \quad S_4$ となり、空気との接触面であれば (6) より $S_X = \hat{S}_X = 0 \quad \text{on} \quad S_2^X$ より $v = \hat{v} = 0 \quad \text{on} \quad S_1^Y$, (8) より $Q = -\alpha (T - \hat{T}_{\text{air}}) \quad \text{on} \quad S_5$ となる。

3. ガラーキン法による定式化

自然熱対流をガラーキン法で定式化するため、基礎方程式を総和規約を用いて書き直す。

$$u_j u_{i,j} + P_{,i} - \nu (u_{i,jj} + u_{j,ii}) + \beta T g_i = 0 \quad (9)$$

$$u_i T_{,i} - \chi T_{,ii} = 0 \quad (10)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (11)$$

(9), (10), (11) 式に重み関数をかけ、全領域で積分することによって定式化できる。

(9) 式に対する重み関数としては S_1^X, S_1^Y 上でそれぞれ 0 となる任意の間数 u_i^* を使用する。同様に (10) 式に対しては S_3 上で 0 となる関数 T^* を採用し、連続の式に対する重み関数は P^* とする。

これらの重み関数を両辺に剰じて積分すると、次式を得る。

$$\int_V u_j u_{i,j} u_i^* dV + \int_V P_{,i} u_i^* dV - \nu \int_V (u_{i,jj} + u_{j,ii}) u_i^* dV + \int_V \beta T g_i u_i^* dV = 0 \quad (12)$$

$$\int_V u_i T_{,i} T^* dV - \chi \int_V T_{,ii} T^* dV = 0 \quad (13)$$

$$\int_V u_{i,i} P^* dV = 0 \quad (14)$$

ここに V は全領域を示す。

(12) 式の左辺第二、第三項を部分積分し、境界条件 (6), (7) と重み関数の性質及び (9) 式より (12) 式を得る

$$\int_V u_{ij} u_{ij} u_i^* dV + \nu \int_V (u_{ij} + u_{ji}) u_{i,j}^* dV - \int_V P u_{i,i}^* dV + \beta \int_V g_i T u_i^* dV = \int_{S_i} \hat{S}_i u_i^* dS \quad (15)$$

同様に (13) 式より、(16) 式を得る。

$$\int_V u_{i,i} T_{i,i} T^* dV - \chi \int_V T_{i,i} T_{i,i}^* + \alpha \int_{S_5} T T^* dS = \int_{S_4} \hat{Q} T^* dS + \alpha \int_{S_5} \hat{T}_{air} T^* dS \quad (16)$$

流速 u_i 、温度 T 、圧力 P をそれぞれの接点値 $u_{\alpha i}$ 、 T_α 、 P_α と形状関数 Φ_α 、 Θ_α 、 Ψ_α を用いて次のように表現する。

$$u_i = u_{\alpha i} \Phi_\alpha \quad T = T_\alpha \Theta_\alpha \quad P = P_\alpha \Psi_\alpha \quad (17)$$

重み関数も同様に次のようにする。

$$u_i^* = u_{\alpha i}^* \Phi_\alpha \quad T^* = T_\alpha^* \Theta_\alpha \quad P^* = P_\alpha^* \Psi_\alpha \quad (18)$$

(15)、(16) 式を (19)、(20)、(21) 式に代入することにより、離散化された代数方程式 (19)、(20)、(21) を得る。

$$\begin{aligned} \int_V u_{\rho j} \Phi_\rho u_{\gamma i} \Phi_\gamma u_{\alpha i}^* \Phi_\alpha dV + \nu \int_V (u_{\rho j} \Phi_\rho + u_{j\rho} \Phi_\rho) u_{\alpha i}^* \Phi_\alpha dV - \int_V P_\beta \Psi_\beta u_{\alpha i}^* \Phi_\alpha dV \\ + \beta g_i \int_V T_\beta \Theta_\beta u_{\alpha i}^* \Phi_\alpha dV = \int_{S_i} \hat{S}_i u_{\alpha i}^* \Phi_\alpha dS \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_V u_{\rho i} \Phi_\rho T_\gamma \Theta_\gamma T_\alpha^* \Theta_\alpha dV + \chi \int_V T_\beta \Theta_\beta T_\alpha^* \Theta_\alpha dV + \alpha \int_{S_5} T_\beta \Theta_\beta T_\alpha^* \Theta_\alpha dS \\ = \int_{S_4} \hat{Q} T_\alpha^* \Theta_\alpha dS + \alpha \int_{S_5} \hat{T}_{air} T_\alpha^* \Theta_\alpha dS \end{aligned} \quad (20)$$

$$\int_V u_{\rho i} \Phi_\rho P_\beta \Psi_\beta dV = 0 \quad (21)$$

ここで上式が任意の $u_{\alpha i}^*$ 、 T_α^* 、 P_α^* に対し成立することから、次式を得る。

$$\begin{aligned} A_{\alpha\rho\gamma j} u_{\rho j} u_{\gamma i} + \nu B_{\alpha\rho} u_{\rho i} + \nu C_{\alpha i\rho j} u_{\rho j} + \beta g_i D_{\alpha\beta} T_\beta - E_{\alpha i\rho} P_\rho = F_{\alpha i} \\ G_{\alpha\rho\gamma i} u_{\rho i} T_\gamma + \chi H_{\alpha\beta} T_\beta + \alpha K_{\alpha\beta} T_\beta = Q_\alpha \\ E_{\rho i\alpha} u_{\rho i} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$A_{\alpha\rho\gamma j} = \int_V \Phi_\alpha \Phi_\rho \Phi_\gamma dV, \quad B_{\alpha\rho} = \int_V \Phi_\alpha \Phi_\rho dV, \quad C_{\alpha i\rho j} = \int_V \Phi_\alpha \Phi_\rho \Phi_\gamma dV,$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_V \Phi_\alpha \Theta_\beta dV, \quad E_{\alpha i\rho} = \int_V \Phi_\alpha \Psi_\rho dV, \quad G_{\alpha\rho\gamma i} = \int_V \Theta_\alpha \Phi_\rho \Theta_\gamma dV,$$

$$H_{\alpha\beta} = \int_V \Theta_\alpha \Theta_\beta dV, \quad K_{\alpha\beta} = \int_{S_5} \Theta_\alpha \Theta_\beta dS$$

$$F_{\alpha i} = \int_{S_i} \hat{S}_i \Phi_\alpha dS : \text{等価節点力} \quad Q_\alpha = \int_{S_4} \hat{Q} \Theta_\alpha dS + \alpha \int_{S_5} \hat{T}_{air} \Theta_\alpha dS : \text{等価節点熱流入量}$$

さらに形状関数として Φ_α 、 Θ_α を完全二次多項式、 Ψ_α を完全一次多項式とすると次式となる。

$$\begin{aligned} A_{\alpha\rho\gamma j} u_{\rho j} u_{\gamma i} + \nu B_{\alpha\rho} u_{\rho i} + \nu C_{\alpha i\rho j} u_{\rho j} + \beta g_i D_{\alpha\beta} T_\beta - E_{\alpha i\rho} P_\rho = F_{\alpha i} \\ A_{\alpha\rho\gamma i} u_{\rho i} T_\gamma + \chi B_{\alpha\beta} T_\beta + \alpha K_{\alpha\beta} T_\beta = Q_\alpha \\ E_{\rho i\alpha} u_{\rho i} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

4. ニュートン・ラプソン法による解法

(23) 式は非線形方程式であるためそのまま解くことはできない。一般に非線形形式代数方程式の解法には、くり返し代入法、増分法、賢動法、ニュートン・ラプソン法がある。ここではニュートン・ラプソン法による解法の定式化を行なう。境界条件 S_1^i, S_3 に対応する式は $u_{\alpha i}^*$, $T_\beta^* = 0$ から (23) 式内から消去されている。しかし、 S_1^i, S_3 に対応する節点流速 $\hat{u}_{\alpha i}$, 節点温度 $\hat{T}_\beta$ は (23) 式に含まれている。そのため、このことを区別して (23) 式を書き直す。

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\beta j} u_{\gamma i} + A_{\alpha\beta\gamma i} \hat{u}_{\beta j} u_{\gamma i} + A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\beta j} \hat{u}_{\gamma i} + \nu B_{\alpha\beta} u_{\beta i} + \nu C_{\alpha i\beta j} u_{\beta j} + \beta g_i D_\beta T_\beta - E_{\alpha i\beta} P_\beta &= X_{\alpha i}(u_{\beta j}, T_\beta, P_\beta) \\ X_{\alpha i}(u_{\beta j}, T_\beta, P_\beta) &= x_{\alpha i} = F_{\alpha i} - A_{\alpha\beta\gamma i} \hat{u}_{\beta j} \hat{u}_{\gamma i} - \nu B_{\alpha\beta} \hat{u}_{\beta i} - \nu C_{\alpha i\beta j} \hat{u}_{\beta j} - \beta g_i D_\beta \hat{T}_\beta \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\beta i} T_\gamma + A_{\alpha\beta\gamma i} \hat{u}_{\beta i} T_\gamma + A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\beta i} \hat{T}_\gamma + \chi B_{\alpha\beta} T_\beta + \alpha K_{\alpha\beta} T_\beta &= Y_\alpha(u_{\beta j}, T_\beta) \\ Y_\alpha(u_{\beta j}, T_\beta) &= Q_\alpha - A_{\alpha\beta\gamma i} \hat{u}_{\beta i} \hat{T}_\gamma - \chi B_{\alpha\beta} \hat{T}_\beta - \alpha K_{\alpha\beta} \hat{T}_\beta = y_\alpha \end{aligned} \quad (25)$$

$$E_{\beta i\alpha} u_{\beta i} = Z_\alpha(u_{\beta j}) = -E_{\beta i\alpha} \hat{u}_{\beta i} = z_\alpha \quad (26)$$

(24), (25), (26) 式は未知数 $u_{\alpha i}$, P_α , T_α と同数の方程式群を構成している。一ステップ前の変数名に添字(0)をつけると、ニュートン・ラプソン法は次のようなマトリックス{ }, ベクトル{ }の形で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} x_{\alpha i} \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_{\alpha i}^{(0)} \\ Y_\alpha^{(0)} \\ Z_\alpha^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X_{\alpha i}^{(0)}}{\partial u_{\beta j}} & \frac{\partial X_{\alpha i}^{(0)}}{\partial T_\beta} & \frac{\partial X_{\alpha i}^{(0)}}{\partial P_\beta} \\ \frac{\partial Y_\alpha^{(0)}}{\partial u_{\beta j}} & \frac{\partial Y_\alpha^{(0)}}{\partial T_\beta} & \frac{\partial Y_\alpha^{(0)}}{\partial P_\beta} \\ \frac{\partial Z_\alpha^{(0)}}{\partial u_{\beta j}} & \frac{\partial Z_\alpha^{(0)}}{\partial T_\beta} & \frac{\partial Z_\alpha^{(0)}}{\partial P_\beta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\beta j} - u_{\beta j}^{(0)} \\ T_\beta - T_\beta^{(0)} \\ P_\beta - P_\beta^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{\alpha i}}{\partial u_{\beta j}} &= A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\gamma i} + A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\gamma k} \delta_{ij} + A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\gamma i} + A_{\alpha\beta\gamma i} \hat{u}_{\gamma k} \delta_{ij} + \nu B_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \nu C_{\alpha i\beta j} \\ \frac{\partial X_{\alpha i}}{\partial T_\beta} &= \beta g_i D_\beta \quad \frac{\partial X_{\alpha i}}{\partial P_\beta} = -E_{\alpha i\beta} \quad \frac{\partial Y_\alpha}{\partial u_{\beta j}} = A_{\alpha\beta\gamma i} T_\gamma + G_{\alpha\beta\gamma i} \hat{T}_\gamma \\ \frac{\partial Y_\alpha}{\partial T_\beta} &= A_{\alpha\beta\gamma i} u_{\gamma k} + A_{\alpha\beta\gamma i} \hat{u}_{\gamma k} + \chi B_{\alpha\beta} + \alpha K_{\alpha\beta} \quad \frac{\partial Y_\alpha}{\partial P_\beta} = 0 \\ \frac{\partial Z_\alpha}{\partial u_{\beta j}} &= E_{\beta j\alpha} \quad \frac{\partial Z_\alpha}{\partial T_\beta} = 0 \quad \frac{\partial Z_\alpha}{\partial P_\beta} = 0 \end{aligned}$$

(27) 式のマトリックスは対角項に零成分を持ち、しかも非対称であることがわかる。このことから類推できるように有効桁 7 ~ 8 桁の計算で逆行列をとると誤差が非常に大きくなる。このため現在有効桁 17 ~ 18 桁で計算を行なっている。

5. 数値計算例

モデル 1 は垂直密閉流本体層のモデルで、レーリー数 $Ra = 512.3$ 、縦横比 $L/D = 5/3$ 、プラントル数 $Pr = 5.0$ である。図 1 - 3、1 - 4 より対流の発生がわかる。モデル 2 は左右、下部を断熱壁、上部に温度を与え、さらに下部の中心を一定温度で熱した時の例である。図 2 - 2 のメッシュ分割図からもわかるように対称性を利用して左半分で計算を行なった。図 2 - 3、2 - 4 は空気との接触面を考えた時の流速温度分布図で有効熱伝導係数をそれぞれ $\alpha = 0.04$ 、 0.004 とした時の例である。こ

の図からわかるように、対流の大きさが α の大きく変化することがわかる。図2-5は上部に直接温を与えた時の流速・温度分布図である。

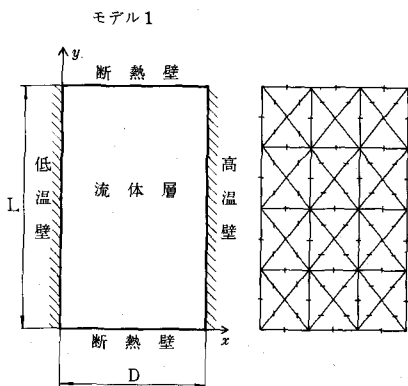


図1-1 モデル図

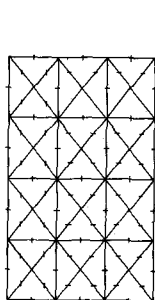


図1-2 メッシュ分割図

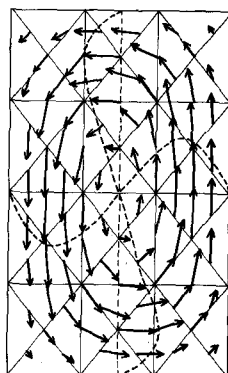


図1-3 流速分布図

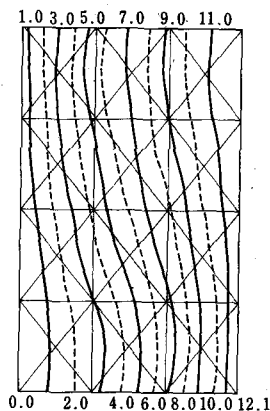


図1-4 温度分布図

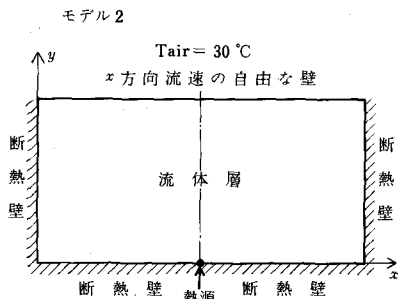


図2-1 モデル図

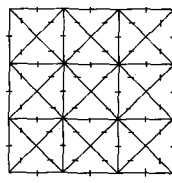


図2-2 メッシュ分割図

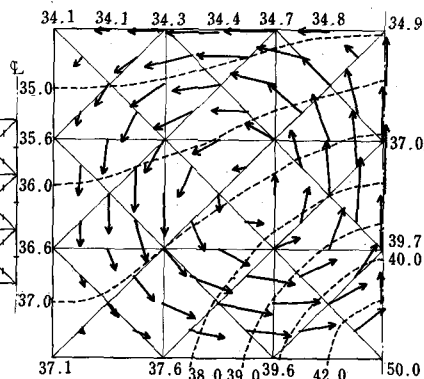


図2-3 流速・温度分布図

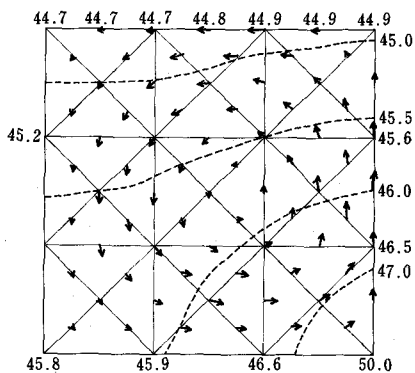


図2-4 流速・温度分布図

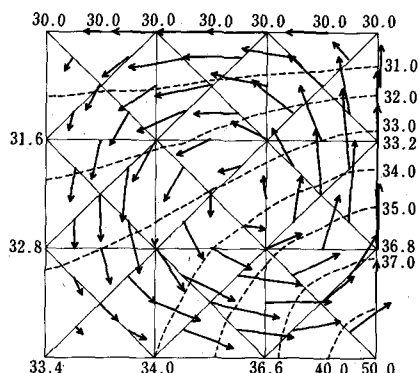


図2-5 流速・温度分布図

6. 結言

有限要素法によつて自然熱対流の解析が可能であることを、二三の数値実験とともに示した。このような数値解析との問題点として、誤差の問題、メッシュ分割による精度の問題、有限要素法による定式化の問題などの多くの問題を含んでおり、実際に着手したばかりの解析であるといえよう。さらに、自然熱対流の問題として、重要な課題の一つに対流の安定性の問題がある。このような安定解析に対しても、有限要素法の適用が可能であることを実証すべく作業を続行中である。

参考文献

1. Martin, H.C., Finite Element Analysis of Fluid Flow, AFFDLTR-68-150, 1968
2. Argyris, J.H., Mareczek, C. and Schapf, D.W., Two and Three Dimensional Flow Analysis Using Finite Elements, J. Roy. Aero. Sci. Vol. 73, pp. 961-964, 1969 and Nucl. Eng. Desg., Vol. 11, pp. 230-236, 1970.
3. Oden, J.T. and Somogyi, D., Finite Element Applications in Fluid Dynamics, Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM3, pp. 821-826, 1968
4. Oden, J.T., A Finite Element Analog of the Navier-Stokes Equations Proc. ASCE, Vol. 96, No. EM4, pp. 529-534, 1970
5. Oden, J.T. The Finite Element Method in Fluid Mechanics Lectures on Finite Element Method in Continuum Mechanics, Lectures on Finite Element Method in Continuum Mechanics, edited by Oden, J.T. et al., UAH Press, pp. 151-186, 1973
6. Oden, J.T., Finite Element Formulation of Problems of Finite Deformation and Irreversible Thermodynamics of Nonlinear Continua, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, edited by R.H. Gallagher et al., University of Alabama Press, pp. 693-724, 1971
7. Tong, P., The Finite Element Method in Fluid Flow Analysis Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, edited by R.H. Gallagher et al., University of Alabama Press, pp. 787-808, 1971
8. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, C., Weighted Residual Processes in Finite Element with Particular Reference to Some Transient and Coupled Problems, Lectures on Finite Element Method in Continuum Mechanics, edited by Oden, J.T. et al., UAH Press, pp. 415-458, 1973
9. Kawahara, M., et al., Steady Flow Analysis of Incompressible Viscous Fluids by the Finite Element Method Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis.
10. Oden, J.T. and Wellford, L.C., Jr., Analysis of Flow of viscous Fluids by the Finite Element Method AIAA, J., Vol. 10, No. 12, pp. 1590-1599, 1972.
11. ランダウ・リフシッツ著 流体力学 1